

マルチフラクタル確率密度関数理論による乱流 PDF の解析

N. Arimitsu* (有光直子)

Graduate School of EIS, Yokohama National University (横浜国大 環情)

T. Arimitsu† (有光敏彦)

Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba (筑波大 数理)

概要

発達した乱流では、エネルギー散逸率や速度差などの PDF に裾を引くことが知られている。その裾野部分には、乱流の間欠性に起因する「乱流のコヒーレントな運動」が反映する。中心部分は、このコヒーレントな運動に纏わり付く、「乱流に特有な揺らぎ」の情報が含まれている。マルチフラクタル密度関数理論 (MPDFT) では、裾引き PDF を解析する理論表式が導出され、これにより、上記の情報を高精度で抽出することが可能となった。乱流の間欠性は、Navier-Stokes 方程式が有するスケール不変性に基づく自己相似性の顕れである。その特性を抽出するためには、スケールを変えた一連の PDF の情報が必要である。一連のスケールは観測者が指定する拡大率 $\delta (> 1)$ で与えられるものであり、 δ の値が、乱流系の観測量に影響を与えてはならない。この要請から、乱流の新しい解釈への可能性が見えてきた。この論文では、乱流風洞実験 (毛利ら) や 4096^3 乱流 DNS (金田, 石原ら) で得られた一連の PDF を、MPDFT で導出した PDF により高精度で解析する。その解析で抽出された情報と共に、拡大率 δ 非依存性の検証を報告する。

1 はじめに

発達乱流のマルチフラクタル的側面について記した論文 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16] のうち、その多く [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11] は、系のスケーリングの性質、つまり速度構造関数のスケーリング指数の比較を扱ったものである。間欠性を表わす物理量に対する確率密度関数 (PDF) を扱う論文は数例のみである [8, 12, 13, 14, 15, 16]。PDF を解析した研究のうち、マルチフラクタル確率密度関数理論 (MPDFT) [12, 13, 14, 17, 18, 19] は、裾引き PDF を高精度で解析する。MPDFT は、間欠的な性質を持つ系を扱う実験や数値実験から抽出された裾引き PDF の呈する間欠現象を解析するために、著者らにより定式化された統計力学的アンサンブル理論である。

充分発達した乱流の間欠的特性を抽出するためには、系の階層構造に関する情報を得る必要がある。そのためには、長さ ℓ_n を変えて特異性を示す物理量に対する一連の PDF 列を作ることが必要である。長さ

$$\ell_n = \ell_0 \delta^{-n}, \quad \delta > 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

は、渦のサイズあるいはその中で物理量が粗視化される領域の大きさを特徴づける長さである。拡大率 δ の値は、観測者が自由に指定できる値なので、 δ の値の選び方が乱流系の物理量に影響を与えてはならない。その要請から、MPDFT の枠組みの中で A&A モデル自身がスケーリング関係式

$$\frac{\ln 2}{(1-q) \ln \delta} = \frac{1}{\alpha_-} - \frac{1}{\alpha_+} \quad (2)$$

*arimitsu@ynu.ac.jp

†arimitsu.toshi.ft@u.tsukuba.ac.jp

を与える [17, 18]。ここで、 q は Rényi エントロピー [20] あるいは Havrda-Charvat [21] ならびに Tsallis [22] (HCT) エントロピーに付随する指数であり、 $\alpha_{\pm}$ はマルチフラクタルスペクトルを零とする値である (第 2.1 節参照)。マルチフラクタル・スペクトルは、 α に対する PDF に関係付けられる。新しいスケーリング関係式 (2) を用いると、物理量は $(1-q) \ln \delta$ という組合わせの形でのみ δ に依存することになる。拡大率 δ の違いは、エントロピー指数 q に吸収される。¹

本論文では、毛利ら [25] による大型風洞実験で得られた発達乱流による速度時系列データから抽出したエネルギー散逸率の PDF と金田・石原 [26] による発達乱流の 4096³ DNS から得られたエネルギー散逸率 PDF を MPDFT を用いて解析をする。

第 2 節では、MPDFT の枠組みにおける定式化を行い A&A モデルの簡単な説明をする。第 3 節では、実験並びに数値実験で得られたエネルギー散逸率 PDF を、MPDFT で理論的に導出した PDF により高精度で解析し、拡大率 δ 任意の要請の正当性を検証する。まとめと考察を第 4 節で述べる。

2 MPDFT の枠組み

ここでは、MPDFT の枠組みの簡潔な解説と今回の解析に必要な表式を書き下しておく。詳細については、論文 [17, 18] とその参考文献を参照されたい。

2.1 特異性指数と A&A モデル

MPDFT は、Frisch-Parisi [2] に倣い、『非圧縮流体 ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$) における Navier-Stokes (N-S) 方程式

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (3)$$

が高レイノルズ数領域で持つスケール不変性に起因する特異性は、実空間にマルチフラクタルに分布している』との仮説に基づいた、裾引き PDF に含まれる現象を解析する統計力学的アンサンブル理論である。ただし、 $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ は速度場を表わす。また、 $p = \hat{p}/\rho$ ($\hat{p} = \hat{p}(\vec{x}, t)$ は流体の圧力) と動粘性係数 $\nu = \hat{\eta}/\rho$ ($\hat{\eta}$ は粘性) を導入した。なお、非圧縮流体では流体の質量密度 $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ は一定である。N-S 方程式 (3) は、スケール変換

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \lambda \vec{x}, \quad \vec{u} \rightarrow \vec{u}' = \lambda^{\alpha/3} \vec{u}, \quad t \rightarrow t' = \lambda^{1-\alpha/3} t, \quad p \rightarrow p' = \lambda^{2\alpha/3} p, \quad (4)$$

$$\nu \rightarrow \nu' = \lambda^{1+\alpha/3} \nu \quad (5)$$

に対して不変である。ただし、 α は任意の実数である。発達乱流の研究では、N-S 方程式で散逸項が非線形対流項に比較して小さいという極限 (高レイノルズ数の極限) で出現するコヒーレントな乱流状態を探る必要がある。ところで、実際の乱流系では ν は扱う乱流系毎に特有な値をとるので、動粘性係数に対して (5) のスケール変換を使うことはできない。 ν に依存する散逸項は、スケール変換 (4) の下での不変性を破る項として解釈する。実際の発達乱流の解析では、不変性を破る項が零ではない (以下の議論参照) ので、考える領域によっては散逸項の影響が無視できないことを忘れてはならない。非線形対流項に比べて散逸項が顕著となり不変性が破れる領域が、発達乱流中のあちこちに局在して現れる。その局在領域の存在が、乱流のコヒーレント運動のまわりに特有な揺らぎの源であると考えられる。

ここで、無次元化された速度勾配

$$u'_n = \left(\frac{\delta u_n}{\ell_n} \right) \left(\frac{\delta u_0}{\ell_0} \right)^{-1} \quad (6)$$

¹従来の PDF のほとんどは、 $\delta = 2$ で観測されたものであったので、Costa, Lyra, Plastino and Tsallis [23, 24] が力学系の考察の中で提唱したスケーリング関係式 $1/(1-q) = 1/\alpha_- - 1/\alpha_+$ を用いて PDF の解析 [12, 13, 14] が可能であった。

を導入する。 ℓ_n は特徴的な長さに相当する。物理量 $\delta u_n = |u(\bullet + \ell_n) - u(\bullet)|$ は、(1) で定義されるように、距離 ℓ_n だけ離れた 2 点間の速度場の u 成分の速度差 (揺らぎ) を表す。記号 $\bullet$ は、任意の空間点を表している。スケール変換 (4) から $\delta u_n / \delta u_0 = (\ell_n / \ell_0)^{\alpha/3}$ が得られるので、(6) は、

$$u'_n = \left(\frac{\ell_n}{\ell_0} \right)^{(\alpha/3)-1} \quad (7)$$

になる。このことは、 $|u'| = \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n$ で定義され、無次元化された速度勾配 u' に $\alpha < 3$ で特異性が現れることを示している。すなわち、 $|u'| \propto \lim_{\ell_n \rightarrow 0} \ell_n^{(\alpha/3)-1} \rightarrow \infty$ である。

直径 ℓ_n の領域で平均されたエネルギー散逸率 ε_n は、

$$\varepsilon_n \sim \nu_n (u'_n)^2 \quad (8)$$

で与えられる。ここで ν_n は、考えているスケールでの粘性係数に相当する。本来のエネルギー散逸率は $\ell_n \lesssim \eta$ の領域でのみ存在する (η は Kolmogorov 長)。 $\ell_n > \eta$ における有効エネルギー散逸率 ε_n の解釈として乱流粘性の概念を借用する。乱流粘性係数の導入により、スケール変換 (5) が要請され、 $\nu_n / \nu_0 = (\ell_n / \ell_0)^{1+\alpha/3}$ を得る。そのため、(8) より無次元化されたエネルギー散逸率のスケールリングの性質

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon} = \left(\frac{\ell_n}{\ell_0} \right)^{\alpha-1} \quad (9)$$

が得られる。ただし、乱流系へのエネルギー流入率 $\varepsilon_0 = \varepsilon$ は、一定の値であると仮定した。(9) よりエネルギー散逸率には、 $\alpha < 1$ で特異性が現れることが分かる。すなわち、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n^{\alpha-1} \rightarrow \infty$ である。

指数 α は、これら間欠性を呈する物理量の特異性の程度を表す指標である。この α は、スケール変換 ((4), (5) 参照) に現れた任意の実数 α と同じものである [2]。以下、 α を確率変数と仮定する。領域 $\alpha \sim \alpha + d\alpha$ の中に α を見出す確率 $P^{(n)}(\alpha)d\alpha$ は、

$$P^{(n)}(\alpha)d\alpha \propto \left(\frac{\ell_n}{\ell_0} \right)^{1-f(\alpha)} d\alpha \quad (10)$$

で与えられる [5, 12, 13, 14, 17, 18]。MPDFT [10, 11, 12, 13, 14, 17, 18] の枠組みの中で A&A モデルでは裾引き PDF の持つ性質を記述するのに適切と思われる Rényi [20] エントロピーあるいは HCT [21, 22] エントロピーの極値を与える PDF:

$$P^{(n)}(\alpha) \propto \left[1 - \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{(\Delta\alpha)^2} \right]^{n/(1-q)} \quad (11)$$

を採用する。ただし、

$$\Delta\alpha = \sqrt{\frac{2X}{(1-q)\ln\delta}} \quad (12)$$

である。 α の定義域は、 $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ で、 $\alpha_{\min}$ と $\alpha_{\max}$ は $\alpha_{\min/\max} = \alpha_0 \mp \Delta\alpha$ で与えられる。 q はエントロピー指数である。

(10) と (11) を比較すると、 $n \gg 1$ に対して、マルチフラクタルスペクトル

$$f(\alpha) = 1 + \frac{1}{(1-q)\ln\delta} \ln \left[1 - \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{(\Delta\alpha)^2} \right] \quad (13)$$

が得られる。質量指数は

$$\begin{aligned} \tau(\bar{q}) = & 1 - \alpha_0 \bar{q} + \frac{2X\bar{q}^2}{1 + \sqrt{C_{\bar{q}}}} \\ & + \frac{\ln 2}{(1-q)\ln \delta} \left[1 - \log_2 \left(1 + \sqrt{C_{\bar{q}}} \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ただし、

$$C_{\bar{q}} = 1 + 2\bar{q}^2 X (1-q) \ln \delta \quad (15)$$

である。マルチフラクタルスペクトル $f(\alpha)$ と質量指数 $\tau(\bar{q})$ は、互いに Legendre 変換 [4, 5]

$$f(\alpha) = \alpha \bar{q} + \tau(\bar{q}), \quad \bar{q} = \frac{df(\alpha)}{d\alpha}, \quad \alpha = -\frac{d\tau(\bar{q})}{d\bar{q}} \quad (16)$$

で関連している。エネルギー散逸率の $\bar{q}$ 次モーメント [5, 17, 18] は、

$$\left\langle \left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon} \right)^{\bar{q}} \right\rangle \propto \left(\frac{\ell_n}{\ell_0} \right)^{-\tau(\bar{q})+1-\bar{q}} \quad (17)$$

で与えられる。ただし、平均 $\langle \dots \rangle$ は、 $P^{(n)}(\alpha)$ でとったものである。一般化次元 $D(\bar{q})$ は、関係式 $D(\bar{q}) = \tau(\bar{q})/(1-\bar{q})$ で導入される。

$P^{(n)}(\alpha)$ に現れる 3 つのパラメータ α_0 , X , q は、エネルギー保存則 $\langle \varepsilon_n \rangle = \varepsilon$ ($\tau(1) = 0$)、間欠性指数 μ の定義 $\langle (\varepsilon_n/\varepsilon)^2 \rangle = (\ell_n/\ell_0)^{-\mu}$ ($\mu = \tau(2) + 1$)、スケーリング関係式 (2) の 3 つの条件により間欠性指数 μ の関数として決定される。ただし、 $\alpha_{\pm}$ は、 $f(\alpha_{\pm}) = 0$ を満たす。それらは、

$$\alpha_{\pm} = \alpha_0 \pm \sqrt{2bX}, \quad b = \frac{1 - e^{-(1-q)\ln \delta}}{(1-q)\ln \delta} \quad (18)$$

で与えられる。新しいスケーリング関係式 (2) は、Tsallis らによって導入された関係式 [23, 24] の一般化となっている。新しいスケーリング関係式 (2) は、 $\delta = 2$ のときに Tsallis らのスケーリング関係式と一致する。この一般化は、すでに述べたように、MPDFT の A&A モデル自身が要請するものである。スケーリング関係式 (2) を解くと

$$\sqrt{2bX} = -(1-q)\log_2 \delta + \sqrt{\alpha_0^2 + [(1-q)\log_2 \delta]^2} \quad (19)$$

が得られる。パラメータ q は、 α_0 や X とともに、 $(1-q)\ln \delta$ の組み合わせで μ の関数として決まる。このことは、『観測者が、拡大率 δ の値を任意に決めることができるので、同一の乱流系を扱う限りその δ の値は物理量の値に影響を与えてはならない』という要請と整合性を持つものである。 δ の値の違いは、エントロピー指数 q に吸収されるのである。拡大率 δ の違いは、エントロピー S_q の違いとして認識されるべきものであろう。

新しいスケーリング関係式を用いると、パラメータ q は $(1-q)\ln \delta$ の組み合わせでのみ現れることが分かったので、(11) の $P^{(n)}(\alpha)$ にある n を $\tilde{n} = n \ln \delta$ と置き換えてみる。すると、

$$P^{(n)}(\alpha) \propto \left[1 - \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{(\Delta\alpha)^2} \right]^{\tilde{n}/(1-q)\ln \delta} \quad (20)$$

となる。もし、 $\tilde{n}$ が δ に依存しないと仮定するならば、 α の分布関数も δ に依らないことになる。したがって、MPDFT の枠の中での A&A モデルは、 α に対する PDF、ひいては物理量に対する PDF に対して、拡大率 δ の採り方が影響を与えないモデルとなるのである (次節参照)。新しい量 $\tilde{n}$ を用いると、(1) で定義される ℓ_n は、 $\ell_n = \ell_0 e^{-\tilde{n}}$ と書かれる。この $\tilde{n}$ が、エネルギー・カスケード・モデルにおけるステップ数と考えられるべきものであろう。

2.2 MPDFT の枠組みにおける PDF

この小節では、裾引き PDF に対する理論的表式を導出する。MPDFT において、裾引き PDF には2つの部分からの寄与（乱流のコヒーレント運動に由来するコヒーレントな寄与とスケール変換 (4) の下での不変性を破る N-S 方程式の散逸項に起因するインコヒーレントな寄与）があると仮定する。また、裾引き PDF は2つの部分（裾野部分と中心部分）に分けることも仮定される。裾野部分は系の間欠性の現れであるので、インコヒーレントな寄与よりもコヒーレントな寄与の方が顕著である。他方、中心部分は、コヒーレントな部分とインコヒーレントな部分の両方で構成されている。この考えから、PDF の理論的表式を導出する際に、裾野部分へのインコヒーレントな寄与を無視することにする。裾野部分へのコヒーレントな寄与は、前節で述べたように α に対する PDF によってのみ決まると仮定する。これらの仮定の下に、中心部分におけるコヒーレントな部分とインコヒーレントな部分とを分けることができるのである。

間欠的特異性を記述する物理量を

$$|x'| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x'_n|, \quad |x'_n| = \left(\frac{\delta x_n}{\ell_n} \right) \left(\frac{\delta x_0}{\ell_0} \right)^{-1} \quad (21)$$

として、PDF の表式の導出をする。物理量 $\delta x_n = |x(\bullet + \ell_n) - x(\bullet)|$ は、物理量 x の揺らぎであり、 α と

$$|x_n| = \frac{\delta x_n}{\delta x_0} = \left(\frac{\ell_n}{\ell_0} \right)^{\phi\alpha/3} \quad (22)$$

で関連していると仮定する。つまり、 $|x'_n| = |x_n|(\ell_n/\ell_0)^{-1} = (\ell_n/\ell_0)^{(\phi\alpha/3)-1}$ なので、 $|x'|$ は、 $\alpha < 3/\phi$ で発散する。ただし、 x'_n は $\phi = 1$ では速度勾配 (7) になり、 $\phi = 2$ では粒子加速度になり、 $\phi = 3$ ではエネルギー散逸率 (9) となる。物理量 x'_n を $x'_n \sim x'_n + dx'_n$ の範囲に見出す確率 $\Pi'_\phi(x'_n)dx'_n$ は、物理量 x_n を $x_n \sim x_n + dx_n$ の範囲に見出す確率 $\Pi_\phi^{(n)}(x_n)dx_n$ と

$$\Pi'_\phi(x'_n)dx'_n = \Pi_\phi^{(n)}(x_n)dx_n \quad (23)$$

で関連しているものとする。

この PDF は、

$$\kappa \int_0^\infty dx_n \Pi_\phi^{(n)}(x_n) = 1 \quad (24)$$

で規格化される。ただし、変数が非負領域（簡単のため $[0, \infty)$ と記述）でのみ値を持つ場合 $\kappa = 1$ をとる。例えば、本論文で扱うエネルギー散逸率は領域 $[0, \infty)$ の物理量である。

分布関数 $\Pi_\phi^{(n)}(x_n)dx_n$ が、一般的に

$$\Pi_\phi^{(n)}(x_n)dx_n = \Pi_{\phi,S}^{(n)}(x_n)dx_n + \Delta\Pi_\phi^{(n)}(x_n)dx_n \quad (25)$$

のように2つの部分に分けられると仮定する。ただし、第1項は、物理量の異常部分（特異点の実空間にマルチフラクタル分布していることに起因する異常）からの寄与を記述している。これは、 $\nu \rightarrow 0$ の極限 ($\nu \neq 0$) に出現する、コヒーレントな乱流運動を表している部分である。ここで、コヒーレントな寄与が $|x_n|$ と α の間の変数変換 (22) を通じて

$$\Pi_{\phi,S}^{(n)}(|x_n|)d|x_n| = \bar{\Pi}_{\phi,S}^{(n)}P^{(n)}(\alpha)d\alpha \quad (26)$$

で与えられるとする [12]。他方、(25) の第2項 $\Delta\Pi_\phi^{(n)}(x_n)dx_n$ は、N-S 方程式の散逸項によるインコヒーレントな寄与を記述している。散逸項は、スケール変換 (4) の下の不変性を破るので、前小節での $P^{(n)}(\alpha)$

の考察ではインコヒーレントな寄与は無視されていた（有限な散逸項の影響は $\Pi_{\phi,S}^{(n)}(x_n)$ には含まれていない）。各項は、2つのPDF、1) 2つ独立な起源（コヒーレントあるいはインコヒーレントな起源）の内の、どちらからの寄与であるのかを決めるPDFと、2) $x_n \sim x_n + dx_n$ の範囲に物理量 x_n を見出す条件付PDF、の積となっている。

観測で得られたPDFと比較するために、標準偏差 $\langle x_n^2 \rangle_c = \langle x_n^2 \rangle - \langle x_n \rangle^2$ でスケールした新たな変数

$$\xi_n = \frac{x_n}{\langle x_n^2 \rangle_c^{1/2}} \quad (27)$$

で書かれたPDF $\hat{\Pi}_{\phi}^{(n)}(\xi_n)$ を

$$\hat{\Pi}_{\phi}^{(n)}(\xi_n) d\xi_n = \Pi_{\phi}^{(n)}(x_n) dx_n \quad (28)$$

により導入する。 $\langle \dots \rangle$ は、 $\Pi_{\phi}^{(n)}(x_n)$ による平均値を意味する。規格化した変数 ξ_n は、 α と

$$\xi_n = \bar{\xi}_n \left(\frac{\ell_n}{\ell_0} \right)^{(\phi\alpha/3) - \zeta_{2\phi}/2} \quad (29)$$

の関係にある。ただし、

$$\zeta_{\phi m} = 1 - \tau \left(\frac{\phi m}{3} \right), \quad (30)$$

$$\bar{\xi}_n = \left[\left\{ \kappa \gamma_{\phi,2}^{(n)} - \delta_{1,\kappa} \left[\gamma_{\phi,1}^{(n)} + (1 - \gamma_{\phi,0}^{(n)}) a_{\phi} \left(\frac{\ell_n}{\ell_0} \right)^{\zeta_{\phi}} \right]^2 \right\} \left(\frac{\ell_n}{\ell_0} \right)^{-\zeta_{2\phi}} + (1 - \kappa \gamma_{\phi,0}^{(n)}) a_{2\phi} \right]^{-1/2} \quad (31)$$

であり、また、

$$\gamma_{\phi,m}^{(n)} = \int_0^{\infty} dx_n (x_n)^m \Delta \Pi_{\phi}^{(n)}(x_n), \quad (32)$$

$$a_{m\phi} = \sqrt{\frac{|f''(\alpha_0)|}{|f''(\alpha_{\phi m/3})|}} \quad (33)$$

である。乱流のコヒーレントな運動を表している変数 $|x_n|$ の値は、特異性に関わる大偏差を記述する。インコヒーレントな部分に寄与する変数 $|x_n|$ の値は、自分自身の標準偏差程度の値と比べて小さい。なお、 $\zeta_{\phi m}$ はマルチフラクタル深度 n には依存しないが、これはN-S方程式の散逸項を無視した極限における変換(4)の下での不変性の現れである。

まれに起きる間欠的な事象の起源は(25)の第1項（特異項）にあり、第2項 $\Delta \Pi_{\phi}^{(n)}(x_n)$ からの寄与は無視できるとするのは、妥当であろう。そこで、 $\xi_n^* \leq |\xi_n| \leq \xi_n^{\max}$ ($\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha^*$ と等価)を満たす大きな揺らぎ（PDFの裾野部分 $\hat{\Pi}_{\phi,tl}^{(n)}(\xi_n)$ ）に対しては、(25)の第2項（補正項）からの寄与は完全に無視できると仮定する。ただし、

$$\xi_n^{\max} = \bar{\xi}_n \left(\frac{\ell_n}{\ell_0} \right)^{(\phi\alpha_{\min}/3) - \zeta_{2\phi}/2} \quad (34)$$

である。この仮定の下で、

$$\hat{\Pi}_{\phi,tl}^{(n)}(\xi_n) d\xi_n = \Pi_{\phi,S}^{(n)}(x_n) dx_n \quad (35)$$

と置く。(10)と(26)を(35)に代入すると、

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{\phi,tl}^{(n)}(\xi_n) &= \bar{\Pi}_{\phi}^{(n)} \left(\frac{\ell_n}{\ell_0} \right)^{(\zeta_{2\phi}/2) - (\phi\alpha/3) + 1 - f(\alpha)} \\ &= \bar{\Pi}_{\phi}^{(n)} \left(\frac{\ell_n}{\ell_0} \right)^{1 - f(\alpha)} \frac{\bar{\xi}_n}{\xi_n} \end{aligned} \quad (36)$$

が得られる。ただし、

$$\bar{\Pi}_{\phi}^{(n)} = \bar{\Pi}_{\phi,S}^{(n)} \frac{3}{\phi \bar{\xi}_n} \sqrt{\frac{|f''(\alpha_0)|}{2\pi |\ln(\ell_n/\ell_0)|}}, \quad \bar{\Pi}_{\phi,S}^{(n)} = (1 - \kappa \gamma_{\phi,0}^{(n)})/\kappa \quad (37)$$

である。この裾野部分は、大きな揺らぎを記述している。この大きな揺らぎは、スケール不変性（N-S 方程式の散逸項が無視できるほど小さい場合に成立する不変性）に起因する特異性がマルチフラクタル分布していることの現れである。

領域 $|\xi_n| \leq \xi_n^*$ ($\alpha^* \leq \alpha$ と同等) では、確率

$$\hat{\Pi}_{\phi,cr}^{(n)}(\xi_n) d\xi_n = [\Pi_{\phi,S}^{(n)}(x_n) + \Delta\Pi_{\phi}^{(n)}(x_n)] dx_n \quad (38)$$

に対して試行関数

$$\hat{\Pi}_{\phi,cr}^{(n)}(\xi_n) d\xi_n = \bar{\Pi}_{\phi}^{(n)} e^{-[g_{\phi}(\xi_n) - g_{\phi}(\xi_n^*)]} \left(\frac{\ell_n}{\ell_0}\right)^{1-f(\alpha^*)} \frac{\bar{\xi}_n}{\xi_n^*} d\xi_n \quad (39)$$

を置くことにする。ただし、 $g_{\phi}(\xi_n)$ は実関数である。この中心部分 $\hat{\Pi}_{\phi,cr}^{(n)}(\xi_n)$ には、コヒーレントな運動とインコヒーレントな運動の両方からの寄与が含まれている。中心部分領域 $|\xi_n| \leq \xi_n^*$ の関数 $\hat{\Pi}_{\phi}^{(n)}(\xi_n)$ を与える理論が未だないので、ここでは試行関数 $g_{\phi}(\xi_n)$ を導入して解析する。

2つのPDF $\hat{\Pi}_{\phi,tl}^{(n)}(\xi_n)$ と $\hat{\Pi}_{\phi,cr}^{(n)}(\xi_n)$ は、

$$\xi_n^* = \bar{\xi}_n \left(\frac{\ell_n}{\ell_0}\right)^{(\phi\alpha^*/3) - \zeta_{2\phi}/2} \quad (40)$$

で関数値 ($\hat{\Pi}_{\phi,tl}^{(n)}(\xi_n^*) = \hat{\Pi}_{\phi,cr}^{(n)}(\xi_n^*)$) と対数導関数 ($d/d\xi_n \ln \hat{\Pi}_{\phi,tl}^{(n)}(\xi_n)|_{\xi_n=\xi_n^*} = d/d\xi_n \ln \hat{\Pi}_{\phi,cr}^{(n)}(\xi_n)|_{\xi_n=\xi_n^*}$) が一致するように接続する。 α^* の値 (すなわち ξ_n^* の値 ((40) 参照)) は、実験あるいは数値実験で得られたPDFを解析する際に、フィッティングにより決める。

領域 $\xi_n^* \leq \xi_n \leq \xi_n^{\max}$ で、 $\Delta\Pi_{\phi}^{(n)}(x_n)$ からの寄与を無視できるとした仮定 (35) のおかげで、 $\gamma_{\phi,m}^{(n)}$ の表式が

$$\begin{aligned} \kappa \gamma_{\phi,m}^{(n)} &= \kappa \int_0^{x_n^*} dx_n (x_n)^m \Delta\Pi_{\phi}^{(n)}(x_n) \\ &= \frac{K_{\phi,m}^{(n)} - L_{\phi,m}^{(n)}}{1 + K_{\phi,0}^{(n)} - L_{\phi,0}^{(n)}} \end{aligned} \quad (41)$$

と書き下せる。ただし、 $x_n^* = \langle x_n^2 \rangle_c \xi_n^*$ であり、

$$K_{\phi,m}^{(n)} = \frac{3}{\phi} \left(\frac{\ell_n}{\ell_0}\right)^{1-f(\alpha^*)+m\phi\alpha^*/3} \sqrt{\frac{|f''(\alpha_0)|}{2\pi |\ln(\ell_n/\ell_0)|}} \int_0^1 dz z^m e^{-[g_{\phi}(\xi_n^* z) - g_{\phi}(\xi_n^*)]}, \quad (42)$$

$$L_{\phi,m}^{(n)} = \left(\frac{\ell_n}{\ell_0}\right) \sqrt{\frac{|f''(\alpha_0)| |\ln(\ell_n/\ell_0)|}{2\pi}} \int_{\alpha^*}^{\alpha_{\max}} d\alpha \left(\frac{\ell_n}{\ell_0}\right)^{m\phi/3-f(\alpha)} \quad (43)$$

である。

表 1: 風洞実験における乱流の基本量

	値
Kolmogorov 長 η	0.0138 cm
縦速度相関長	17.9 cm
データ点数	4×10^8
慣性領域	$50 < r/\eta < 150$
格子の中心間隔	20 cm

3 エネルギー散逸率 PDF の解析

エネルギー散逸率 PDF の理論的表式は 2.2 節で導出した PDF の表式において $\phi = 3$, $\kappa = 1$ として与えられる。中心部分の PDF $\hat{\Pi}_{\phi,cr}^{(n)}(\xi_n)$ ((39) 参照) に, Tsallis 型の試行関数

$$e^{-g_3(\xi_n)} = \left(\frac{\xi_n}{\xi_n^*} \right)^{\theta-1} \left\{ 1 - (1-q') \frac{\theta + f'(\alpha^*)}{w_3} \left[\left(\frac{\xi_n}{\xi_n^*} \right)^{w_3} - 1 \right] \right\}^{1/(1-q')} \quad (44)$$

を採用する。これには 3 つのパラメータ w_3 , q' , θ が含まれている。最初のパラメータ w_3 は実験あるいは数値実験の PDF のピーク近傍の性質から決められる。2 番目のパラメータ q' は, (11) にあらわれるエントロピー指数 q とは異なるものである。3 番目のパラメータ θ は, $\xi_n = 0$ 近傍の PDF の性質により決められる。エネルギー散逸率で ξ_n の領域は, $[0, \infty)$ である。以下, 『MPDFT の枠組みの中では, 新しいスケーリング関係式 (2) により, 拡大率 δ が観測値に影響を与えない』ことを調べるために, 実験ならびに数値実験 (DNS) で得られたエネルギー散逸率 PDF を解析する。

3.1 実験による PDF の解析

ここでは, 乱流風洞実験によって得られたエネルギー散逸率 PDF を解析する [19]。この PDF は, 実験で得られた速度場成分の時系列データから抽出したものである。

この時系列データは, 毛利ら [25] による大型風洞実験から得られた。風洞の上流に格子が設置され, 乱流が生成される。測定には所定位置に置いた熱線流速計が用いられ, 流速計位置での流速場の縦速度成分 (流れ方向成分) と横速度成分 (流れ方向に直交した二次元平面への流速ベクトルの射影) が同時に取得された。時間変数を空間変数に変換するにはテイラーの凍結仮説を用いた。乱流風洞実験における基本量 [25] を表 1 に載せた。

実験のエネルギー散逸率 PDF は 4×10^8 個の時系列データ点を, ξ_n に沿った幅 10^{-3} のビンに分け入れて作成した。また, 作成された PDF を図示する際に, すべてのビンのデータを描いたのではなく, 見やすさを考慮して 5×10^2 個置き of ビンを選んでそのデータを描いた。また, ビンに投入されたデータ点の平均個数の 2.5×10^{-3} % より少ないデータ個数のビンは除外した。たとえば, $\delta = 2$ の PDF の場合, 平均化領域の直径が $r/\eta = 6.57$ と $r/\eta = 394$ ではそれぞれデータ個数が 10 個と 16 個以下のビンを除外した。

拡大率 $\delta = 2$, $\delta = 3$, $\delta = 5$ に対して解析したエネルギー散逸率 PDF をそれぞれ図 1, 図 2, 図 3 に示す。(a) では縦軸を対数目盛でとり, PDF の裾野部分を見易くしてある。(b) では縦軸を線形目盛でとり, PDF も中心部分を見易くした。一連の PDF は上から順に r が δ 倍ずつ長くなっている。図見易くするために, 各 PDF をずらして表示した。図中の白丸が実験の PDF であり, 実線が 2.2 節の手法で算出した理論 PDF である。

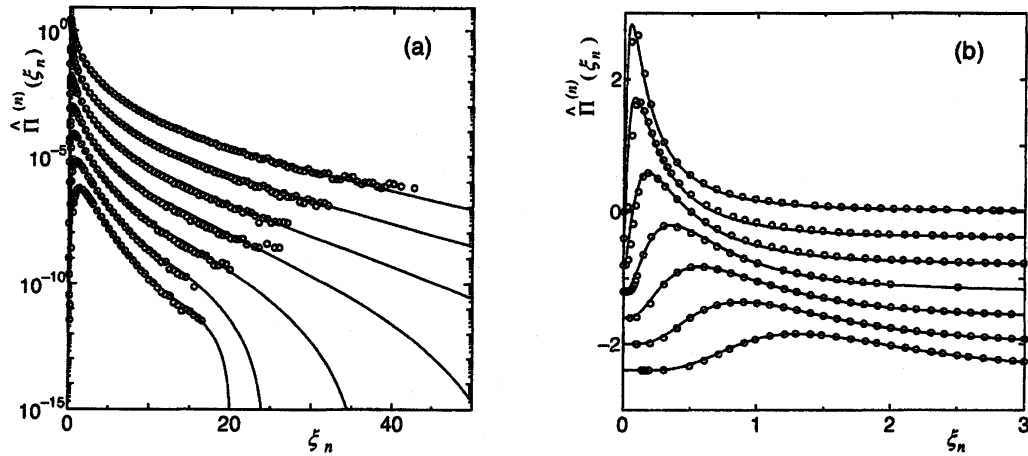


図 1: 拡大率 $\delta = 2$ の一連のエネルギー散逸率 PDF (縦軸: (a) 対数スケール, (b) 線形スケール)。白丸が実験の PDF (上から順に, $r/\eta = 6.57, 13.1, 26.3, 50.4, 98.6, 197, 394$), 実線が理論の PDF ($\mu = 0.260$, $(1-q)\ln\delta = 0.393$, $\alpha_0 = 1.15$, $X = 0.310$) である。この場合, エントロピー指数は $q = 0.433$ となる。他のパラメータの値は, 表 Table 2 参照のこと。なお, 見易くするために, 各 PDF を下方に (a) 1, (b) 0.4 ずつずらした。

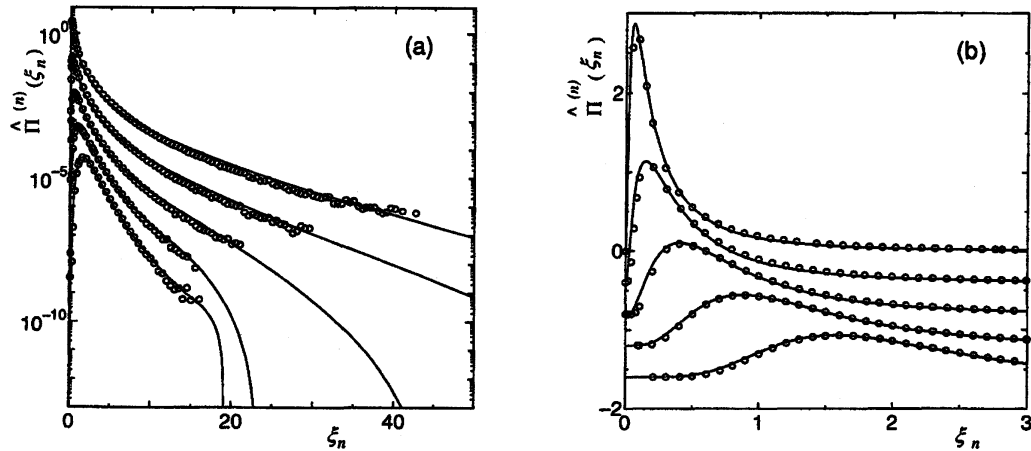


図 2: 拡大率 $\delta = 3$ の一連のエネルギー散逸率 PDF (縦軸: (a) 対数スケール, (b) 線形スケール)。白丸が実験の PDF (上から順に, $r/\eta = 6.57, 21.9, 65.7, 197, 591$), 実線が理論の PDF ($\mu = 0.260$, $(1-q)\ln\delta = 0.393$, $\alpha_0 = 1.15$, $X = 0.310$) である。この場合, エントロピー指数は $q = 0.642$ となる。他のパラメータの値は, 表 Table 2 参照のこと。なお, 見易くするために, 各 PDF を下方に (a) 1, (b) 0.4 ずつずらした。

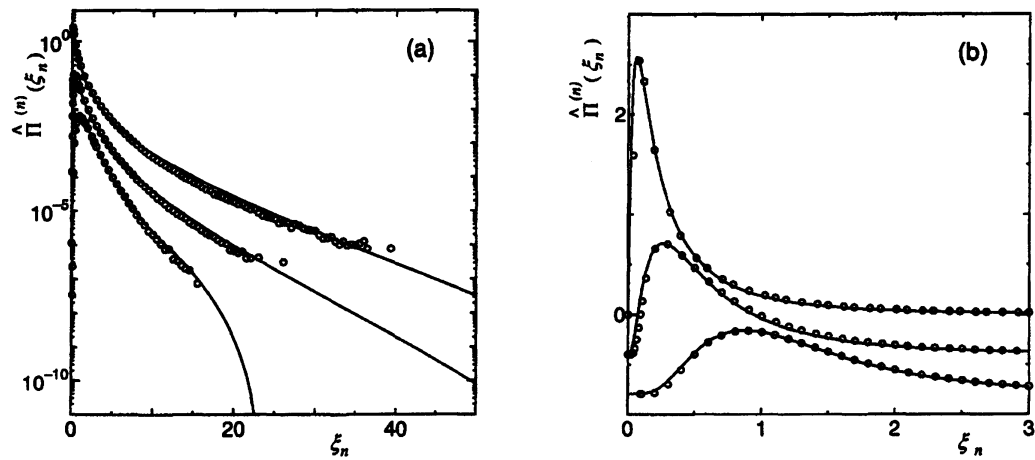


図 3: 拡大率 $\delta = 5$ の一連のエネルギー散逸率 PDF (縦軸: (a) 対数スケール, (b) 線形スケール)。白丸が実験の PDF (上から順に, $r/\eta = 8.76, 39.4, 197$), 実線が理論の PDF ($\mu = 0.260, (1-q)\ln\delta = 0.393, \alpha_0 = 1.15, X = 0.310$) である。この場合, エントロピー指数は $q = 0.756$ となる。他のパラメータの値は, 表 Table 2 参照のこと。なお, 見易くするために, 各 PDF を下方に (a) 1, (b) 0.4 ずつずらした。

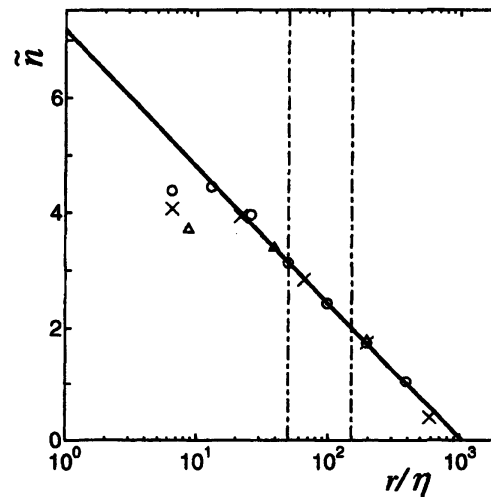


図 4: $\tilde{n}$ の r/η 依存性 (Table 2 参照)。 $\delta = 2$ ($\circ$), $\delta = 3$ ($\times$), $\delta = 5$ ($\triangle$)。線は, 最小二乗法で求めた $\tilde{n} = -2.37 \log_{10}(r/\eta) + 7.18$ ($r = \ell_n$) である。一点鎖線で挟まれた領域は, 慣性領域を表す。

表 2: 実験によるエネルギー散逸率 PDF の解析から得られたパラメータ。 n は, (11) において一連の PDF を特徴づけるパラメータ。 $\tilde{n}$ は, (20) におけるエネルギー・カスケード・モデルのステップ数。 q' , w_3 , θ は, PDF の中心部分の試行関数 (44) に見られる。 α^* と ξ_n^* は, (40) で関連付けられる。

$\delta = 2$										$\delta = 3$										$\delta = 5$									
r/η	n	$\tilde{n}$	q'	w_3	θ	α^*	ξ_n^*	n	$\tilde{n}$	q'	w_3	θ	α^*	ξ_n^*	n	$\tilde{n}$	q'	w_3	θ	α^*	ξ_n^*								
6.57	6.30	4.37	1.03	0.300	5.00	0.69	4.78	3.70	4.06	1.04	0.35	5.50	0.650	7.46	-	-	-	-	-	-	-	-							
8.76	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2.30	3.70	1.02	0.250	6.00	0.600	8.66								
13.1	6.40	4.44	1.03	0.300	5.50	0.630	6.00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-								
21.9	-	-	-	-	-	-	-	3.58	3.93	1.04	0.370	5.70	0.550	8.24	-	-	-	-	-	-	-	-							
26.3	5.70	3.95	1.04	0.400	6.00	0.550	7.39	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-								
39.4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2.10	3.38	1.04	0.45	6.20	0.480	9.14								
50.4	4.50	3.12	1.05	0.550	6.50	0.450	10.4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-								
65.7	-	-	-	-	-	-	-	2.58	2.83	1.04	0.500	6.50	0.400	11.3	-	-	-	-	-	-	-	-							
98.6	3.50	2.43	1.04	0.600	7.00	0.350	12.4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-								
197	2.50	1.73	1.05	0.800	7.50	0.290	12.5	1.58	1.74	1.06	0.800	7.50	0.300	12.0	1.10	1.77	1.06	0.800	7.50	0.300	11.7								
394	1.50	1.04	1.06	1.00	8.90	0.220	14.4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-								
591	-	-	-	-	-	-	-	0.580	0.400	1.08	1.30	8.50	0.200	15.7	-	-	-	-	-	-	-	-							

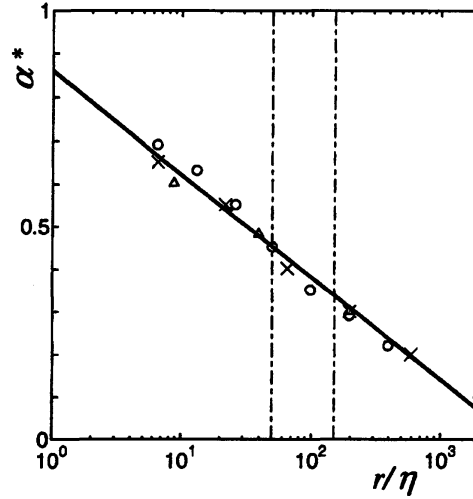


図 5: α^* の r/η 依存性 (Table 2 参照)。 $\delta = 2$ ($\circ$), $\delta = 3$ ($\times$), $\delta = 5$ ($\triangle$)。線は、最小二乗法で求めた $\alpha^* = -0.239 \log_{10}(r/\eta) + 0.860$ ($r = \ell_n$) である。一点鎖線で挟まれた領域は、慣性領域を表す。

この解析により、扱っている乱流系の間欠性指数の値は $\mu = 0.260$ ということがわかり、A&A モデルにおける PDF の解析に必要なパラメータ、 $(1-q)\ln\delta = 0.393$, $\alpha_0 = 1.15$, $X = 0.310$ が得られた。これらのパラメータの値は δ に依存しない。エントロピー指数は、 $\delta = 2$ では $q = 0.433$, $\delta = 3$ では $q = 0.642$, $\delta = 5$ では $q = 0.756$ となった。この解析によって得られた他のパラメータを表 2 に載せる。

観測量の解析により求めた $\tilde{n}$ の $r/\eta = \ell_n/\eta$ 依存性 (表 2 参照) を、それらの点より最小二乗法で求めた線

$$\tilde{n} = -1.03 \ln \left(\frac{r}{\eta} \right) + 7.18 \quad (45)$$

とともに図 4 に示す。ただし、解析にあたって $r/\eta = \ell_n/\eta$ の 10^1 以下にある点を無視した。 η は Kolmogorov スケールで、その値は表 1 に載っている。個の解析結果より $\tilde{n}$ が δ に依存しないことが分かる。この図から、 $r/\eta = \ell_n/\eta$ の慣性領域 (縦の一点鎖線に挟まれた領域) のみならず、その両側の領域にわたってスケーリング則が見てとれる。

抽出された $\tilde{n}$ についての表式 (45) を理論的關係式

$$\tilde{n} = -\ln \left(\frac{r}{\eta} \right) + \ln \left(\frac{\ell_0}{\eta} \right) \quad (46)$$

と比べると、 $\ell_0/\eta = 1.31 \times 10^3$ と見積もることができる。これより $\ell_0 = 18.1$ cm が得られる。この値は、風洞内に設置されている格子間隔の大きさ (20 cm) や速度相関長の長さ (17.9 cm) (表 1 参照) とほぼ同程度であることに注目されたい。

α^* と ξ_n^* の r/η 依存性 (表 2 参照) は、それぞれ図 5 と図 6 に示している。それぞれについて全ての点を使った最小二乗法により

$$\alpha^* = -0.104 \ln \left(\frac{r}{\eta} \right) + 0.860, \quad (47)$$

$$\xi_n^* = 1.83 \ln \left(\frac{r}{\eta} \right) + 2.80 \quad (48)$$

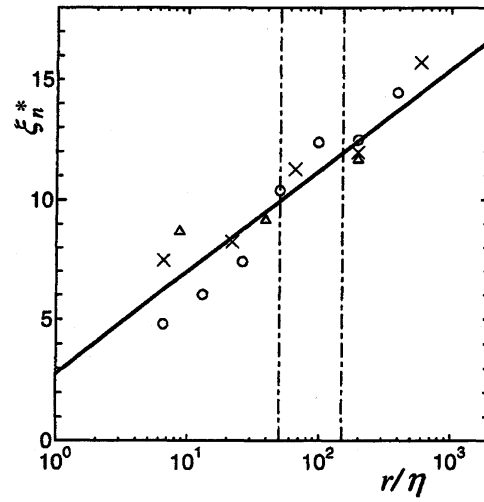


図 6: ξ_n^* の r/η 依存性 (Table 2 参照)。 $\delta = 2$ (○), $\delta = 3$ (×), $\delta = 5$ (△)。線は、最小二乗法で求めた $\xi_n^* = 4.21 \log_{10}(r/\eta) + 2.80$ ($r = \ell_n$) である。一点鎖線で挟まれた領域は、慣性領域を表す。

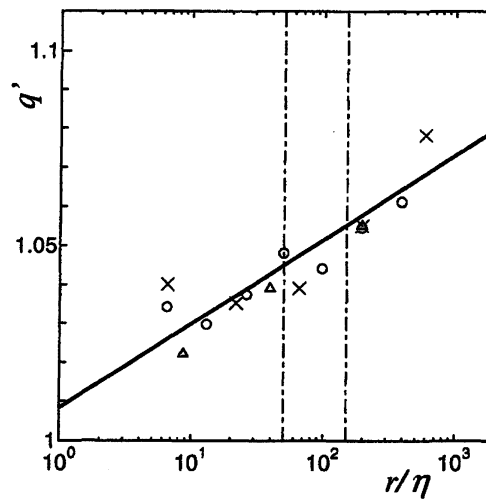


図 7: q' の r/η 依存性 (Table 2 参照)。 $\delta = 2$ (○), $\delta = 3$ (×), $\delta = 5$ (△)。線は、最小二乗法で求めた $q' = -2.16 \times 10^{-2} \log_{10}(r/\eta) + 1.01$ ($r = \ell_n$) である。一点鎖線で挟まれた領域は、慣性領域を表す。

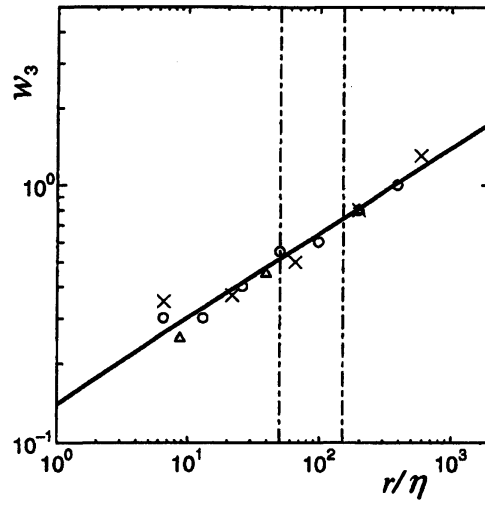


図 8: w_3 の r/η 依存性 (Table 2 参照)。 $\delta = 2$ (○), $\delta = 3$ (×), $\delta = 5$ (△)。線は、最小二乗法で求めた $\log_{10} w_3 = 0.332 \log_{10}(r/\eta) + \log_{10} 0.141$ ($r = \ell_n$) である。一点鎖線で挟まれた領域は、慣性領域を表す。

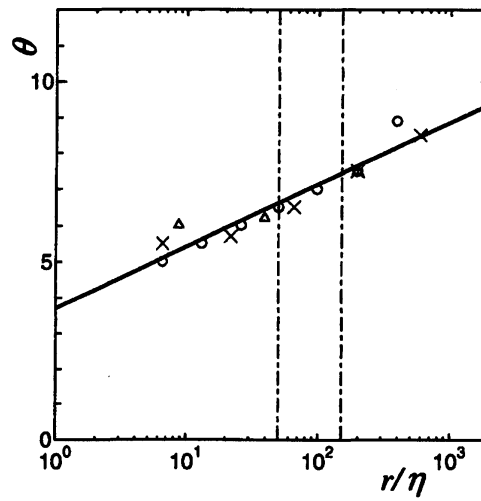


図 9: θ の r/η 依存性 (Table 2 参照)。 $\delta = 2$ (○), $\delta = 3$ (×), $\delta = 5$ (△)。線は、最小二乗法で求めた $\theta = 1.72 \log_{10}(r/\eta) + 3.71$ ($r = \ell_n$) である。一点鎖線で挟まれた領域は、慣性領域を表す。

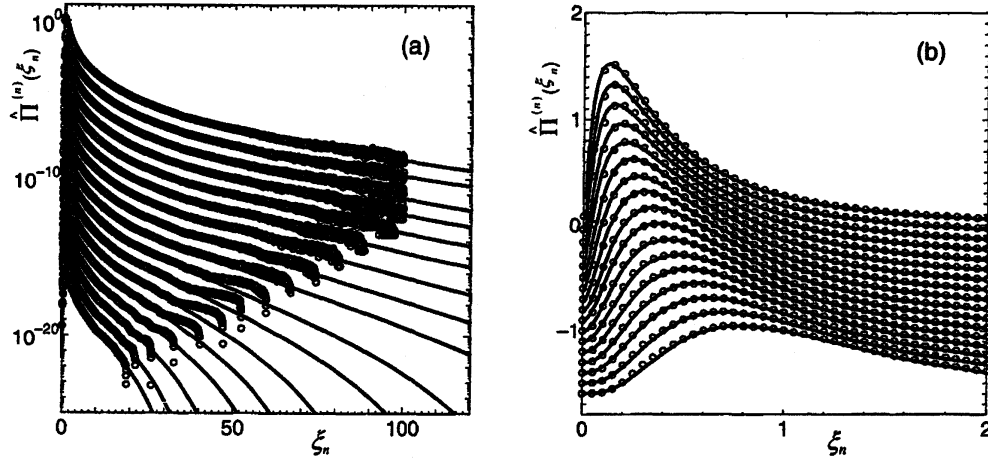


図 10: 拡大率 $\delta = 2^{1/4}$ の一連のエネルギー散逸率 PDF (縦軸: (a) 対数スケール, (b) 線形スケール)。白丸が実験の PDF (上から順に, $r/\eta = 27.5, 32.8, 38.9, 46.3, 55.1, 65.6, 78.0, 92.7, 110, 131, 156, 186, 221, 264, 314, 374, 442$), 実線が理論の PDF ($\mu = 0.345, (1-q)\ln\delta = 0.299, \alpha_0 = 1.20, X = 0.411$) である。この場合, エントロピー指数は $q = -0.728$ となる。他のパラメータの値は, 表 Table 3 参照のこと。なお, 見易くするために, 各 PDF を下方に (a) 1, (b) 0.1 ずつずらした。

が得られる。接続点の位置 ξ_n^* は, (31) ($\phi = 3$ を代入), (40) により α^* と関連付けられている。 ξ_n^* の表式中の $\bar{\xi}_n$ (31) は, 生の r/η 依存性とともに (41) を通しての r/η 依存性もある。したがって, ξ_n^* は複雑な r/η 依存性を持っているが, 最小二乗法で導かれた表式が簡単なことは興味深い。

同様に, (44) に現れるパラメータ q', w_3, θ の $r/\eta = \ell_n/\eta$ 依存性は, それぞれ, 図 7, 図 8, 図 9 に示される。それらの図にも, すべての点による最小二乗法を用いて解析された線

$$q' = -9.37 \times 10^{-3} \ln \left(\frac{r}{\eta} \right) + 1.01, \quad (49)$$

$$\ln w_3 = 0.332 \ln \left(\frac{r}{\eta} \right) - 1.96, \quad (50)$$

$$\theta = 0.747 \ln \left(\frac{r}{\eta} \right) + 3.71 \quad (51)$$

を描いた。

3.2 4096³ DNS による PDF の解析

本小節では, 金田グループの 4096³ DNS [26] から抽出されたエネルギー散逸率 PDF の解析を行う [27]。ここで用いた PDF は, 金田グループの DNS データの提供を受け, 新たに PDF のピーク部分あたりを詳細にして抽出したものである。DNS によるエネルギー散逸率 PDF の解析を, 図 10, 図 11, 図 12 に示す。それぞれの拡大率は $\delta = 2^{1/4}$, $\delta = 2^{1/2}$, $\delta = 2$ であり, いずれも縦軸は, (a) では対数スケール, (b) では線形スケールである。見やすくするために, 各々の PDF は縦軸に沿ってずらして描いてある。白丸が, DNS から得られた PDF データ点で, 実線が理論的 PDF である。 r は, 粗視化領域の直径である ($r = \ell_n$)。

乱流物理量の δ 非依存性を検証するために, 拡大率 δ 毎に与えられた一連の PDF を個々に用いて解析した。その結果, 誤差の範囲でいづれの δ の場合に対しても同一の間欠性指数値 $\mu = 0.345$ を得た。従っ

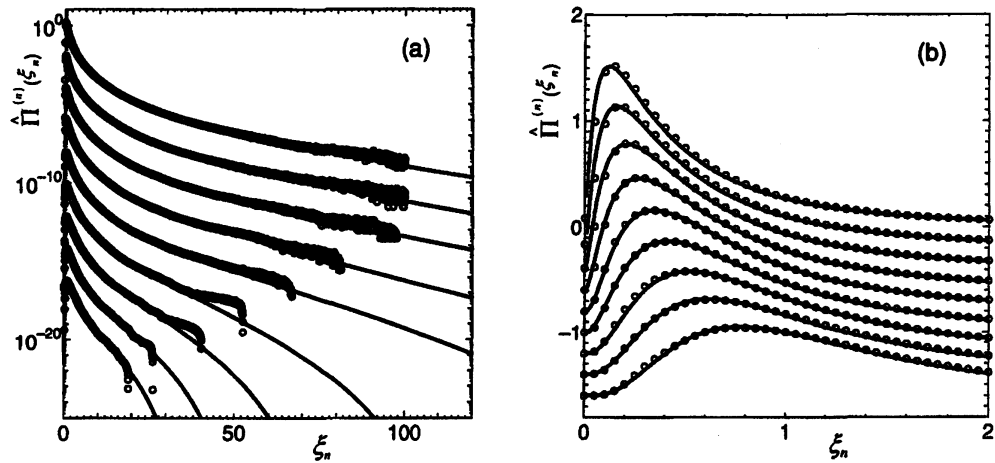


図 11: 拡大率 $\delta = 2^{1/2}$ の一連のエネルギー散逸率 PDF (縦軸: (a) 対数スケール, (b) 線形スケール)。白丸が実験の PDF (上から順に, $r/\eta = 27.5, 38.9, 55.1, 78.0, 110, 156, 221, 314, 442$), 実線が理論の PDF ($\mu = 0.345, (1-q)\ln\delta = 0.299, \alpha_0 = 1.20, X = 0.411$) である。この場合, エントロピー指数は $q = 0.136$ となる。他のパラメータの値は, 表 Table 3 参照のこと。なお, 見易くするために, 各 PDF を下方に (a) 2, (b) 0.2 ずつずらした。

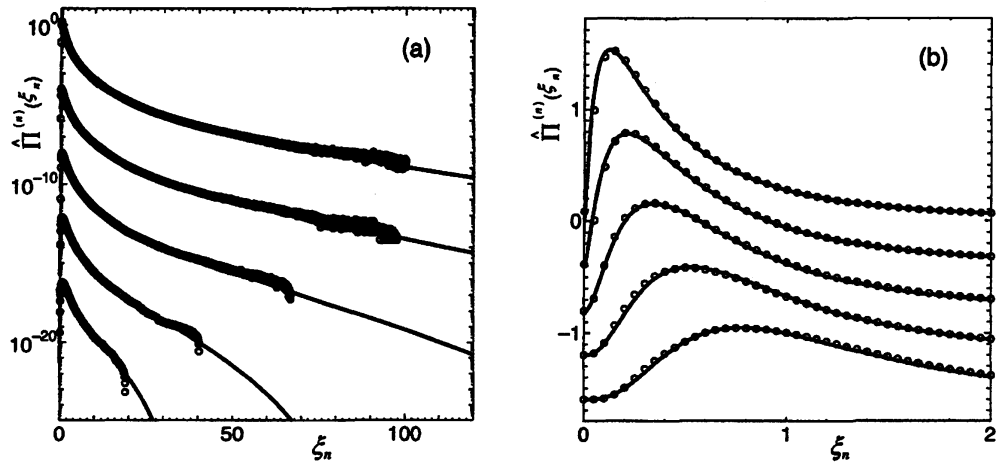


図 12: 拡大率 $\delta = 2$ の一連のエネルギー散逸率 PDF (縦軸: (a) 対数スケール, (b) 線形スケール)。白丸が実験の PDF (上から順に, $r/\eta = 27.5, 55.1, 110, 221, 442$), 実線が理論の PDF ($\mu = 0.260, (1-q)\ln\delta = 0.393, \alpha_0 = 1.15, X = 0.310$) である。この場合, エントロピー指数は $q = 0.568$ となる。他のパラメータの値は, 表 Table 2 参照のこと。なお, 見易くするために, 各 PDF を下方に (a) 4, (b) 0.4 ずつずらした。

て、A&A モデルでの PDF 解析に必要なパラメータの値は、 $(1-q)\ln\delta = 0.299$, $\alpha_0 = 1.20$, $X = 0.411$ となる。これらの値は δ に依存しない。エントロピー指数は、 $\delta = 2^{1/4}$ ($= 1.19$) の場合は $q = -0.728$ に、 $\delta = 2^{1/2}$ ($= 1.41$) の場合は $q = 0.136$ に、 $\delta = 2$ では $q = 0.568$ となる。各 δ に対して得られた n , $\bar{n}$ や他のパラメータの値を、表 3 に載せた。

観測量の解析により求めた $\bar{n}$ の r/η 依存性を図 13 に示す。ただし、DNS における Kolmogorov 長 η は、 $\eta = 5.12 \times 10^{-4}$ [26] である。この図のすべての点を用いて最小二乗法により得られた線

$$\bar{n} = -0.998 \ln \left(\frac{r}{\eta} \right) + 8.37 \quad (52)$$

も図 13 に載せた。この解析により、 $\bar{n}$ が δ に依らない事が分かる。図 13 から、慣性領域およびそれよりもかなり小さい領域にわたってスケーリング則の成立が見てとれる。慣性領域は、縦の一点鎖線で挟まれた領域 ($126 < r/\eta < 448$ [26]) である。これは、MPDFT では、 $r (= \ell_n)$ が小さくなるに連れ、一層顕著になる特異性をみているからだと推測される。

抽出された $\bar{n}$ に関する表式 (52) を理論的關係式

$$\bar{n} = -\ln \left(\frac{r}{\eta} \right) + \ln \left(\frac{\ell_0}{\eta} \right) \quad (53)$$

と比べて、 $\ell_0/\eta = 4.31 \times 10^3$ と見積もることができる。DNS における空間格子は 3η [26] であるから、最大粗視化領域の直径 ℓ_0 は、 $\ell_0/3\eta = 1.44 \times 10^3$ と見積もれる。見積もった値 $\ell_0/3\eta$ は、DNS の周期的境界条件による可能な最大の長さ 2048 の約 0.5 倍となっている。また、 ℓ_0/η が考えている DNS [26] における積分長 $L/\eta = 2.130 \times 10^3$ の約 2 倍である。これは、3.1 節の風洞実験で ℓ_0/η がほぼ速度相関長 (積分長) と同程度であったことと顕著な相違である。

接続点における α^* の値は、 r/η と δ によらずほぼ一定である (表 3 参照)。接続点 ξ_n^* の値は、(31) と (41) を用いて、(40) で与えられる。ただし、 $\phi = 3$ であり、その値は表 3 に載せてある。 ξ_n^* の r/η 依存性ととも、 $\delta = 2^{1/4}$, $\delta = 2^{1/2}$, $\delta = 2$ の場合のすべての点を使った最小二乗法で

$$\xi_n^* = -7.98 \ln \left(\frac{r}{\eta} \right) + 55.1 \quad (54)$$

と算出された線を、図 14 に示した。この図から、 r/η の慣性領域のみならず、それよりもかなり小さい領域にスケーリング則が広がって見出される。慣性領域は、縦の一点鎖線に挟まれた領域 [26] である。 ξ_n^* が r/η に複雑に依存している ((31), (41), (40) 参照) にも関わらず、ここでも得られ表式はほぼ単純な r/η 依存性になっていることは興味深い。

中心部分 (39) の PDF ($\phi = 3$ と置く) におけるパラメータ q' , w_3 , θ の r/η 依存性をそれぞれ図 15, 図 16, 図 17 に図示した。また、図 15 には線

$$q' = -9.37 \times 10^{-3} \ln \left(\frac{r}{\eta} \right) + 1.01 \quad (55)$$

も載せた。 w_3 と θ の r/η 依存性は、それぞれ関係式

$$\ln w_3 = 0.280 \ln \left(\frac{r}{\eta} \right) - 1.68, \quad (56)$$

$$\theta = 0.667 \ln \left(\frac{r}{\eta} \right) + 0.585 \quad (57)$$

で記述されることが分かった。

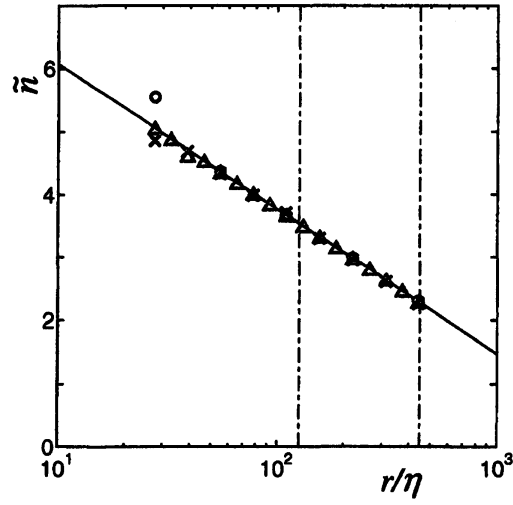


図 13: $\tilde{n}$ の r/η 依存性 (Table 3 参照)。 $\delta = 2^{1/4}$ ($\triangle$), $\delta = 2^{1/2}$ ($\times$), $\delta = 2$ ($\circ$)。線は、最小二乗法で求めた $\tilde{n} = -2.30 \times \log_{10}(r/\eta) + 8.37$ ($r = \ell_n$) である。一点鎖線で挟まれた領域は、慣性領域を表す。

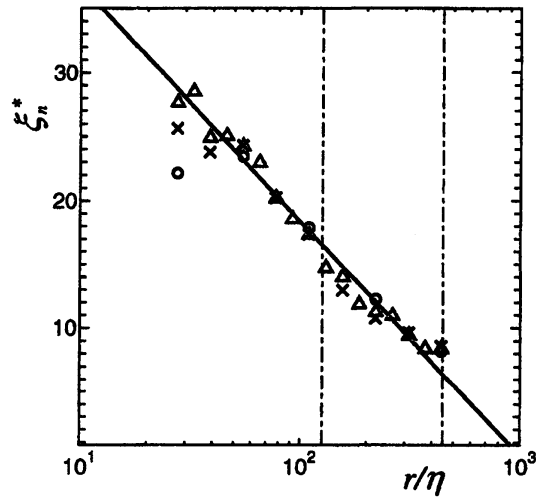


図 14: ξ_n^* の r/η 依存性 (Table 3 参照)。 $\delta = 2^{1/4}$ ($\triangle$), $\delta = 2^{1/2}$ ($\times$), $\delta = 2$ ($\circ$)。線は、最小二乗法で求めた $\xi_n^* = -18.4 \times \log_{10}(r/\eta) + 55.1$ ($r = \ell_n$) である。一点鎖線で挟まれた領域は、慣性領域を表す。

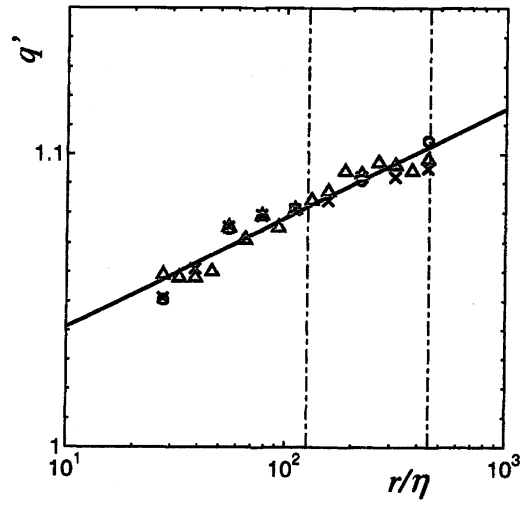


図 15: q' の r/η 依存性 (Table 3 参照)。 $\delta = 2^{1/4}$ ($\triangle$), $\delta = 2^{1/2}$ ($\times$), $\delta = 2$ ($\circ$)。線は、最小二乗法で求めた $q' = -3.71 \times 10^{-2} \times \log_{10}(r/\eta) + 1.00$ ($r = \ell_n$) である。一点鎖線で挟まれた領域は、慣性領域を表す。

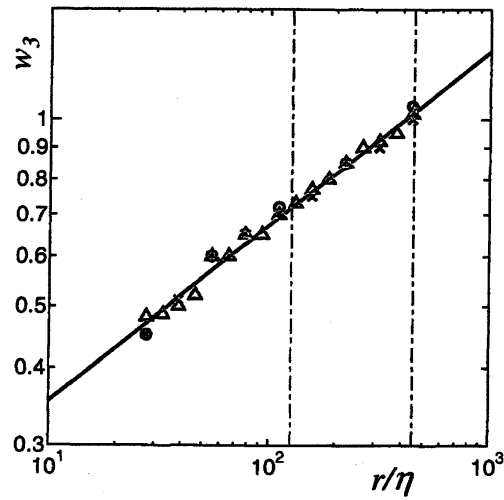


図 16: ξ_n^* の r/η 依存性 (Table 3 参照)。 $\delta = 2^{1/4}$ ($\triangle$), $\delta = 2^{1/2}$ ($\times$), $\delta = 2$ ($\circ$)。線は、最小二乗法で求めた $\log_{10} w_3 = 0.280 \log_{10}(r/\eta) - 1.68$ ($r = \ell_n$) である。一点鎖線で挟まれた領域は、慣性領域を表す。

表 3: DNS のエネルギー散逸率 PDF の解析により得られたパラメータ。 n は, (11) において一連の PDF を特徴づけるパラメータ。 $\tilde{n}$ は, (20) におけるエネルギー・カスケード・モデルのステップ数。 q' , w_3 , θ は, PDF の中心部分の試行関数 (44) に見られる。 α^* と ξ_n^* は, (40) で関連付けられる。

τ/η	$\delta = 2^{1/4}$							$\delta = 2^{1/2}$							$\delta = 2$						
	n	$\tilde{n}$	q'	w_3	θ	α^*	ξ_n^*	n	$\tilde{n}$	q'	w_3	θ	α^*	ξ_n^*	n	$\tilde{n}$	q'	w_3	θ	α^*	ξ_n^*
27.5	29.0	5.03	1.06	0.480	2.90	0.220	27.6	14.0	4.85	1.05	0.450	2.90	0.210	25.6	8.00	5.55	1.05	0.450	2.90	0.220	22.1
32.8	28.0	4.85	1.06	0.490	3.10	0.210	28.5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
38.9	26.5	4.59	1.06	0.500	3.00	0.200	24.9	13.5	4.68	1.06	0.510	3.00	0.210	23.7	-	-	-	-	-	-	-
46.3	26.0	4.51	1.06	0.520	3.30	0.200	25.0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
55.1	25.0	4.33	1.08	0.600	3.00	0.200	24.2	12.5	4.33	1.08	0.600	3.00	0.200	24.2	6.30	4.37	1.07	0.600	3.00	0.200	23.4
65.6	24.0	4.16	1.07	0.600	3.40	0.200	22.9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
78.0	23.0	3.99	1.08	0.650	3.30	0.200	20.2	11.5	3.99	1.08	0.650	3.30	0.200	20.2	-	-	-	-	-	-	-
92.7	22.0	3.81	1.08	0.650	3.70	0.200	18.6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
110	21.0	3.64	1.08	0.700	3.80	0.200	17.3	10.7	3.71	1.08	0.700	3.80	0.200	17.3	5.30	3.67	1.08	0.720	3.80	0.200	17.9
131	20.0	3.47	1.08	0.730	3.80	0.200	14.7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
156	19.0	3.29	1.09	0.770	3.85	0.190	14.0	9.5	3.29	1.08	0.750	3.90	0.200	12.9	-	-	-	-	-	-	-
186	18.0	3.12	1.09	0.800	3.90	0.200	11.8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
221	17.0	2.95	1.09	0.850	4.10	0.190	11.2	8.50	2.95	1.09	0.850	4.30	0.200	10.7	4.30	2.98	1.08	0.780	4.60	0.180	11.5
264	16.0	2.77	1.10	0.900	4.20	0.180	10.9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
314	15.0	2.60	1.10	0.920	4.50	0.180	9.38	7.50	2.60	1.09	0.900	4.50	0.180	9.56	-	-	-	-	-	-	-
374	14.0	2.43	1.09	0.950	4.70	0.180	8.35	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
442	13.0	2.25	1.10	1.02	4.85	0.160	8.34	6.50	2.25	1.10	1.00	5.00	0.160	8.52	3.30	2.29	1.10	1.05	4.70	0.170	8.15

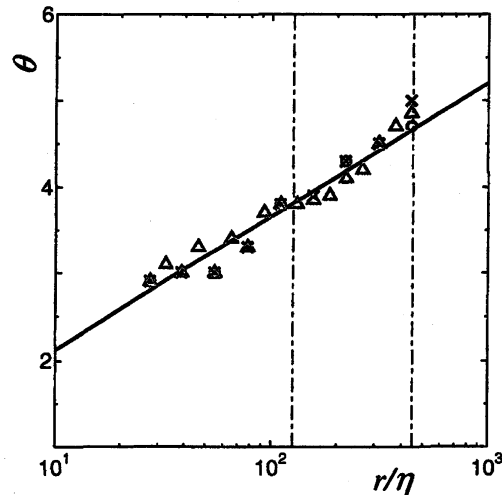


図 17: θ の r/η 依存性 (Table 3 参照)。 $\delta = 2^{1/4}$ (Δ), $\delta = 2^{1/2}$ ($\times$), $\delta = 2$ ($\circ$)。線は、最小二乗法で求めた $\theta = 0.668 \ln(r/\eta) + 0.585$ ($r = \ell_n$) である。一点鎖線で挟まれた領域は、慣性領域を表す。

4 まとめ

大型風洞内の発達乱流実験 [25] で得られた速度時系列データから抽出されたエネルギー散逸率の PDF (図 1, 図 2, 図 3 参照) と 4096³ DNS [26] から抽出されたエネルギー散逸率 PDF (図 10, 図 11, 図 12 参照) を MPDFT により高精度に解析した。拡大率 δ (> 1) は、一連の PDF を作成する際に、観測者によって任意に選ばれるものであるため、乱流系の観測量は δ の値に依存してはならないことが要請される。本論文では、MPDFT によるエネルギー散逸率 PDF の高精度な解析を通して、観測量の δ 非依存性が証明された。また、 $\bar{n}$ が δ に依らないことも明らかになった。

$\bar{n}$ と ℓ_n の関係によると、慣性領域 (図の一点鎖線で挟まれた領域) とそれよりもかなり小さい ℓ_n の領域までスケーリング則が見られる (図 4, 図 13 参照) ことが分かった。MPDFT は、物理量の特異性 (ℓ_n が小さくなるに連れて顕著になる間欠性の起源である特異性) を解析する理論であるから、このことはもっともなことであろう。本論文では、PDF のピークと接続点との間で理論 PDF が DNS の PDF に一番よくあうように、接続点 α^* ひいては ξ_n^* を選んだ。接続点 ξ_n^* の ℓ_n 依存性でも、慣性領域ならびにそれよりも小さい領域にスケーリング則が成立していることが見て取れる (図 6, 図 14 参照)。このような、裾引き PDF の高精度な解析により、乱流の間欠性に関わる詳細な情報が実験ならびに数値実験データから抽出できるようになったのである。接続点 ξ_n^* をさらに解析することによって得られる情報は、乱流の間欠性を司る『コヒーレントな渦運動部分』とそれに纏わりつく『揺らぎ部分』を分離検討する際に有用となる。

q' の ℓ_n/η 依存関係でも同様に、慣性領域およびそれより小さい領域にスケーリング的振る舞いが見られる (図 7, 図 15 参照)。乱流の間欠性に起因するコヒーレントな乱流運動のまわりの揺らぎに対して、まだ理論的解釈はない。この q' のスケーリング的振る舞いの発見は、揺らぎの性質を抽出する力強い指針となる。

MPDFT で提案された新しいスケーリング関係式は、力学系 (いわゆるロジスティック写像系) から抽出されたスケーリング関係式と非常に深い関連が見られる。それより、発達乱流のマルチフラクタル的性質の起源は、 δ^∞ 周期軌道が呈する δ スケールカントール集合と深い関係にあることが推測される。今回の解析により、発達乱流系は、あらゆる δ 値の不安定 δ^∞ 周期軌道で特徴づけられるカントール集合が組み込まれ形成されているという描像に到達した。拡大率 δ で一連の PDF を調べると、乱流を構成する δ スケールカントール集合の情報を抽出できるであろう。詳しくは、本数理研講究録掲載論文、本池・有光 [28]、小松

崎・本池・有光 [29] を参照されたい。

謝辞

風洞実験で得られた乱流時系列の生データを提供して下さった、毛利博士に感謝いたします。また、乱流 4096³DNS の生データを提供して下さった、金田博士、石原博士のご厚意に感謝いたします。金田博士、石原博士、武智氏には、DNS 生データから一連の PDF を抽出にあたって多大な協力をいただきました。本池博士、吉田博士、小松崎氏、武智氏と有益な議論をしていただきました。ここに、心よりお礼いたします。

参考文献

- [1] B.B. Mandelbrot, "Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier," *J. Fluid Mech.* **62**, 331–358 (1974).
- [2] U. Frisch, and G. Parisi, "Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics," edited by M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi (North-Holland, New York, 1987) pp.85–88.
- [3] R. Benzi, G. Paladin, G. Parisi, and A. Vulpiani, "On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems", *J. Phys. A: Math. Gen.* **17**, 3521–3531 (1984).
- [4] T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, and B.I. Shraiman, "Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets," *Phys. Rev. A* **33**, 1141–1151 (1986).
- [5] C. Meneveau, and K. R. Sreenivasan, "The multifractal spectrum of the dissipation field in turbulent flows," *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **2**, 49–76 (1987).
- [6] M. Nelkin, "Multifractal scaling of velocity derivatives in turbulence," *Phys. Rev. A* **42**, 7226–7229 (1990).
- [7] I. Hosokawa, "Turbulence models and probability distributions of dissipation and relevant quantities in isotropic turbulence," *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1054–1057 (1991).
- [8] R. Benzi, L. Biferale, G. Paladin, A. Vulpiani, and M. Vergassola, "Multifractality in the statistics of the velocity gradients in turbulence," *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2299–2302 (1991).
- [9] Z-S. She and E. Leveque, "Universal scaling laws in fully developed turbulence," *Phys. Rev. Lett.* **72**, 336–339 (1994).
- [10] T. Arimitsu and N. Arimitsu, "Analysis of Fully Developed Turbulence in terms of Tsallis Statistics," *Phys. Rev. E* **61**, 3237–3240 (2000).
- [11] T. Arimitsu and N. Arimitsu, "Tsallis statistics and fully developed turbulence," *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, L235–L241 (2000) [CORRIGENDUM: **34**, 673–674 (2001)].
- [12] T. Arimitsu and N. Arimitsu, "Analysis of turbulence by statistics based on generalized entropies," *Physica A* **295**, 177–194 (2001).

- [13] N. Arimitsu and T. Arimitsu, "Multifractal analysis of turbulence by using statistics based on non-extensive Tsallis' or extensive Rényi's entropy," J. Korean Phys. Soc. **40**, 1032–1036 (2002).
- [14] T. Arimitsu and N. Arimitsu, "PDF of velocity fluctuation in turbulence by a statistics based on generalized entropy," Physica A **305**, 218–226 (2002).
- [15] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, B.J. Devenish, A. Lanotte, and F. Toschi, "Multifractal statistics of Lagrangian velocity and acceleration in turbulence," Phys. Rev. Lett. **93**, 064502-1-4 (2004).
- [16] L. Chevillard, B. Castaing, E. Lévêque and A. Arneodo, "Unified multifractal description of velocity increments statistics in turbulence: Intermittency and skewness," Physica D **218**, 77–82 (2006).
- [17] T. Arimitsu and N. Arimitsu, "Analysis of PDFs for energy transfer rates from 4096³ DNS — Verification of the scaling relation within MPDFT," J. Turbulence **12**, 1–25 (2011).
- [18] N. Arimitsu and T. Arimitsu, "Verification of the scaling relation within MPDFT by analyzing PDFs for energy dissipation rates out of 4096³ DNS," Physica A **390**, 161–176 (2011).
- [19] N. Arimitsu, T. Arimitsu and H. Mouri, "Experimental test of multifractal PDF theory with the help of turbulence in a wind tunnel," submitted(2011) .
- [20] A. Rényi, "On measures of entropy and information," in *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Berkeley, USA 1961) pp.547–561.
- [21] J.H. Havrda, and F. Charvat, "Quantification methods of classification processes: Concepts of structural α entropy," Kybernetika **3**, 30–35 (1967).
- [22] C. Tsallis, "Possible generation of Boltzmann-Gibbs statistics," J. Stat. Phys. **52**, 479–487 (1988).
- [23] U.M.S. Costa, M.L. Lyra, A.R. Plastino and C. Tsallis, "Power-law sensitivity to initial conditions within a logistic-like family of maps: Fractality and nonextensivity," Phys. Rev. E **56**, 245–250 (1997).
- [24] M.L. Lyra and C. Tsallis, "Nonextensivity and multifractality in low-dimensional dissipative systems," Phys. Rev. Lett. **80**, 53–56 (1998).
- [25] H. Mouri, A. Hori and M. Takaoka, "Fluctuations of statistics among subregions of a turbulence velocity field," Phys. of Fluids **20**, 035108-1–6 (2008).
- [26] T. Aoyama, T. Ishihara, Y. Kaneda, M. Yokokawa, K. Itakura, and A. Uno, "Statistics of energy transfer in high-resolution direct numerical simulation of turbulence in a periodic box," J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 3202–3212 (2005).
- [27] N. Arimitsu, K. Takechi, T. Arimitsu, Y. Kaneda, and T. Ishihara, in preparation to submit (2011).
- [28] T. Motoike, T. Arimitsu, "力学系における δ^∞ 周期構造と乱流マルティフラクタル構造," 本数理研講究録, (2011).
- [29] M. Komatsuzaki, T. Motoike, and T. Arimitsu, " δ^∞ 不安定周期軌道の回送構造の解析," 本数理研講究録, (2011).