

加速可能集合と加速法

長崎総合科学大 長田直樹 (Naoki Osada)

1. はじめに

収束の遅い数列や級数の極限值を求めるには、加速法が必要になる。数列変換 T が、数列の集合 $\mathcal{S}$ のすべての数列を加速するとき、 $\mathcal{S}$ は加速可能集合と呼ばれる。数列 (S_n) が $\mathcal{S}$ に属することが事前に分かれば、 T を用いて加速できる。

自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ とする。収束する実数列全体の集合を $\mathcal{C}$ とし、 $\mathcal{C}$ の部分集合 $\mathcal{C}^*$ を

$$\mathcal{C}^* = \{ (S_n) \in \mathcal{C} \mid \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \neq S_m \text{ for } \forall m > N \}$$

により定義する。 S に収束する数列 $(S_n) \in \mathcal{C}^*$ が極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \lambda$$

を持つとき、 $|\lambda| \leq 1$ である。 $\mathcal{C}^*$ の2つの部分集合 LIN , LOG は

$$LIN = \{ (S_n) \in \mathcal{C}^* \mid -1 \leq \lambda < 1, \lambda \neq 0 \}$$

$$LOG = \{ (S_n) \in \mathcal{C}^* \mid \lambda = 1 \}$$

により定義される。それぞれの元を線型収束列、対数収束列という。また、 LOG の部分集合 $LOGSF$ は

$$LOGSF = \{ (S_n) \in LOG \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = 1 \}$$

により定義される。よく知られているように、 LIN は Aitken δ^2 法により加速可能となる (Henrici [4])。また、 LOG および $LOGSF$ は、Delahaye と Germain-Bonne [3] が示したように、加速可能ではない。そこで、 $LOGSF$ の加速可能な部分集合を求めることが問題となる。この問題に対して Kowalewski [5] は詳細な研究を行った。その中で彼女は、与えられた数列の集合から数列変換を得る方法として、 TSE (technique du sous-ensemble) と呼ばれる手法を用い

ている。TSEは、加速可能集合や数列変換の核を調べる上で、有益な道具であるにもかかわらず、これまでほとんど注目されなかった。

本報告では、TSEを定式化し、TSEから得られる数列変換の核について述べる。つづいて、LOGSFのある部分集合にTSEを適用し、得られる数列変換 $T^{[m]}$ の核や $T^{[m]}$ による加速可能集合について調べる。さらに、 $T^{[m]}$ を典型的な数列に適用した場合の誤差の漸近評価も述べ、数値例を与える。

2. 基本的定義

$\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ を数列の集合とする。数列変換 $T: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ と $(S_n) \in \mathcal{S}$ に対し $(T_n) = T(S_n)$ とおく。

T が $(S_n) \in \mathcal{S}$ に対し完全であるとは、 T_m が存在するような任意の自然数 m に対し

$$T_m = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

が成り立つときいう。Tによって完全となる最大の集合をTの核という。

T が $(S_n) \in \mathcal{S}$ を加速するとは、 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ とおいたとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n - S}{S_n - S} = 0$$

となるときいう。数列の集合 $\mathcal{S}$ が加速可能であるとは、 $\mathcal{S}$ 上定義された数列変換 T が存在して、 $\mathcal{S}$ の全ての数列がTにより加速されるときいう。

3. TSE

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とする。自然数 k , $\mathbb{R}^{k+2}$ の開集合 U_n ($n > k$), U_n で連続な実数値関数 $f_n(x_1, \dots, x_{k+2})$, および、 $\mathcal{S}$ の部分集合 $\mathcal{T}$ が存在し、任意の $(S_m) \in \mathcal{S}$ と、 $n > k$ に対し

$$(S_{n-k}, \dots, S_n, S) \in U_n$$

が成立するものと仮定する。ここで S は (S_m) の極限值である。さらに、 $\mathcal{T}$ の部分集合 $\mathcal{I}$ が、 $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 I により

$$\mathcal{T} = \{ (S_n) \in \mathcal{S} \mid \exists \alpha \in I \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(S_{n-k}, \dots, S_n, S) = \alpha \}$$

と表されているものとする。

$\mathcal{T}$ に対するTSEとは、 $\mathcal{T}$ を定義する関数 f_n から以下のように数列変換を導く手法である。

3.1. 第1種のTSE

各 $n > k+1$ に対し, $k+3$ 変数関数 F_n を

$$F_n(x_1, \dots, x_{k+3}) = f_n(x_2, \dots, x_{k+2}, x_{k+3}) - f_{n-1}(x_1, \dots, x_{k+1}, x_{k+3})$$

により定義する. $\mathbb{R}^{k+2}$ の開集合 V_n と V_n で連続な関数 g_n が存在して, 任意の $(x_1, \dots, x_{k+2}) \in V_n$ に対し

$$(x_2, \dots, x_{k+2}, g_n(x_1, \dots, x_{k+2})) \in U_n,$$

$$(x_1, \dots, x_{k+1}, g_n(x_1, \dots, x_{k+2})) \in U_{n-1},$$

$$F_n(x_1, \dots, x_{k+2}, g_n(x_1, \dots, x_{k+2})) = 0$$

が成立すると仮定する. このとき, $\mathcal{S}$ の部分集合

$$\mathcal{D} = \{ (S_n) \in \mathcal{S} \mid (S_{n-k-1}, \dots, S_n) \in V_n \text{ for } \forall n > k+1 \}$$

を定義域とする数列変換 $T: (S_n) \rightarrow (T_n)$

$$T_n = g_n(S_{n-k-1}, \dots, S_n) \quad n > k+1$$

が得られる. T の核は

$$\mathcal{N} = \{ (S_n) \in \mathcal{D} \mid \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ s.t. } f_n(S_{n-k}, \dots, S_n, S) = \alpha \text{ for } \forall n > k \}$$

に含まれる. とくに, $\mathbb{R}^{k+3}$ の開集合 W_n ($n > k+1$) が存在して,

$$F_n(x_1, \dots, x_{k+3}) = 0, \quad (x_1, \dots, x_{k+3}) \in W_n$$

と

$$x_{k+3} = g_n(x_1, \dots, x_{k+2}), \quad (x_1, \dots, x_{k+2}) \in V_n$$

が同値なとき, T の核は $\mathcal{N}$ に一致する.

U_n と f_n が n に無関係なときは, F_n, V_n, g_n も n に無関係である. それぞれ, U, f, F, V, g と表すと, 数列変換 T は

$$T_n = g(S_{n-k-1}, \dots, S_n) \quad n > k+1$$

となる.

3.2. 第2種のTSE

数列 $(S_n) \in \mathcal{S}$ に対し極限值

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(S_{n-k}, \dots, S_n, S)$$

が既知の場合を考える. 各 $n > k$ に対し, $k+2$ 変数関数 F_n^α を

$$F_n^\alpha(x_1, \dots, x_{k+2}) = f_n(x_1, \dots, x_{k+2}) - \alpha$$

により定義する. さらに, $\mathbb{R}^{k+1}$ の開集合 V_n^α と V_n^α で連続な関数 g_n^α が存在して

$$F^{\alpha}_n(x_1, \dots, x_{k+1}, g^{\alpha}_n(x_1, \dots, x_{k+1})) = 0, \quad (x_1, \dots, x_{k+1}) \in V^{\alpha}_n$$

が成立すると仮定する。このとき、 $\mathcal{S}$ の部分集合

$$\mathcal{D}^{\alpha} = \{ (S_n) \in \mathcal{S} \mid (S_{n-k}, \dots, S_n) \in V^{\alpha}_n \text{ for } \forall n > k \}$$

を定義域とする数列変換 $T^{\alpha}: (S_n) \rightarrow (T^{\alpha}_n)$

$$T^{\alpha}_n = g^{\alpha}_n(S_{n-k}, \dots, S_n) \quad n > k$$

が得られる。数列変換 T^{α} の核は、

$$\mathcal{N}^{\alpha} = \{ (S_n) \in \mathcal{D}^{\alpha} \mid f_n(S_{n-k}, \dots, S_n, S) = \alpha \text{ for } \forall n > k \}$$

に含まれる。とくに、 R^{k+2} の開集合 W^{α}_n ($n > k$) が存在して、

$$F^{\alpha}_n(x_1, \dots, x_{k+2}) = 0, \quad (x_1, \dots, x_{k+2}) \in W^{\alpha}_n$$

と

$$x_{k+2} = g^{\alpha}_n(x_1, \dots, x_{k+1}), \quad (x_1, \dots, x_{k+1}) \in V^{\alpha}_n$$

が同値なとき、 T^{α} の核は $\mathcal{N}^{\alpha}$ に一致する。

4. 基本的例

前節において $U_n, V_n, W_n, f_n, F_n, g_n$ が n に無関係の場合を考える。

$$U = \{ (x, y, z) \in R^3 \mid x \neq z \},$$

$$f(x, y, z) = \frac{y-z}{x-z},$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{C}^*$$

とする。このとき、

$$I = [-1, 0) \cup (0, 1)$$

とすると $\mathcal{F} = L \mid N$ であり、

$$I = \{1\}$$

とすると $\mathcal{F} = L \mid O \mid G$ となる。

$L \mid N$ あるいは $L \mid O \mid G$ に、第1種のTSEを適用する。

$$F(x, y, z, w) = \frac{z-w}{y-w} - \frac{y-w}{x-w}$$

とおき、 $F(x, y, z, w) = 0$ を w について解くと

$$w = x - \frac{(y-x)^2}{z-2y+x} = y - \frac{(y-x)(z-y)}{z-2y+x} = z - \frac{(z-y)^2}{z-2y+x}$$

となるので、得られる数列変換はAitken δ^2 -process

$$T_n = S_{n-2} - \frac{(\Delta S_{n-2})^2}{\Delta^2 S_{n-2}}$$

である。ここで、 Δ は

$$\Delta S_n = S_{n+1} - S_n, \quad \Delta^2 S_n = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n$$

を表す。そこで

$$g(x, y, z) = x - \frac{(y-x)^2}{z-2y+x}$$

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z-2y+x \neq 0, x \neq y, y \neq z \}$$

$$W = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y, z) \in V, x \neq w, y \neq w \}$$

とおくと

$$F(x, y, z, w) = 0, \quad (x, y, z, w) \in W$$

と

$$w = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V$$

は同値である。したがって、 T の定義域は

$$\mathcal{D} = \{ (S_n) \in \mathcal{C} \mid \Delta^2 S_n \neq 0 \text{ and } \Delta S_n \neq 0 \text{ for } \forall n \in \mathbb{N} \}$$

であり、 T は $L \cap \mathbb{N} \cap \mathcal{D}$ を加速する。また、 T の核は

$$\mathcal{N} = \{ (S_n) \in \mathcal{D} \mid \exists \lambda (0 < |\lambda| < 1)$$

$$\text{s.t. } S_n = S + (S_1 - S)\lambda^{n-1} \text{ for } \forall n \in \mathbb{N} \}$$

である。(Brezinski[1, p.40]).

なお、 $(S_n) \in L \cap \mathbb{N}$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta S_{n+1} / \Delta S_n < 1$ (Wimp[7, p.6])だから、 n が

十分大きいときには、 $\Delta^2 S_{n-2} \neq 0$ である。(Henrici[4, p.73]). よって、

$$\tilde{T}_n = \begin{cases} T_n & \text{if } \Delta^2 S_{n-2} \neq 0 \\ S_n & \text{if } \Delta^2 S_{n-2} = 0 \end{cases}$$

は $L \cap \mathbb{N}$ 全体を加速する。

5. 数列変換 $T^{(m)}$

S に収束する数列 $(S_n) \in \mathcal{C}^*$ に対し

$$e_n = S_n - S, \quad \lambda_n = 1 - e_{n+1}/e_n$$

とおく。 $L \cap G$ の部分集合 $\mathcal{L}_0$ を

$$\mathcal{L}_0 = \{ (S_n) \in \text{LOGSF} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} = 0 \}$$

により定義する. $\mathcal{L}_0$ は対数収束数列のなかでも特に収束が遅い. そこで, $\mathcal{L}_0$ の加速可能な部分集合を TSE を用いて求める.

はじめに繰り返し対数 $\log^{[m]} x$ と関数 $L^{[m]} x$ を定義しておこう:

$$\log^{[0]} x = x,$$

$$\log^{[m]} x = \log(\log^{[m-1]} x) \quad m = 1, 2, \dots$$

$$L^{[0]} x = x,$$

$$L^{[m]} x = L^{[m-1]} x \log^{[m]} x \quad m = 1, 2, \dots$$

$\log^{[m]} x$ および $L^{[m]} x$ の定義域は

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid \log^{[m-1]} x > 0 \}$$

である.

LOGSF の部分集合の次のような 2 つの系列を考える: $m = 0, 1, 2, \dots$ に対し

$$\mathcal{S}^{[m]} = \{ (S_n) \in \text{LOGSF} \mid \exists \alpha > 0 \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} L^{[m]} n \lambda_n = \alpha \},$$

$$\mathcal{T}^{[m]} = \{ (S_n) \in \mathcal{S}^{[m]} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} L^{[m]} n \Delta \varepsilon_n = 0 \}.$$

ここで, $\varepsilon_n = L^{[m]} n \lambda_n - \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ とする.

いま, $\mathcal{S}^{[m]} (m = 0, 1, 2, \dots)$ に第 1 種の TSE を適用する. 3 節の U_n, f_n として

$$U_n = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq x_3 \}$$

$$f_n(x_1, x_2, x_3) = L^{[m]}(n-1) \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_3}$$

とおく.

$$F_n(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_n(x_2, x_3, x_4) - f_{n-1}(x_1, x_2, x_4) = 0$$

つまり

$$L^{[m]}(n-1) \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_4} = L^{[m]}(n-2) \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_4}$$

を x_4 について解くと

$$x_4 = x_2 + \frac{L^{[m]}(n-1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)}{L^{[m]}(n-2)(x_2 - x_1) - L^{[m]}(n-1)(x_3 - x_2)}$$

となる.

$$V_n = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid L^{[m]}(n-2)(x_2 - x_1) \neq L^{[m]}(n-1)(x_3 - x_2), \\ x_1 \neq x_2, x_2 \neq x_3 \}$$

$$W_n = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid (x_1, x_2, x_3) \in V_n, x_2 \neq x_4 \}$$

$$g_n(x_1, x_2, x_3) = x_2 + \frac{L^{[m]}(n-1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)}{L^{[m]}(n-2)(x_2 - x_1) - L^{[m]}(n-1)(x_3 - x_2)}$$

とすると

$$F_n(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W_n$$

と

$$x_4 = g_n(x_1, x_2, x_3), \quad (x_1, x_2, x_3) \in V_n$$

は同値になる.

3節の結果より, 数列変換 $T^{[m]}$ を得る:

$$T^{[m]}_n = S_{n-1} + \frac{L^{[m]}(n-1) \Delta S_{n-1} \Delta S_{n-2}}{L^{[m]}(n-2) \Delta S_{n-2} - L^{[m]}(n-1) \Delta S_{n-1}}, \quad n \geq n_0$$

ここで, $\log^{[m]}(n_0 - 2) > 0$ とする.

$T^{[m]}$ の定義域は

$$\mathcal{D}^{[m]} = \{ (S_n) \in \mathcal{C}^* \mid \Delta S_n \neq 0, L^{[m]}(n) \Delta S_n \neq L^{[m]}(n+1) \Delta S_{n+1} \\ \text{for } \forall n \geq n_0 - 2 \}$$

であり, 核は

$$\mathcal{N}^{[m]} = \{ (S_n) \in \mathcal{D}^{[m]} \mid \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ s.t. } L^{[m]}_n \lambda_n = \alpha \}$$

である.

定理 1. 整数 $m \geq 0$ と数列 $(S_n) \in \mathcal{S}^{[m]}$ に対し,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T^{[m]}_n - S}{S_n - S} = 0$$

が成り立つための必要十分条件は, $(S_n) \in \mathcal{J}^{[m]}$ である.

証明. $(S_n) \in \mathcal{J}^{[m]}$ だから, $\alpha > 0$ と零に収束する数列 (ε_n) が存在して

$$L^{[m]}_n \lambda_n = \alpha + \varepsilon_n$$

となる.

$$\begin{aligned}\frac{T^{[m]}_n - S}{S_n - S} &= \frac{S_{n-1} - S}{S_n - S} + \frac{L^{[m]}(n-1) \Delta S_{n-1} \Delta S_{n-2}}{e_n (L^{[m]}(n-2) \Delta S_{n-2} - L^{[m]}(n-1) \Delta S_{n-1})} \\ &= \frac{e_{n-1}}{e_n} \left[1 - \frac{(\alpha + \varepsilon_{n-1})(\alpha + \varepsilon_{n-2})}{(\alpha + \varepsilon_{n-1})(\alpha + \varepsilon_{n-2}) - L^{[m]}(n-2) \Delta \varepsilon_{n-2}} \right]\end{aligned}$$

より求める結果が得られる. $\square$

系 2. $(S_n) \in \mathcal{T}^{[m]}$ に対し,

$$\begin{aligned}T^{[m]}_n - S &= (S_{n-1} - S) \left[- \frac{L^{[m]}(n-2) \Delta \varepsilon_{n-2}}{(\alpha + \varepsilon_{n-1})(\alpha + \varepsilon_{n-2})} + O((L^{[m]}(n-2) \Delta \varepsilon_{n-2})^2) \right].\end{aligned}$$

とくに, $|\varepsilon_{n-1}| + |\varepsilon_{n-2}| = o(L^{[m]}(n-2) \Delta \varepsilon_{n-2})$ のときは

$$\begin{aligned}T^{[m]}_n - S &= (S_{n-1} - S) \left[- \alpha^{-2} L^{[m]}(n-2) \Delta \varepsilon_{n-2} + O((L^{[m]}(n-2) \Delta \varepsilon_{n-2})^2) \right].\end{aligned}$$

定理 3. 任意の自然数 m に対し, $\mathcal{T}^{[m]} \subset \mathcal{L}_0$.

証明. $(S_n) \in \mathcal{T}^{[m]}$ に対し, $\alpha > 0$ と零に収束する数列 (ε_n) が存在して

$$\begin{aligned}L^{[m]}_n \lambda_n &= \alpha + \varepsilon_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} L^{[m]}_n \Delta \varepsilon_n &= 0\end{aligned}$$

となる. よって

$$\begin{aligned}\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} &= \frac{e_{n+1}}{e_n} \frac{L^{[m]}_n (\alpha + \varepsilon_{n+1})}{L^{[m]}(n+1)(\alpha + \varepsilon_n)} \\ &= (1 - \lambda_n) \frac{L^{[m]}_n}{L^{[m]}(n+1)} [1 + O(\Delta \varepsilon_n)]\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}L^{[m]}(n+1) \left(1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \right) &= L^{[m]}(n+1) - L^{[m]}_n + \alpha + \varepsilon_n + O(L^{[m]}_n \Delta \varepsilon_n).\end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{\lambda_{n+1}}{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} = \frac{\alpha + \varepsilon_{n+1}}{L^{[m]}(n+1) - L^{[m]}n + \alpha + \varepsilon_n + O(L^{[m]}n \Delta \varepsilon_n)}$$

より, $m > 0$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L^{[m]}(n+1) - L^{[m]}n) = \infty$$

であることに注意すれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n+1}}{1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}} = 0$$

が成立する. $\square$

$\mathcal{T}^{[m]}$ に関するさらに詳しい性質については, Osada[6]を見よ.

6. 加速列 $(T^{[m]}_n)$ の誤差の漸近公式

数列 (S_n) がある種の漸近展開を満たす場合の, 加速列 $(T^{[m]}_n)$ の誤差の漸近公式 ($m=1, 2$) を述べる.

命題 4. 数列 (S_n) が,

$$S_n - S = (\log n)^\alpha \left[c_0 + \frac{c_1}{n \log n} + \frac{c_2}{n^2 \log n} + O\left(\frac{1}{n^2 (\log n)^2}\right) \right]$$

を満たすものとする. ここで, α は負の実数で, $c_0 \neq 0$, $(\alpha/2) + (c_1/c_0) \neq 0$ とする. このとき, $(S_n) \in \mathcal{T}^{[1]}$ で,

$$T^{[1]}_n - S = \frac{c_0}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{c_1}{c_0} \right) \frac{(\log n)^{\alpha+1}}{n} + O\left(\frac{(\log n)^\alpha}{n}\right).$$

証明 Maclaurin 展開から得られる漸近公式

$$\begin{aligned} (\log(n+1))^\alpha - (\log n)^\alpha &= \frac{\alpha}{n} (\log n)^{\alpha-1} - \frac{\alpha}{2n^2} (\log n)^{\alpha-1} \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2n^2} (\log n)^{\alpha-2} + O\left(\frac{(\log n)^{\alpha-1}}{n^3}\right), \end{aligned}$$

$$\frac{(\log(n+1))^\alpha}{(n+1)^k} - \frac{(\log n)^\alpha}{n^k} = -\frac{k(\log n)^\alpha}{n^{k+1}} + \frac{\alpha(\log n)^{\alpha-1}}{n^{k+1}} + O\left(\frac{(\log n)^\alpha}{n^{k+2}}\right)$$

を繰り返し用いることにより,

$$\begin{aligned} \Delta S_n = c_0 \alpha \frac{(\log n)^{\alpha-1}}{n} & \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{c_1}{c_0 \alpha} \right) \frac{1}{n} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\alpha-1}{2} + \frac{c_1(\alpha-1)}{c_0 \alpha} \right) \frac{1}{n \log n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S_n}{e_n} = \frac{\alpha}{n \log n} & \left[1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{c_1}{c_0 \alpha} \right) \frac{1}{n} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\alpha-1}{2} - \frac{c_1}{c_0 \alpha} \right) \frac{1}{n \log n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \end{aligned}$$

が得られる。よって,

$$\begin{aligned} n \log n \frac{\Delta S_n}{e_n} = \alpha - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{c_1}{c_0} \right) \frac{1}{n} & + \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} - \frac{c_1}{c_0} \right) \frac{1}{n \log n} \\ & + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

これより, $(S_n) \in \mathcal{T}^{(1)}$ が成り立つ.

$$\Delta \varepsilon_n = -\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{c_1}{c_0} \right) \frac{1}{n^2} + \left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} - \frac{c_1}{c_0} \right) \frac{1}{n^2 \log n} + O\left(\frac{1}{n^2 (\log n)^2}\right)$$

と系 2 より

$$\begin{aligned} T^{(1)}_n - S &= e_{n-1} \left[-\alpha^{-2} (n-2) \log(n-2) \Delta \varepsilon_{n-2} + O((n-2) \log(n-2) \Delta \varepsilon_{n-2}^2) \right] \\ &= \frac{c_0}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{c_1}{c_0} \right) \frac{(\log n)^{\alpha+1}}{n} + O\left(\frac{(\log n)^\alpha}{n}\right) \quad \square \end{aligned}$$

命題 5. 数列 (S_n) が,

$$S_n - S \sim (\log n)^\alpha \left[c_0 + \frac{c_1}{\log n} + \frac{c_2}{(\log n)^2} + O\left(\frac{1}{(\log n)^3}\right) \right]$$

を満たすものとする。ここで, α は負の実数で, $c_0 \neq 0$ である。このとき,

$(S_n) \in \mathcal{T}^{(1)}$ で,

$$T^{[1]}_n - S = \frac{c_1}{\alpha^2} (\log n)^{\alpha-1} + O((\log n)^{\alpha-2}).$$

証明. 命題 4 と同様である.

命題 6. 数列 (S_n) が,

$$S_n - S = (\log^{[2]} n)^\alpha \left[c_0 + \frac{c_1}{n \log n \log^{[2]} n} + O\left(\frac{1}{n^2 \log n (\log^{[2]} n)^2} \right) \right]$$

を満たすものとする. ここで, α は負の実数で, $c_0 \neq 0$, $(\alpha/2) + (c_1/c_0) \neq 0$ とする. このとき, $(S_n) \in \mathcal{F}^{[2]}$ である. さらに

$$T^{[2]}_n - S = \frac{c_0}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{c_1}{c_0} \right) \frac{\log n (\log^{[2]} n)^{\alpha+1}}{n} + O\left(\frac{(\log^{[2]} n)^{\alpha+1}}{n} \right).$$

証明. 命題 4 と同様である.

7. 数値例

例 1 級数の部分和

$$S_n = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j(\log j)^2}$$

を考える. Euler-Maclaurin の公式より, 漸近展開

$$S_n - S = \frac{-1}{\log n} + \frac{1}{2n(\log n)^2} - \frac{(\log n) + 2}{12n^2(\log n)^3} + \frac{3(\log n)^3 + 11(\log n)^2 + 18(\log n) + 12}{360n^4(\log n)^5} + O\left(\frac{1}{n^6(\log n)^2} \right)$$

が得られる. この漸近展開より

$$S = 2.10974 \ 28012 \ 36892$$

も計算できる. 命題 4 より, $(S_n) \in \mathcal{F}^{[1]}$ がいえる.

S_n と $T^{[1]}_n$ の有効桁数 ($= -\log_{10} |\text{誤差}|$) を表 1 に示す. それぞれ, およそ $\log_{10}(\log n)$, $\log_{10} n$ である.

例 2 数列

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{\log n}\right)^{1/2}$$

を考える. 2項展開により

$$S_n \sim 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{1/2}{j} (\log j)^{-j}$$

が成り立つ. 命題 5 より, $(S_n) \in \mathcal{F}^{[1]}$ がいえる.

S_n と $T^{[1]}_n$ の有効桁数を表 1 に示す. それぞれ, およそ $\log_{10} 2 + \log_{10}(\log n)$, $\log_{10} 8 + 2 \log_{10}(\log n) (= -\log_{10}(1/8(\log n)^2))$ となっている.

例 3 級数の部分和

$$S_n = \sum_{j=4}^n \frac{1}{j \cdot \log j (\log^{[2]} j)^2}$$

を考える. Euler-Maclaurin の公式より, 漸近展開

$$\begin{aligned} S_n - S &= \frac{-1}{\log^{[2]} n} + \frac{1}{2n(\log n)(\log^{[2]} n)^2} \\ &\quad - \frac{(\log n)(\log^{[2]} n) + \log^{[2]} n + 2}{12n^2(\log n)^2(\log^{[2]} n)^4} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{n^4(\log n)(\log^{[2]} n)^2}\right) \end{aligned}$$

が得られる. この漸近展開より

$$S = 4.10340 \ 05972 \ 00226$$

が計算できる. 命題 6 より, $(S_n) \in \mathcal{F}^{[2]}$ がいえる.

S_n と $T^{[2]}_n$ の有効桁数を表 1 に示す. それぞれ, およそ $\log_{10}(\log^{[2]} n)$, $\log_{10} n - \log_{10}(\log n) (= -\log_{10}((\log n)/n))$ となっている.

表 1. $T^{[m]}$ 変換の有効桁数

n	例 1		例 2		例 3	
	S_n	$T^{[1]}_n$	S_n	$T^{[1]}_n$	S_n	$T^{[2]}_n$
6	0.27	-0.40	0.61	0.47	-0.20	-1.10
7	0.30	-0.08	0.64	0.63	-0.15	-1.49
8	0.33	0.12	0.66	0.76	-0.12	-0.81
9	0.35	0.26	0.69	0.86	-0.09	-0.54
10	0.37	0.37	0.70	0.94	-0.07	-0.38
20	0.48	0.92	0.81	1.37	0.04	0.26
30	0.53	1.18	0.86	1.57	0.09	0.51
40	0.57	1.34	0.89	1.70	0.12	0.66
50	0.59	1.46	0.92	1.79	0.14	0.77
100	0.66	1.82	0.99	2.04	0.18	1.09
200	0.72	2.16	1.04	2.24	0.22	1.39
300	0.76	2.35	1.08	2.34	0.24	1.55
400	0.78	2.48	1.10	2.41	0.25	1.67
500	0.79	2.58	1.11	2.45	0.26	1.76
1000	0.84	2.90	1.16	2.58	0.29	2.04
2000	0.88	3.21	1.20	2.68	0.31	2.31
3000	0.90	3.39	1.22	2.73	0.32	2.47
4000	0.92	3.52	1.23	2.77	0.33	2.59
5000	0.93	3.62	1.24	2.79	0.33	2.68
10000	0.96	3.93	1.28	2.87	0.35	2.95
20000	1.00	4.23	1.31	2.93	0.36	3.23
30000	1.01	4.40	1.32	2.97	0.37	3.39

10進約16桁

PC-9801VM

8. 結論

数列の集合から数列変換を導き出す方法 T S E は、加速可能集合や数列変換の核の研究に役立つ。収束の速度が極めて遅い $\mathcal{L}_0$ の部分集合に T S E を適用して得られる変換 $T^{[1]}$, $T^{[2]}$ は、 $1/\log n$ や $1/\log(\log n)$ の order で収束する数列を、 $1/n$, $1/(\log n)^2$ あるいは $(\log n)/n$ などの order で収束する数列に変換するので、許容誤差が比較的大きいときには、実用に使える。

$T^{[1]}$, $T^{[2]}$ 変換は、繰り返し適用や、他の加速法との組み合わせにより、高精度の結果を与えることがある。これについては、今後の課題である。

命題 4, 5, 6 は、研究集会の際の鳥居達生教授との討論から示唆を受けた。ここに記して感謝する。

参考文献

- [1] C. Brezinski, Accélération de la Convergence en Analyse Numérique, Lecture Notes in Math. 584, Springer-Verlag, 1977.
- [2] C. Brezinski, A new approach to convergence acceleration methods, in A. Cuyt (ed.), Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation, D. Reidel Publishing Company, 373-405, 1988.
- [3] J. P. Delahey and B. Germain-Bonne, The set of logarithmically convergent sequences cannot be accelerated, SIAM J. Numer. Anal. 19(1982), pp. 840-844.
- [4] P. Henrici, Elements of Numerical Analysis, John Wiley and Sons, 1964. [一松・平本・本田共訳, 数値解析の基礎, 培風館(1973).]
- [5] C. Kowalewski, Accélération de la convergence pour certaines suites à convergence logarithmique, Lecture Notes in Math. 888, pp. 263-272, Springer-Verlag, 1981.
- [6] N. Osada, Accelerable subsets of logarithmic sequences, J. Comp. Appl. Math. (to appear).
- [7] J. Wimp, Sequence Transformations and Their Applications, Academic Press, 1981.