

Some Remarks on Stabilization of Infinite-Dimensional
Control Systems via a Functional Observer

熊本大学工学部 南部隆夫 (Takao Nambu)

無限次元系の安定化には，無限次元性ゆえに起こる様々な障害がある． Hilbert 空間 H における方程式

$$\frac{dx}{dt} = -Lx + \sum_{k=1}^M f_k(t) \psi_k, \quad t > 0, \quad x(0) = x_0 \quad (1)$$

を考えよう．ここで， L は稠密な定義域 $\mathcal{D}(L)$ をもつ H の線形閉作用素で， $-L$ は C_0 半群 e^{-tL} の生成作用素である．観測（出力）は有限個であり

$$(x(t), g_k)_H, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2)$$

で与えられるとするが，境界制御系を扱う場合には少し異なった形をとる．ここで， g_k は観測の重みベクトルである．我々の問題は

g_k, ψ_k が与えられたとき， $f_k(t)$ を (2) の実現可能なフィードバックとして設計し，制御系 (1) の解 $x(t)$ が

時間とともに指数関数的に減衰するようにすることである． g_k, φ_k の少なくとも一方が自由に設計できるベクトルであるときは，有限次元系の問題に帰着され，

$f_k(t) = (x(t), g_k)_H, \quad 1 \leq k \leq M (= N)$ として適当な代数的条件のもとで安定化が実現できる．そうでない場合（それがこれからの主題であるが）， $f_k(t)$ はつぎの Hilbert 空間 H_1 における方程式（オブザーバ）の出力として安定化を図る：

$$\begin{cases} f_k(t) = (v(t), p_k)_{H_1}, & 1 \leq k \leq M, \\ \frac{dv}{dt} = Bv + \sum_{k=1}^N (x(t), g_k)_H \xi_k + \sum_{k=1}^M f_k(t) \alpha_k, \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (3)$$

ここで， B は安定な C_0 半群 e^{tB} の生成作用素であり， ξ_k, α_k は制御器， p_k は観測の重みベクトルである．方程式 (1)，(3) をまとめて

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, \quad t > 0, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

と書く． H_1 は無限次元（可算）ではあるが，これから扱う問題に対しては有限次元系におとすことができる．そのときオブザーバはつぎのように書ける：

$$f_k(t) = (y(t), p_k)_{R^S}, \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = Fy + \sum_{k=1}^N (x(t), g_k)_H \xi_k + Gy, \quad y \in R^S.$$

以後，作用素 L はつぎの条件 (A) を満たすと仮定する：

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \text{resolvent } (\lambda - L)^{-1} \text{ は compact であり，角領域} \\ \Sigma = \{ \lambda = \mu - b ; |\arg \mu| \leq \alpha \}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \\ b > 0, \text{ 以外で存在し} \\ \parallel (\lambda - L)^{-1} \parallel_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{\text{const}}{1 + |\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma^c \end{array} \right.$$

なる評価をもつ。

このとき， e^{-tL} は解析半群となる。

オブザーバ (3) の係数作用素 B にはほかにも与え方はあるが [2~4]，ここではつぎのように与える：

H_0 ；可算 Hilbert 空間， A ；稠密な定義域 $\mathcal{D}(A)$ をもつ H_0 の正定値自己共役作用素で，compact resolvent をもつ。したがって， A に対する固有系が存在する。

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_i < \dots \longrightarrow \infty, \\ A \zeta_{ij} = \mu_i \zeta_{ij}, \quad i \geq 1, \quad 1 \leq j \leq n_i (< \infty), \\ \{ \zeta_{ij} \}; \text{ a complete orthonormal system in } H_0. \end{array} \right.$$

$0 < a < 1$ とし, $H_1 = \mathcal{D}(\sqrt{A}) \times H_0$ における作用素

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -A & -2a\sqrt{A} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(\sqrt{A})$$

を考える. 容易にわかるように

$$\sigma(B) = \{ \sqrt{\mu_i} \omega^\pm; i \geq 1 \}, \quad \omega^\pm = -a \pm \sqrt{1-a^2} i,$$

$$B \eta_{ij}^\pm = \sqrt{\mu_i} \omega^\pm \eta_{ij}^\pm, \quad \eta_{ij}^\pm = \frac{1}{2\sqrt{\mu_i}} \begin{bmatrix} \zeta_{ij} \\ \sqrt{\mu_i} \omega^\pm \zeta_{ij} \end{bmatrix}.$$

後に必要となる条件 $\sigma(-L) \cap \sigma(B) = \emptyset$ が成り立つように

a を小さくにとって $\tan^{-1}(\sqrt{1-a^2}/a) > \alpha$ としておく.

μ_i は大きくとっておけばよい. H_1 の各ベクトル h は

$$h = \sum_{i,j} h_{ij}^+ \eta_{ij}^+ + \sum_{i,j} h_{ij}^- \eta_{ij}^-$$

と一意に展開されるが, とくに $h_{ij}^+ = \overline{h_{ij}^-}$ for $\forall i, j$ と

なる h の集合 $\hat{H}$ は実 Hilbert 空間になる. $B;$

$\mathcal{D}(B) \cap \hat{H} \rightarrow \hat{H}$ に注意する. ξ_k, α_k, ρ_k は $\hat{H}$ の

ベクトルとして考える. e^{tB} が解析半群であることから,

作用素 $\mathcal{M}$ は $H \times H_1$ における解析半群 $e^{t\mathcal{M}}$ の生成作用素である.

条件 (A) を満たす作用素 L は具体的にたとえば, 滑らかな境界 Γ をもつ有界連結領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ における 2

階一様楕円形作用素 $\mathcal{L}$ からつくられる場合である。即ち

$$Lu = \mathcal{L}u, \quad u \in \mathcal{D}(L),$$

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu,$$

$$\mathcal{D}(L) = \left\{ u \in H^2(\Omega) ; \frac{\partial u}{\partial \nu_L} + \sigma(\xi)u = 0, \xi \in \Gamma \right\}.$$

この場合, $\sigma(L)$ は実軸の $+\infty$ に漸近する放物線の内部に存在する。つぎの境界制御系

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathcal{L}u, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_L} + \sigma(\xi)u = \sum_{k=1}^M f_k(t) h_k(\xi), \end{array} \right. \quad (1)'$$

$$u(0, x) = u_0(x),$$

$$\text{観測 ; } (u(t, \cdot), w_k)_\Gamma, \quad 1 \leq k \leq N \quad (2)'$$

を考える。 $x(t) = L_c^{-1/4-\varepsilon} u(t, \cdot)$, ($L_c = L + c$, $c >$

b) とおくと, $(1)'$, $(2)'$ はそれぞれ (1), (2) にうつされ

る。ただし, $\psi_k \longrightarrow L_c^{3/4-\varepsilon} \tilde{\psi}_k$, $(x(t), g_k)_H \longrightarrow$

$(L_c^{1/2+2\varepsilon} x(t), L_c^{*3/4-\varepsilon} \tilde{g}_k)$ とおきかえる。 $\tilde{\psi}_k$, $\tilde{g}_k$ は

それぞれ h_k , w_k により一意に定まる $H^2(\Omega)$ の関数で

ある。

条件 (A) が成り立つ系に対してこれまで得られた結果を
制御系 (1)', (2)' を例にとり述べてみよう. $\operatorname{Re} \lambda_i < \beta$
($\beta > 0$) となる $\lambda_i \in \sigma(L)$ を $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ とする. 各
 λ_i に対する L の広義固有空間の次元とその基をそれぞれ
 $m_i, \varphi_{i1}, \dots, \varphi_{im_i}$ とする. P_K を L の固有値 $\{\lambda_1, \dots,$
 $\lambda_K\}$ に対応する射影作用素とし, 不変部分空間 $P_K L^2(\Omega)$
への L の制限を L_1 とする. 作用素 B の固有値 $\{\sqrt{\mu_k} \omega^\pm\}$
については

$$0 < \exists \gamma < 2; \quad \sqrt{\mu_k} \leq \text{const } k^\gamma, \quad k \geq 1 \quad (5)$$

が満たされると仮定する. $\beta > a\sqrt{\mu_1}$ となるように β を
選んでおく. このとき

Theorem 1 [3]. $(-L_1, P_K L_c^{\frac{3}{4}-\varepsilon} \tilde{\varphi}_k)$ が可制御対となる
ように $k_1, \dots, k_M$ が選ばれているとする.

$$\operatorname{rank} W_i = m_i, \quad 1 \leq i \leq K, \quad W_i = \left[(w_k, \varphi_{ij})_{\Gamma}; \begin{matrix} k \downarrow 1, \dots, N \\ j \rightarrow 1, \dots, m_i \end{matrix} \right],$$

$$\operatorname{rank} \Xi_i = N, \quad i \geq 1, \quad \Xi_i = \left[\xi_{ij}^{k+}; \begin{matrix} k \downarrow 1, \dots, N \\ j \rightarrow 1, \dots, n_i \end{matrix} \right] \quad (6)$$

が成り立てば, 適当な $\alpha_k, \rho_k \in \hat{H}$ が存在して

$$\|e^{t\mathcal{M}}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega) \times H_1)} \leq \text{const } e^{-a\sqrt{\mu_1}t}, \quad t \geq 0.$$

さらにこのとき，オブザーバ (3) は有限次元系 (4) におとす
 ことができ，最終的につぎの評価を得る：

$$\left\| \begin{bmatrix} u(t, \cdot) \\ y(t) \end{bmatrix} \right\|_{L^2(\Omega) \times \mathbb{R}^S} \leq \text{const } e^{-a\sqrt{\mu_1} t} \left\| \begin{bmatrix} u_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \right\|_{L^2(\Omega) \times \mathbb{R}^S}, \quad t \geq 0.$$

ここで問題になるのは仮定 (5) であって， γ が小さければ B の固有値間の gap が接近する．即ち $\inf_{\mathbb{R}} (\sqrt{\mu_{k+1}} - \sqrt{\mu_k}) = 0$ であるから，仮定 (6) の後半の部分が容易にこめられる． $\gamma \geq 1$ にとればそれは回避できるが，もっと大きく γ をとれるか？ という疑問がわいてこよう．それはある種のクラスの作用素 L をもつ系に対しては可能である．

$\Omega (\subset \mathbb{R}^n)$ を有界連結領域， $\mathcal{L}$ を Ω における $2m$ 階楕円形作用素とし，係数は必要な滑らかさをもつとする． $\mathcal{L}$ は形式的に自己共役であり， $L^2(\Omega)$ の非有界自己共役作用素 L が存在して

$$Lu = \mathcal{L}u, \quad u \in \mathcal{D}(L),$$

$$C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}(L) \subset H^{2m}(\Omega)$$

(7)

となるものとする．このとき， L は compact resolvent を

もち, $\sigma(L)$ は重複度有限の固有値のみから成る:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots \longrightarrow \infty,$$

$$L \varphi_{ij} = \lambda_i \varphi_{ij}, \quad i \geq 1, \quad 1 \leq j \leq m_i (< \infty),$$

$\{\varphi_{ij}\}$; an orthonormal complete system in $L^2(\Omega)$.

各 $x > 0$ に対して

$$N(x) = \sum_{i \in I_x} m_i, \quad I_x = \{i \in \mathbb{N}; \lambda_i < x\}$$

とおくと, よく知られているように [1]

$$\exists c_0 > 0; \quad N(x) = c_0 x^{\frac{n}{2m}} + o(x^{\frac{n}{2m}}) \quad \text{as } x \longrightarrow \infty \quad (8)$$

が成り立つ. この評価より, 重複度 m_i の分布には無関係に
つぎの関係が成り立つ:

Lemma 2. $k \longrightarrow \infty$ のとき, λ_k は評価

$$\text{const } k^{\frac{2m}{n}} \leq \lambda_k \leq \text{const } c^k$$

を満たす. $c > 1$ は任意に 1 に近くとれる.

我々は $\{\lambda_k\}$ に関するつぎの付加的な情報が利用できる
場合を考察する:

$$\exists c_1 > 0; \quad \lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \text{const } e^{-c_1 k}, \quad k \longrightarrow \infty. \quad (9)$$

(8) を満たす単調増加列 $\{\lambda_k\}$ に対して, (8) からはこの評価は従わないことに注意する. このとき, オブザーバ側の仮定は (5) のかわりに

$$0 < \gamma < \frac{2m}{n} ; \quad \sqrt{\mu_k} \leq \text{const } k^\gamma, \quad k \geq 1 \quad (5)'$$

とする. これは $2m/n > 2$ のときには (5) よりもゆるい仮定, したがって, 作用素 B の固有値間の *gap* が十分大きくとれることを示している. (9), (5)' の仮定のもとでは, つぎの Thm. 1 の一般化を得ることができる.

Theorem 3. つぎの代数的条件が成り立つとする:

$$\text{rank } \Psi_i = \text{rank } G_i = m_i, \quad 1 \leq i \leq K,$$

$$\text{rank } \Xi_i = N, \quad i \geq 1,$$

ただし,

$$\Psi_i = \left[(\psi_k, p_{ij}); \begin{matrix} k \rightarrow 1, \dots, M \\ j \downarrow 1, \dots, m_i \end{matrix} \right], \quad G_i = \left[(g_k, p_{ij}); \begin{matrix} k \rightarrow 1, \dots, N \\ j \downarrow 1, \dots, m_i \end{matrix} \right].$$

このとき, 適当な $\alpha_k, p_k \in \hat{H}$ が存在して

$$\|e^{t\mathcal{M}}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega) \times H_1)} \leq \text{const } e^{-a\sqrt{\mu_1}t}, \quad t \geq 0.$$

Thm. 1 と同様にして, オブザーバ (3) は (4) におとすことができる. (1), (4) をまとめて

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

と書くことにすれば, 評価

$$\|e^{tN}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega) \times \mathbb{R}^S)} \leq \text{const } e^{-a\sqrt{\mu_1}t}, \quad t \geq 0$$

を得る. N は compact resolvent をもつことが示される. 上の評価式より $\sigma(N) \subset \{\lambda; \operatorname{Re} \lambda \leq -a\sqrt{\mu_1}\}$ であるが, さらにつぎの結果が成り立つ:

Lemma 4. 作用素 N の固有値が直線 $\operatorname{Re} \lambda = -a\sqrt{\mu_1}$ 上にあったとしても, その点における $(\lambda - N)^{-1}$ の極は 1 位である.

この Lemma により容易につぎの結果を得る:

Proposition 5. 各整数 $k \geq 1$ に対して, 評価

$$\|N^k e^{tN}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega) \times \mathbb{R}^S)} \leq \text{const } \max(t^{-k}, 1) e^{-a\sqrt{\mu_1}t}, \quad t > 0$$

が成り立つ.

Prop. 5 を $k=1$ のときに用いると, つぎの結果が成り立つことがわかる:

Corollary 6. Thm. 3 の仮定のもとでは

$$\|x(t)\|_{\mathcal{D}(L)} \leq \text{const } e^{-a\sqrt{\mu_1}t} (\|x_0\| + \|y_0\|), \quad t \geq 1$$

が成り立つ。

追記. 筆者は最近になって、つぎのようなより強い結果を得た：

Thm. 3 を得るためには，作用素 L の固有値間の *gap* に対する仮定 (9) は取り除くことができる．さらに，オブザーバ側の仮定 (5)' において， γ は任意の正数でよい．

この主張により，安定化に際して作用素 L の固有値に関する完全な情報を得る必要はなくなり，また，オブザーバ側に対する制約が大巾にゆるめられたことになる．

References

1. S. Agmon, "Lectures on Elliptic Boundary Value Problems," Van Nostrand, Princeton, N. J., 1965.
2. T. Nambu, On the stabilization of diffusion equations: Boundary observation and feedback, J. Differential Equations 52(1984), to appear.
3. T. Nambu, On stabilization of partial differential equations of parabolic type: Boundary observations and feedback, submitted.
4. Y. Sakawa, Feedback stabilization of linear diffusion systems, SIAM J. Control & Optimization 21(1983), 667-676.
5. R. F. Curtain, Finite dimensional compensators for parabolic distributed systems with unbounded control and observations, to appear in SIAM J. Control & Optimization.

January 23-26, 1984, in "Mathematical Theory of Control and Systems" at Kyoto University