

$\pi_2(M^4)$ の elements の separating problem

広島大理 大川 哲 介

□ 問題 4次元多様体 M^4 の 2次元ホモトピー群の元達 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu \in \pi_2(M^4)$ が与えられたとき, それらは何時 S^2 からの disjoint PL(TOP) embedding で表現出来るか.

本論では, これをホモロジーで扱える範囲で, しかも ∂M に現れる obstruction を考察する. Ohkawa [1] の mod. p -version でもある.

② 諸概念及諸定義 以下本論では, $R \ni 1$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ の部分環, また有理整数環の剰余環とする.

定義 1. M^4 を 4次元連結 PL 多様体とするとき, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu \in H_2(M, R)$ が $(s_1, \dots, s_\mu)$ -separable であるとは, (但し $s_1, \dots, s_\mu$ は非負整数列), M^4 内の多面体 K_{ij} ($i=1, 2, \dots, \mu, j=0, 1, \dots, s_i$) で, 次の 4 条件を満たすものが存在すると共に云う.

- i) $K_{i0} \subset K_{i1} \subset \dots \subset K_{is_i} \quad (i=1, 2, \dots, \mu)$
- ii) $\alpha_i \in \text{Im} (H_2(K_{i0}, R) \xrightarrow{\iota_*} H_2(M, R))$
 $(i=1, 2, \dots, \mu), \quad \iota: \text{inclusion.}$
- iii) $0 = \iota_* : H_1(K_{i,j-1}; R) \longrightarrow H_1(K_{i,j}; R)$
 $(i=1, 2, \dots, \mu; j=1, 2, \dots, s_i), \quad \iota: \text{inclusion}$
- iv) $K_{i0} \cap K_{js_j} = \emptyset \quad (i \neq j).$

この第4の条件のかわりにより強い条件 iv') で置換える時,

$$\text{iv')} \quad K_{is_i} \cap K_{js_j} = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ は *strongly* $(s_1, \dots, s_\mu)$ -separable であると呼ばれる. $(s, s, \dots, s)$ -separable を略して s -separable, $\forall s, s$ -separable なることを, ∞ -separable と云う.

注意1. M^+ が向きづけられているとき, $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ が 0 -separable $\Leftrightarrow \alpha_i \cdot \alpha_j = 0 \quad (\forall i \neq j)$

注意2. $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ が S^2 からの disjoint PL embedding で表わされる時, これらは ∞ -separable. 実際, $f_i: S^2 \rightarrow M^+$ を α_i を表わす disjoint PL-embedding とすると, $K_{ij} = \text{Im } f_i = f_i(S^2) \quad (\forall i, j)$ と置けばよい.

注意3. 上記注意2は $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ が S^2 からの disjoint topological embedding で表わされている時も成立する

G を群 とするとき

$$\Gamma_1 G = G, \quad \Gamma_{g+1} G = [\Gamma_g G, G], \quad \Gamma_1^{(n)} G = G, \\ \Gamma_{g+1}^{(n)} G = [\Gamma_g^{(n)} G, G] \cdot (\Gamma_g^{(n)} G)^n, \quad \text{但し,}$$

$X^n: \{x^n \mid x \in X\}$ から 生成された 部分群

$$\mathcal{L}_g(G, R) = \begin{cases} (\Gamma_g G / \Gamma_{g+1} G) \otimes R & (R \subset \mathbb{Q}) \\ \Gamma_g^{(n)} G / \Gamma_{g+1}^{(n)} G & (R = \mathbb{Z}_n) \end{cases}$$

空間 X に対し,

$\pi_1(X)$: X の 弧状連結成分ごとの 基本群の自由積

$$\mathcal{L}_g(X, R) = \mathcal{L}_g(\pi_1(X), R) \quad \text{とする.}$$

この時, 次の成立する.

命題 1. $\mathcal{L}_*(_, R)$ は, (基点を有せぬ) 空間の圏から, R 上の 次数付 Lie algebra の圏への関手となる

証明. $[\Gamma_g G, G]$ で割ることは基本群の作用を消すから.

図 以上の準備のもとに次の結果を述べる事が出来る.

定理. M^4 : 4次元 PL 多様体で, 連結で, しかも係数環 R が $R \neq \mathbb{Z}_2$ の時は向き付可能, さらに compact とする.

この時 M^4 が

- i) $H_1(M^4, R) = 0$
- ii) $H_2(M^4, R) = R^\mu \quad (\mu: \text{非負整数})$
- iii) $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_\mu): H_2(M^4, R)$ の basis で

S -separable なものが存在する.

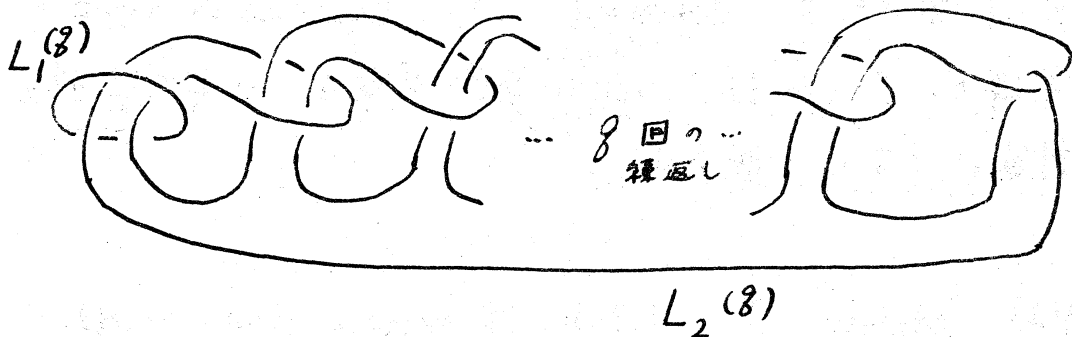
の3条件を満たすならば, ∂M について

$$\mathcal{L}_g(\partial M, R) \approx \mathcal{L}_g(F^\mu, R) \quad (g \leq S)$$

を満たす. 但し F^μ : rank μ の自由群.

田 次用 S^3 の μ -成分 link $L = \bigcup_{i=1}^{\mu} L_i$ に対して 各成分 L_i に沿って 2-handle を p_i -framed で attaching したものを $W_L = W(L; p_1, \dots, p_\mu)$ と書き, さらに L_i に対応する $H_2(W_L, R)$ の元を α_i と書く.

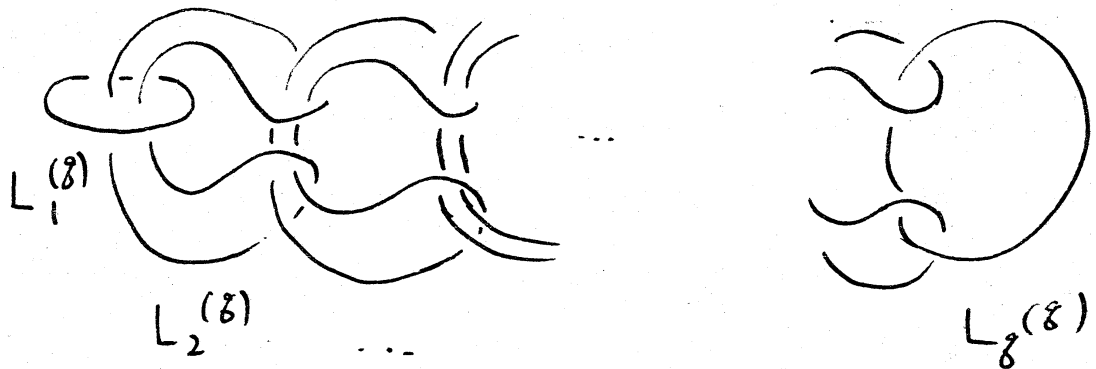
例 1. $L = L^{(g)}$ を Milnor [M2] の link とする



$L^{(1)}$ が Whitehead link である.

この時 $W(L^{(g)}, m, n)$ に対して, $(m, n) > 1$ とするとき, α_1, α_2 は $\forall k$ に対し $(k, g-1)$ -separable であるが, $(2g+1)$ -strongly separable ではない.

例 2. $L = L^{(g)}$ を Milnor [M1] の link とする



このとき

$$W_L = W(L^{(g)}, n_1, \dots, n_g) \text{ について}$$

$(n_1, \dots, n_g) > 1$ のとき, $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ は どの $g-1$ 個の元も strongly ∞ -separable であるが, 全体として $(g-1)$ -separable でない. 以上の 2 例は 計算によるが, 略する.

[M1] Milnor, J, Link Groups, Ann. Math.

59 (1954) 177-195

[M2] ———, Isotopy of Links, Algebraic

Geometry and Topology, Princeton Univ. Press

Princeton, (1957).

[OkKawa]. Homological separating, topological embeddings, and the Milnor μ -invariants

of links, preprint.