

積分曲線の群法則と

ゼータ-函数

阪大 理 本田 平

R が単位元をもつ可換環のとき, R 係数の 2 変数の整級数 $F(x, y)$ で

$$(1) \quad F(x, 0) = x, \quad F(0, y) = y$$

$$(2) \quad F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z))$$

をみたすものを R 上の (1 次元) 形式群という。 G を R 上の他の形式群とすると、 R 上の整級数 $f(x) = x + \dots$ で

$$f(F(x, y)) = G(f(x), f(y))$$

をみたすものがあれば G は F に (強い意味で) 同値であるという。 R が標数 0 の整域のときは F はつねに可換

$$(3) \quad F(x, y) = F(y, x)$$

であり、 R の商体 K では加法群 $G(x, y) = x + y$ に同値であることが知られている。従って F (の同値類) を与ええるには

$$f(F(x, y)) = f(x) + f(y)$$

となる (K 係数の) f をあたえればよい。あるいは F 上の不変微分形式は $f'(x)dx$ を底にもつから、 F を知るれば F 上の不変微分形式を知ればよいことになる。

今 Gauss の整数環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 上の乗法群 $F(x, y) = x + y - \sqrt{-4}xy$ を考えると F 上の不変微分形式は $(1 - \sqrt{-4}x)^{-1}dx$ である。ここで $x = t/(1 + \sqrt{-1}t)$ なる変換をほどこすと

$$(1 - \sqrt{-4}x)^{-1}dx = (1 + t^2)^{-1}dt$$

となるから F は $(1 + x^2)^{-1}dx$ を不変微分形式とする $\mathbb{Z}$ 上の形式群 (その群法則は $\tan$ の加法定理!) に $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ と同値である。ところで

$$(1 + x^2)^{-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} dx$$

とおいてゼリクレ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ を作るとこれは $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ に対応するゼリクレの L 函数に他ならない。このように可換な群多様体の群法則とゼータ函数の間には密接な関係があるが、以下 $\mathbb{Q}$ 上の 1 次元アーベル多様体 (以下楕円曲線とよぶ) についてこの関係をおべたい。

$\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E の方程式は

$$(4) \quad Y^2 + \lambda XY + \mu Y = X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$$

$$(\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z})$$

の形にかけらる。Néron は E のモデルとして (4) の判別式を

出来るだけ小さくしたものの (極小モデル) が本質的に一意に存在することを示した。以下 E は (4) の極小モデルとする。

無限遠点 ∞ を原点ととり, $t = X/Y$ を ∞ における局所座標として t で E の群法則を展開すると $\mathbb{Z}$ 上の形式群 $\hat{E}$ となる。

p を素数としモデル (4) について $E_p = E \bmod p$ を考えるとこれは $GF(p)$ 上の代数群となるが, その単位元の連結成分は (i) E_p が特異点をもたないときは楕円曲線, (ii) E_p が結節点を持ちその点での接線が $(GF(p))$ 上有理的のときは $GF(p)$ 上乘法群に同型, (iii) E_p が結節点を持ちその点での接線が有理的でないときは $GF(p^2)$ 上 (はじめて) 乘法群に同型, (iv) E_p が尖点をもつときは加法群に同型となることが知られている。この各の場合に対し E_p の局所 L 函数 $L_p(s)$ を次のように定義する。 (i) E_p のゼータ-函数の分子を $U^2 - a_p U + p$ とするとき $L_p(s) = (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1}$, (ii) $L_p(s) = (1 - p^{-s})^{-1}$, (iii) $L_p(s) = (1 + p^{-s})^{-1}$, (iv) $L_p(s) = 1$ 。そして E の大域的 L 函数を $L(s) = \prod_p L_p(s)$ と定義する。このとき次の定理が成立する:

[定理] S を条件

(*) $p \mid a_p$ かつ $a_p \neq 0$ ならば S は p を含まない
をみたす素数の任意の集合とし,

$$L_S(s) = \prod_{p \in S} L_p(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

とおくとき $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} dx$ を不変微分形式とする形式群は $\mathbb{Z}$ 係数で、 $\mathbb{Z}_S$ 上 $\hat{E}$ に同値である。ここで $\mathbb{Z}_S$ は分母が S にや
くする素数でわけたような有理数全体の作る環とする。

(注意: $p \mid a_p$ かつ $a_p \neq 0$ が起きるのは $p=2$ または 3 の場合にかぎり、このとき $L_p(1) = 1 \pm p^{1-1} + p^{1-2}$ となる
ことが Riemann 予想から容易にたしかめられる。条件(*)
を除いても定理は正しいと予想されるがまだ証明は出来てい
ない。)

この定理は保型関数で一意化される代数曲線のゼータ関
数に関する Eichler-志村の定理から着想を得たもので、局
所的または大域的整数環上ある種の重要な形式群^① 具体的な
構成をあたえる一般的定理から導かれるのであるが、ここ
ではその詳細は省く。この定理は、楕円曲線の L 関数の係数
がその楕円曲線の群法則の 1 つの標準形をあたえることと述
べるもので、また S は (条件(*)があれば) 任意でよいこと
から楕円曲線の群法則がその局所整数環上の群法則のいわば
“直積” になっていることを示すものである。これからいく
つかの興味ある結果が得られ、またいくつかの問題が生ずる。
たとえば E_1 と E_2 を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とするとき、 $\hat{E}_1$ と $\hat{E}_2$
が $\mathbb{Z}$ 上同値 (あるいは isogenous) のとき E_1 と E_2 の間
にはどのような関係があるのであるのか? これなどはア-

ベル多様体の準同型に関する Tate 予想とも関連して解明が
待たれる問題である。

以上