

von Neumann 代数の構成

東北大 理 菊池武雄

$(\mathcal{Z}, \mathcal{G}, \nu)$ を確率空間とし、Bool 代数は可付番基底をもつとする。 $(Y(z), B(z), \mu(z; \cdot)), z \in \mathcal{Z}$ を確率空間の集合とし、各 $B(z)$ は可付番基底をもつとする。 $X = \bigcup_{z \in \mathcal{Z}} Y(z)$ とおく。 X の subset B に対して、 $\pi(z; B) = B \cap Y(z)$ とおく。 $\mathcal{B}_0$ を X の subset の可付番個の族で、次の条件を満たすとする。

(I-1) $\mathcal{B}_0$ は Bool 代数である。

(I-2) $\pi(z; B) \in B(z), B \in \mathcal{B}_0$ for a.e. z

(I-3) $\mu(z; \pi(z; B)), B \in \mathcal{B}_0$ は z の内数として可測である。

(I-4) $B(z)$ は $\pi(z; B), B \in \mathcal{B}_0$ により生成される。

$\mu(B) = \int \mu(z; \pi(z; B)) d\nu(z)$ によって、 $\mathcal{B}_0$ に測度を入れる。 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}_0$ により生成される σ -ring とし μ を $\mathcal{B}$ 上に拡張する。

H を可分な Hilbert 空間とし、 M を Π_1 -factor とし

H 上に standard に表現されているとする。 $H(x)$, $x \in X$ を可分な Hilbert 空間とし、 V_x を H から $H(x)$ への onto isometry とする。 $M(x) = V_x M V_x^{-1}$ とおく。まぎらわしくない時は、 $M(x)$ の元を M の元とみなすことがある。 $\mathcal{H} = \int^{\oplus} H(x) d\mu(x)$ を canonical な基底による direct integral とする。各 $z \in \mathcal{Z}$ に対して $Y(z)$ の任意の二元 α, β に対して、 $H(\alpha)$ から $H(\beta)$ への onto isometry の族 $\mathcal{U}(\beta, \alpha)$ が定義されていて次の条件を満たすとする。

$$(II-1) \quad u M(\alpha) u^{-1} = M(\beta), \quad u \in \mathcal{U}(\beta, \alpha)$$

$$(II-2) \quad \mathcal{U}(\alpha, \beta) = \mathcal{U}(\beta, \alpha)^{-1}$$

$$(II-3) \quad \mathcal{U}(\gamma, \beta) \mathcal{U}(\beta, \alpha) = \mathcal{U}(\gamma, \alpha)$$

$\alpha \in Y(z)$, $\beta \in Y(z')$ $z \neq z'$ の時は、 $\mathcal{U}(\beta, \alpha)$ は $H(\alpha)$ から $H(\beta)$ への 0 -operator のみから成るものとする。

$u(\beta, \alpha)$ を $\mathcal{U}(\beta, \alpha)$ の代表元として一つ固定する。

$\{a(\beta, \alpha)\}$ $a(\beta, \alpha) \in M$ が次の条件を満たす時 $\{a(\beta, \alpha)\}$ は bounded operator を表現するといふ。

$$(III-1) \quad \xi, \zeta \in \mathcal{H} \text{ に対して } (a(\beta, \alpha) u(\beta, \alpha) \xi(\alpha) | \zeta(\beta))$$

が $(\alpha, \beta) \in X \times X$ の可測関数である。

$$(III-2) \quad \iint | (a(\beta, \alpha) u(\beta, \alpha) \xi(\alpha) | \zeta(\beta)) | d\mu(\alpha) d\mu(\beta) < \infty$$

(III-3) ある定数 K があって

$$\left| \iint (a(\beta, \alpha) u(\beta, \alpha) \xi(\alpha) \eta(\beta)) d\mu(\alpha) d\mu(\beta) \right| \leq K \|\xi\| \|\eta\|$$

bounded operator a が $\{a(\beta, \alpha)\}$ の形で表されてい
れば $b(\beta, \alpha) = u(\alpha, \beta)^* a(\alpha, \beta) u(\alpha, \beta)$ とおくと
 a^* は $\{b(\beta, \alpha)\}$ の形に表されることが分る。更に次
のような条件をおくと、このような operator の全体は
 π -algebra になる。

(IV) 与えられた $\alpha \in X$ に対して定数 $K(\alpha)$ が
存在して、 $\xi \in H$ に対して

$$\| [a(\beta, \alpha) u(\beta, \alpha) \xi] \| \leq K(\alpha) \|\xi\|,$$

$$\left\| \int a(\beta, \alpha) u(\beta, \alpha) \xi(\alpha) d\mu(\alpha) \right\| \leq K(\beta) \|\xi\|$$

ここで $\cdot$ はそれを変数とみるという意味で
ある。

一般に a_n が上のより形に表現され、 a_n が a に
強収束しても a は上のより形になるとは限らない。