

時空間有限積分法を用いた電磁界計算に関する検討

A Study of Electromagnetic Field Computation Using Space-Time Finite Integration Method

松尾哲司 清水辰吾 美船健
Tetsuji Matsuo Shingo Shimizu Takeshi Mifune

京都大学 工学研究科 電気工学専攻
Department of Electrical Engineering, Graduate School of Engineering, Kyoto University

1. まえがき

近年、メタマテリアルなど電磁波の波長程度あるいはそれ以下のサイズの人工構造により、電磁波(あるいは光)に対する媒質の特性を人工的に制御する手法が注目されている。その際、構造物の形状を正確にモデル化するために、計算格子を細かくするとともに適応的な格子形状を用いることが求められる。有限積分(FI)法⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾は、様々な格子形状を許容する方法であり、一般的な格子形状に対する陽的な時間依存計算の手法の開発が行われている⁽³⁾⁽⁴⁾。FI法は、FDTD法を包含する手法であるが、時間と空間については別々に扱われることが通常であり、時間方向には一様な時間刻みによる逐次的な処理にとどまっている点についてはFDTD法と同様であった。

そこで、時間方向にも適応的な刻み幅を実現するため、時空間格子を用いたFI法の開発が開始されており、FDTD法より効率的な時間依存計算が可能なが報告されている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。今回、空間2次元および3次元の時空間FI法における格子形状の検討に関する報告を行う。

2. 時空間有限積分法

座標系として、

$$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

を用いる。ただし、 $c = 1 / \sqrt{(\epsilon_0 \mu_0)}$ 、 ϵ_0 は電気定数、 μ_0 は磁気定数である。マクスウェル方程式は、

$$dF = 0, dG = J \quad (1)$$

$$F = -\sum_{i=1}^3 E_i dx^0 dx^i + \sum_{j=1}^3 B_j dx^j dx^k,$$

$$G = \sum_{i=1}^3 H_i dx^0 dx^i + \sum_{j=1}^3 D_j dx^j dx^k,$$

$$J = c \rho dx^1 dx^2 dx^3 - \sum_{j=1}^3 J_j dx^0 dx^j dx^k \quad (2)$$

と表される。ここで、 $(B_1, B_2, B_3) = c\mathbf{B}$ 、 $(D_1, D_2, D_3) = c\mathbf{D}$ であり、 (J_1, J_2, J_3) は電流密度、 ρ は電荷密度である。また、 (j, k, l) は $(1, 2, 3)$ の巡回置換であり、以下、断りなくこの記法を用いる。

式(1)の積分形は、

$$\oint_{\Omega_p} F = 0, \oint_{\Omega_d} G = \int_{\Omega_d} J \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 Ω_p と Ω_d は時空間における超曲面である。FI法においては、境界 $\partial\Omega_p$ および $\partial\Omega_d$ は、それぞれ、主格子および双対格子における面で構成される。電磁界諸量を表す変数は、

$$f = \int_{S_p} F, g = \int_{S_d} G \quad (4)$$

で与えられる。ここで、 S_p と S_d は主格子と双対格子の面である。

(超)直方体格子で構成される主格子と双対格子を用いる場合、式(4)の変数は、

$$e_i = \int_{S_p} E_i dx^0 dx^j, b_j = \int_{S_p} B_j dx^k dx^l,$$

$$h_i = \int_{S_d} H_i dx^0 dx^j, d_j = \int_{S_d} D_j dx^k dx^l \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (5)$$

で与えられ、FDTD法と等価なスキームが得られる。

空間方向あるいは時間方向に対して傾いた面がある場合、式(4)の変数 f と g は電界諸量と磁界諸量を混合して含むため両者の関係(構成方程式)の扱いに注意が必要である。構成方程式を単純に記述するためには、対応する主格子と双対格子の面の関係を、

$$\int_{S_d} c_r dx^k dx^l / \int_{S_p} dx^k dx^l = -\int_{S_d} dx^k dx^l / \int_{S_p} c_r dx^0 dx^j = a \quad (5)$$

$$c_r = 1 / \sqrt{(\epsilon_r \mu_r)} \quad (6)$$

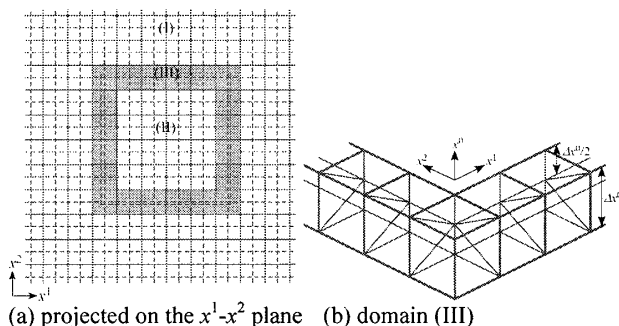
のように与えればよい⁽⁶⁾。ただし、 a は対応する S_p と S_d のサイズに依存して決まる定数であり、 ϵ_r と μ_r は比誘電率および比透磁率である。このとき、

$$f = Zg/a \quad (7)$$

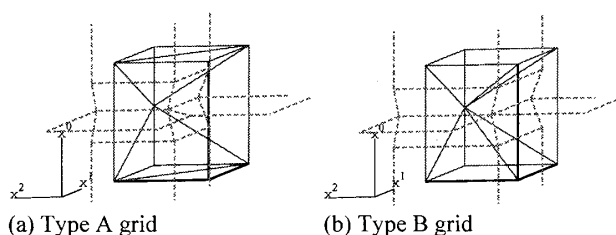
の関係が得られる。ただし、 $Z = \sqrt{(\mu_r \mu_0 / \epsilon_r \epsilon_0)}$ はインピーダンスである。式(5)の関係は、 $F = Z^* G$ の関係に由来する。ここで $*$ は、光速を $c_r c$ としたローレンツ計量に基づくホッジ演算子である。式(5)のとき、主格子の面 S_p と双対格子の面 S_d は、ローレンツ計量において直交している。

3. 3次元時空間格子(空間2次元)

図1に空間2次元の3次元時空間格子の例を示す。領域(I)の時間刻みは Δx^0 、領域(II)の時間刻みは $\Delta x^0/2$ であり、領域(III)は両者の接合部分とする。図2(a)は文献(5)で用いられた時空間格子の領域(III)の角部であるが、この格子は空間的な不均一性を招くために非物理的な反射を生じる⁽⁵⁾。そこで、接合部の形状を改善した時空間格子を図2(b)に示す。本稿では、前者をType A、後者をType Bと呼ぶ。文献(7)と同様の設定で、FDTD法による電磁界計算結果との差異を B_3 の分布について図3に示す。Type Aの格子では非物理的な反射などにより、誤差が生じていることがわかる。Type Bの格子では、誤差が小さく抑えられており、非物理的な反射も見られない。誤差については、領域(II)の部分において、FDTD法と時間刻み幅が相違していることによる数値分散特性の相違によるものと説明される。



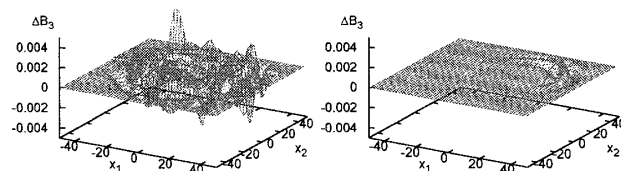
(a) projected on the x^1 - x^2 plane (b) domain (III)
Fig. 1. A space-time grid where solid and dashed lines represent primal and dual grids.



(a) Type A grid

(b) Type B grid

Fig. 2. 3D Space-time grids at the corner of Domain (III) where solid and dashed lines represent primal and dual grids.



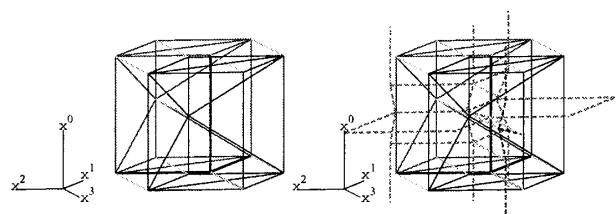
(a) Type A grid

(b) Type B grid

Fig. 3. Discrepancy of B_3 between space-time FI method and FDTD method.

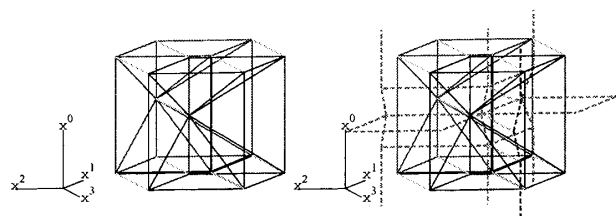
4. 4次元時空間格子 (空間3次元)

Type A と Type B の格子を空間3次元の4次元時空間に拡張した格子を図4と5に示す。文献(6)と同様の設定で、 $\epsilon_r = 5$ の誘電体中に、 $\epsilon_r = 1$ の立方体空孔がある場合の電磁波の散乱の計算結果を図6に示す。比較のため、領域(II)と同じ空間および時間刻み幅を用いた FDTD 法による結果を図6(c)に示す。FDTD 法は、全体を $\epsilon_r = 1$ の部分に合わせて時間刻み幅を決めるため、時空間 FI 法の2倍の計算時間を要する。Type B を用いた FI 法による結果は、FDTD の結果とよく一致しているが、Type A を用いた場合には、散乱波の形状に若干相違が生じていることが分かる。なお、10万時間ステップ計算後においても、数値不安定性は見られない。



(a) primal grid

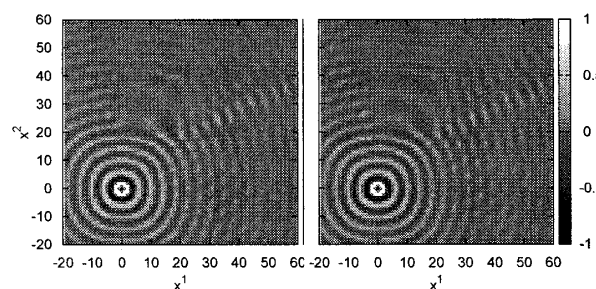
(b) primal and dual grids

Fig. 4. 4D space-time grid of Type A⁽⁶⁾ where solid and dashed lines represent primal and dual grids.

(a) primal grid

(b) primal and dual grids

Fig. 5. 4D space-time grid of Type B where solid and dashed lines represent primal and dual grids.



(a) Type A grid

(b) Type B grid

(c) FDTD method

Fig. 6. Scattering of B_3 .

文献

- (1) T. Weiland, "Time domain electromagnetic field computation with finite difference methods," Int. J. Numer. Model., vol. 9, pp. 295-319, 1996.
- (2) I. E. Lager, E. Tonti, A.T. de Hoop, G. Mur, and M. Marrone, "Finite formulation and domain-integrated field relations in electromagnetics - a synthesis," IEEE Trans. Magn., vol. 39, pp. 1199-1202, May 2003.
- (3) P. Alotto, A. De Cian, and G. Molinari, "A time-domain 3-D full-maxwell solver based on the cell method," IEEE Trans. Magn., vol. 42, pp. 799-802, Apr. 2006.
- (4) L. Codecasa and M. Politi, "Explicit, consistent, and conditionally stable extension of FD-TD to tetrahedral grids by FIT," IEEE Trans. Magn., vol. 44, pp. 1258-1261, June 2008.
- (5) T. Matsuo, "Electromagnetic field computation using space-time grid and finite integration method," IEEE Trans. Magn., vol. 46, pp. 3241-3244, Aug. 2010.
- (6) T. Matsuo, "Space-time finite integration method for electromagnetic field computation," IEEE Trans. Magn., vol. 47, pp. 1530-1533, May 2011.
- (7) S. Shimizu, T. Mifune, T. Matsuo, "Space-time grids for electromagnetic field computation using finite integration method," 2011 APSURSI, pp. 2346-2349, 2011.