

Abelian Garnier系について

熊本大学理 数学 梅村 浩 (Hiroshi Umemura)

次の2つのことがよく知られてゐる。

(1) Jacobi自身による, 超楕円曲線のJacobi多様体の構成. 即ち, $C: y^2 = f(x)$ を超楕円曲線とする. f の次数を $2k-1$ 次とすれば, そのgenus g は $k-1$ に等しい. このとき

$$J^g(C) \cong \{ U, V, W \mid f - V^2 = UW, U, W \text{ は monic } \bar{\mathbb{C}} \text{ 上で } \deg V \leq k-2, \deg U = k-1, \deg W = k \}$$

が成立する (Mumford の Tate 講義 11 参照). ここで,

$y^2 = f(x)$ は $\det \begin{bmatrix} V & U \\ W & -V \end{bmatrix} - y I_2 = 0$ と書けることに注意する. この応用として, C. Neumann の力学系

$$\dot{x}_i = y_i$$

$$\dot{y}_i = -a_i x_i + x_i \left(\sum_{k=1}^n (a_k x_k^2 - y_k^2) \right) \quad (1 \leq i \leq n)$$

(ここで, $\sum_{i=1}^n x_i^2(t) = 1$, $\bullet = \frac{d}{dt}$ とする) の超楕円曲線のJacobi多様体による積分がある^(*). この力学系はわかり, 代数的に

(*) a_i は定数

完全積分可能である。

(2) Painlevé 方程式, 例えば $y'' = 6y^2 + x$ は Hamilton 系であることが知られている^(*) $H = \frac{1}{2} y'^2 - 2y^3 - xy$ とすれば,

$$dy/dx = \partial H / \partial y, \quad dw/dx = -\partial H / \partial y \quad \text{より} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 6y^2 + x,$$

さらに, この退化として, $y'' = 6y^2$ があり, これは楕円関数で積分できる。これを (1), (2) の一般化を行う。

線型微分方程式

$$(1) \quad \frac{dy_k}{dx} = \sum_{h=1}^m y_h \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_{hk}^i}{x-x_i} \quad k=1, 2, \dots, m$$

を考へる, 但し $t_{n+1} = 0, t_{n+2} = 1$ と仮定する。

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' = ya$$

と書ける。ここで, $a = \left(\sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_{hk}^i}{x-x_i} \right)$ は $m \times m$ 正方行列であり, y は (1) の m 個の独立解のつくる $m \times m$ 行列である。

A_{hk}^i を $t_1, t_2, \dots, t_n$ の関数とし, $t_1, t_2, \dots, t_n$ を動かしたとき (1) のモノドロミー群が $t_1, t_2, \dots, t_n$ に関係しなれば各条件を求める。モノドロミー保存変形を考察する。

$\mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ の座標であるが, $\mathbb{C}$ の閉曲線に沿っての解析接続を S とあらわす。即ち $Sy = Ay$ 従って $|A| \neq 0, \frac{\partial A}{\partial x} = 0$ 。つまり, 我々が求める条件は, 任意の閉曲線について, $\partial A / \partial t = 0$ なる解の存在する条件に他ならない。

^(*) Painlevé 方程式は線型常微分方程式のモノドロミー保存変形を言及している。

$t_0 = x$ と置く. さらに $y + \frac{\partial y}{\partial t_i} = \beta_i$ と置く. 特に $\beta_0 = a$ である.

$$(3) \quad \left(\frac{\partial S y}{\partial t_i} \right) = \frac{\partial A y}{\partial t_i} = \left(\frac{\partial A}{\partial t_i} \right) y + A \frac{\partial y}{\partial t_i} = A y \beta_i,$$

$$(4) \quad S \left(\frac{\partial y}{\partial t_i} \right) = S(y \beta_i) = S y S \beta_i = A y S \beta_i.$$

S は x に関して 2 の解析接続であるので,

$$\frac{\partial(S y)}{\partial t_i} = S \left(\frac{\partial y}{\partial t_i} \right) \quad (i \geq 1).$$

(5) (4) より, $A y \beta_i = A y S \beta_i \quad (i \geq 1). \quad |A|, \quad y| \neq 0.$
 であるので, $\beta_i = S \beta_i \quad i \geq 1$ となる.*

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} = y \beta_i \quad (0 \leq i \leq m)$$

の積分可能条件より, 即ち $\partial^2 y / \partial t_i \partial t_j = \partial^2 y / \partial t_j \partial t_i$
 $0 \leq i, j \leq m$ より,

$$y \beta_j \beta_i + y \frac{\partial \beta_i}{\partial t_j} = y \beta_i \beta_j + y \frac{\partial \beta_j}{\partial t_i}$$

を得る.

$$(6) \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial t_j} - \frac{\partial \beta_j}{\partial t_i} = \beta_i \beta_j - \beta_j \beta_i.$$

(*) より β_i は $\mathbb{C}$ 上一定である. 又逆に上の計算から, β_i が $\mathbb{C}$ 上一定であれば, $\frac{\partial A}{\partial t_i} = 0 \quad (1 \leq i \leq m)$ となる.

このとき, β_i の型は限定されよう。

補題 (6) $\beta_i = -\frac{A^i}{x-t_i} + r_i \quad (1 \leq i \leq n)$ が成立する。こ
こで, r_i は x の関数では有り ($\partial r_i / \partial x = 0$),

(c.e. $\partial C / \partial x = 0$)

さて C を x について定数である正則 $m \times m$ 行列とすると,
 $y = YC$ と置くと,

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = Y C A C^{-1}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t_i} = Y C_i$$

そこで, $C_i = C \beta_i C^{-1} - \frac{\partial C}{\partial t_i} C^{-1}$ と存する。つまり, r_i は
 $C r_i C^{-1} - (\partial C / \partial t_i) C^{-1}$ にかわる。

従って, (6) 微分方程式

$$(7) \quad \partial C / \partial t_i = C r_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

が解けるならば, $r_i = 0$ と仮定できる。

(7) は実際に解を持つことを示す。実際, (6) を (5) に代入すると,
 $\partial r_i / \partial t_j - \partial r_j / \partial t_i = r_i r_j - r_j r_i$

となり, (7) は完全積分可能となる。

以上より, 我々の求める条件は (5) と同値となり, したがって
 $\beta_i = -\frac{A^i}{(x-t_i)} + r_i$ と仮定してよい。(5) より,

$$(8) \quad -\frac{1}{x-t_i} \frac{\partial A^i}{\partial t_j} + \frac{1}{x-t_j} \frac{\partial A^j}{\partial t_i} = \frac{A^i A^j - A^j A^i}{(x-t_i)(x-t_j)}$$

$$(1 \leq i, j \leq n)$$

$$(9) \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial t_i} = \beta_i a - a \beta_i \quad (1 \leq i \leq n).$$

を得る。条件 (8), (9) がモノドロミーが $t_1, t_2, \dots, t_n$ に依らない必要十分条件である。

(8), (9) より計算により次の結果を得る。

命題 (Schlesinger)。 微分方程式 (1) のモノドロミーが $t_1, t_2, \dots, t_n$ に依らない必要十分条件は、 A^i が次の微分方程式を満たすことである⁽⁹⁾：

$$(A_+) \quad \begin{cases} \frac{\partial A^i}{\partial t_i} = \frac{[A^0, A^i]}{t_j - t_i} & (i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq n), \\ \frac{\partial A^i}{\partial t_i} = [A^i, \sum_{l \neq i} \frac{A^l}{t_i - t_l}] & (i=1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

(A₊)
微分方程式系 V は Painlevé 方程式を一般化するところ、難しい超越関数を一般には定義してやる。今回、我々が興味を持つのは、その退化である。

即ち、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+2} \in \mathbb{C}$ を互いに異なる複素数とする。

$$x_i = \alpha_i + \varepsilon \bar{x}_i, \quad A^0 = \varepsilon^{-1} \bar{A}^0 \quad \text{とあり、} \quad \varepsilon = 0 \quad \text{とする}$$

と、

即ち $A^i = (A^i_{kl})_{1 \leq k, l \leq n}$ は n 次正行列になっている。

$$(\bar{A}_\alpha) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{A}^i}{\partial \bar{t}_i} = \frac{[\bar{A}^i, \bar{A}^j]}{\alpha_j - \alpha_i}, \\ \frac{\partial \bar{A}}{\partial t_i} = \left[\bar{A}^i, \sum_{l \neq i} \frac{\bar{A}^l}{\alpha_i - \alpha_l} \right]. \end{cases}$$

を得る。記号を簡単にする為に、 $\bar{A}^i, \bar{t}_i$ を再び A^i, t_i と置く。

$$(A_\alpha) \quad \begin{cases} \frac{\partial A^i}{\partial t_i} = \frac{[A^i, A^j]}{\alpha_j - \alpha_i}, \\ \frac{\partial A^i}{\partial t_i} = \left[A^i, \sum_{l \neq i} \frac{A^l}{\alpha_i - \alpha_l} \right] \end{cases}$$

とする。

(A) は通常 Schlesinger 系と呼ばれている。(A_α) は Garnier によつて初めて導入された。Garnier 系という言葉は別の意味に既に使用されているので、(A_α) を Abelian Garnier 系と呼ぼう。

さて、 $\alpha_{m+1} = 0, \alpha_{m+2} = 1$ と仮定する。 $\mathbb{C}$ の affine 変換に於て、この様に仮定しても構わない。

$$\prod_{i=1}^{n+2} (x - \alpha_i) = x(x-1) \prod_{i=1}^m (x - \alpha_i) = \varphi(x)$$

と置く。さらに $\varphi(x) = \varphi(x) a(x)$ とする。 $\varphi(x)$ は m 正行列式であつて、その成分 $\varphi_{kl}(x)$ は高々 $n+1$ 次の多項式で

ある.

補題 次の条件は同値である.

(1) A^λ は (A_λ) を満たす.

(2) $\exists \theta/\theta_i = [A^\lambda, \theta]/(x - \alpha_i) \quad (1 \leq i \leq m)$ が成立する.

基本定理 (Germien). $\chi(\lambda, \eta) = |y I_m - \theta \eta|$ と置く.

A^λ が (A_λ) を満たせば, $\chi(\lambda, \eta)$ の係数は $t_1, t_2, \dots, t_m$ の定数である. 言い換えれば, $\chi(\lambda, \eta)$ の係数は (A_λ) の θ 1 積分である^(*).

証明 この補題を用いて計算すればよい.

基本定理は, 分々はモノドロミー保存変形から出発した
がスペクトル保存変形を得たことを示している.

さて次に, Spectral 曲線により説明する.

$S_d = \{ \chi(x) \in \mathbb{C}[x] \mid \deg \chi \leq d \}$ とおく. $\chi(y, x) = y^m + s_1(x)y^{m-1} + \dots + s_m(x) \in \mathbb{C}[y, x]$, $\deg s_i(x) \leq ik$ を考える (ここで k は非負整数である). 平面曲線 $\chi(y, x) = 0$ 又はそのモ
^(*)2変数の多項式 $\chi(\lambda, \eta)$ の係数のことを意味する.

これを Spectral 曲線としよう. $A(x) \in M_m(S_{m+1})$ とおけば
 固有方程式 $|yI_m - A(x)| = 0$ は Spectral 曲線となる. 序文
 に書いた超楕円曲線は Spectral 曲線である. 以下 $y(y, x) = 0$
 の $A^2 \subset \mathbb{P}(O \oplus O(-m-1))$ における閉区間は既約, 非特異とす
 る ($k = m+1$). $k = m+1$ とし $\mathbb{P}^1$ 上の $y(y, x) = 0$ の genus
 を計算しよう.

$\pi: F_{m+1} = \mathbb{P}(O \oplus O(-m-1)) \rightarrow \mathbb{P}^1$ は projection とする.
 π の section D_∞ で $\pi_*(D_\infty) = O \oplus O(-m-1)$ とする t
 のが存在する. $D_\infty^2 = -(m+1)$, $l = \pi^* \infty$ ($\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$)
 とおけば, $(D_\infty, l) = 1$, $(l, l) = 0$.

$C = m(D_\infty + (m+1)l)$ と linearly equivalent と
 あることを示せる. さらに, $K_{F_{m+1}} = -2D_\infty - (m+3)l$ と
 あるので, adjunction 公式によれば,

$$(K + C, C) = 2g - 2$$

即ち $g = \frac{m(m-1)(m+1)}{2} - m + 1.$

定理 ([B]). $C: p(y, x) = 0$ は Spectral 曲線とする.

$$M_p = \{ A \in M_m(S_{m+1}) \mid \det(yI_m - A(x)) = p(y, x) \}$$
 とおく.

$\text{PGL}_m(\mathbb{C})$ は M_p に自由かつ固有に作用し,

$$J^{-1}(C) - \Theta \simeq M_p / \text{PGL}_m(\mathbb{C}).$$

(*) $p(y, x) = y^m + s_1(x)y^{m-1} + \dots + s_m(x)$, $s_i(x) \in S_i(m+1).$

ここで, $J^{q-1}(C)$ は C 上の次数 $q-1$ の直線束 L の同型類全体, ④ は λ の内 $H^0(L) \neq 0$ とする L 全体を表わす.

証明のスケッチ C 上の直線束 L を与えることは, 階数 m の $\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束 $\pi_* L$ および $\pi_* \mathcal{O}_C$ -module の構造を λ の上によえ, ことと同値である ($\pi: F_{n+1} \rightarrow \mathbb{P}^1$ の C への制限 $\pi: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ を表わす). $E = \pi_* L$ 上に $\pi_* \mathcal{O}_C$ -module の構造を与えることは, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ -algebra 準同型 $\pi_* \mathcal{O}_C \rightarrow \text{End } E$ を与えることと同値, これは $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ -linear map: $u: E \rightarrow E(n+1)$ である, $\mathbb{Z}$, $P(u, x) = 0$ を満たす x の λ によるものと同値. $L \in J^{q-1}(C)$ - ④ とすれば, $H^0(L) = H^1(L) = 0$ であり $\pi_* L \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^m$. 逆に, $\pi_* L \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^m$ ならば, $L \in J^{q-1}(C)$ - ④. 従って $\mathbb{Z}$ $v: \pi_* L \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^m$ を固定すれば $v^{-1} u v: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^m \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)^m$. 故に,

$$\{ L \in J^{q-1}(C) - \text{④} \mid \text{同型 } v: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^m \xrightarrow{\sim} \pi_* L \}$$

$$\simeq \{ A(x) \in M_p \}.$$

定義より上の補題の条件(2)は M_3 上に可換な flow を定義する. さらに, $A_i \in M A M^{-1}$ ($1 \leq i \leq n$) を置き換えて $M \in \text{PGL}_n(\mathbb{C})$ の flow は不変である, したがって

$M_3/PGL_m(\mathbb{C}) \subset J^{g-1}(C) - \Theta$ 上の可換 flow を定義する. 従って, $\mathbb{Z}$, abelian Gammier 系は $J(C) - \Theta$ 上の運動を記述する.

定理 ([B]). Abelian Gammier 系の定義する $J(C) - \Theta$ 上の flow は線型である.

すなわち, Abelian Gammier 系が ^{代数的に完全積分可能な} Hamiltonian 系であろうと予想してはいたが, Beauville は最近このことを証明した. 以下に, このことを説明する.

大域的な構成を考える. $V_m(n+1)$ は spectral 多項式 $P = y^n + s_1(x)y^{n-1} + \dots + s_m(x)$, $s_i(x) \in S_i(n+1)$ ^{全体とする.} $V_m(n+1)$ を affine 空間 $S_{n+1} \times S_{2(n+1)} \times \dots \times S_m(n+1) \simeq A^{n+2} \times A^{2(n+1)+1} \times \dots \times A^{m(n+1)+1}$ と同視する.

$h: M_m(S_{n+1}) \rightarrow V_m(n+1)$ を $h(A(x)) = \det(yI_m - A(x))$ により定義する. $PGL_m(\mathbb{C})$ は $M_m(S_{n+1})$ に共役により作用する. $Q_m(n+1) = M_m(n+1)/PGL_m(\mathbb{C})$ とおく.

命題 ([B]). $\bar{\tau}: Q_m(n+1) \rightarrow V_m(n+1)$ は smooth である, $P \in V_m(n+1)$ に対して, fibre $\bar{\tau}^{-1}(P)$ は $J^{g-1}(C_P) - \Theta$ と同型である. すなわち, $C_P: P(y, x) = 0$ である.

Beauville は Kirillov-Kostant の方法により, 次のことを示した.

定理 (B). $\bar{h}: Q_m(m+1) \rightarrow V_m(m+1)$ は代数的に完全積分可能な Hamilton 系である.

ただし, $Q_m(m+1)$ 上に Poisson 構造が定義されるが, それは階数か極大であり, つまり symplectic 構造ではない. しかし, symplectic 構造の族と等しい ([B], (5.5) Théorème p229).

参考文献

- [B] A. Beauville; Jacobiennes des courbes spectrales et systèmes hamiltoniens complètement intégrables, Acta Math., 164 (1990), 211-235.