

線ソリトンの不安定性に関する直接数値計算

阪府大工 塩崎峻介 (Shunsuke SHIOZAKI)

阪府大工 村上洋一 (Youichi MURAKAMI)

1 はじめに

1次元のソリトン系では、ソリトンは微小攪乱に対して安定であるばかりでなくソリトン同士の衝突においてもその構造を保つといった非常に安定な性質がある。そのように1次元的に安定な構造が2次元的な攪乱（すなわち、一様な横方向に変化する攪乱）に対して安定かどうかという問題がある。

K-dV ソリトンに対するこの問題は Kadomtsev and Petviashvili[1] によって既に 1970 年に取り扱われている。彼らは2次元に拡張した方程式（この方程式は可積分系であることが後に示された [2,3]。以下、K P 方程式と呼ぶことにする。この研究はすべて K P 方程式の枠内で話を進める。また、K P 方程式に関連した最近の結果については Oikawa and Tsuji[4] を参照。）を導いた。この方程式はソリトンの進行方向よりも緩やかな横方向の変化を K-dV 方程式に取り込んでいる。横方向の長波長攪乱に対するソリトンの線形安定性を漸近展開で調べたような結果を得た。

- 媒質が負の分散のとき（位相速度が長波長であるほど大きい。例としては水面上の重力波がある。）ソリトンは安定である。
- 媒質が正の分散のとき（位相速度が短波長であるほど大きい。例としては水面上の表面張力波がある。）ソリトンは不安定である。

これらの結果は、ソリトンが局所的に斜めに傾いたときの位相速度の増減を考えると理解できる。傾くと位相速度が増えるなら安定であり、減るなら不安定になる。

正の分散の場合に、1次元的なソリトン（以下、線ソリトンと呼ぶ。）が不安定になったらどのような現象が生じるかが次の問題になる。この場合は代数ソリトン [5] と呼ばれる2次元的に局在した解が存在することが知られ、この構造が1列に無限に並んだ周期ソリトンと呼ばれる解も得られている [6-8]。不安定現象とこれらの解の関係も興味深い問題である。

実はこの問題にも既に取り扱われている。Zakharov[9] および Zhdanov[10] が横方向の任意の波数の攪乱に対する線形安定解析を行っており、固有値・固有関数の表式を解析的に導いている。この方法を用いると、攪乱が成長したあとのような現象が生じるかも示すことができる。結論から述べると、不安定な線ソリト

ンはより振幅の小さな線ソリトンと周期ソリトンに分裂することが解析的に示されている。

この方法では線ソリトンに1つの不安定モードが攪乱として与えられた場合の時間発展しか記述できず、一般の攪乱が与えられた時の時間発展を記述できない。そこで、この研究では一般の攪乱に対して線ソリトンがどのように不安定化するかを明らかにするためにKP方程式の時間発展を直接数値シミュレーションすることで明らかにすることを目的とする。

まず、解析的に固有値・固有関数を求める方法について説明する。彼らの論文では、手法について詳細に説明されていないので、多少役立つと思われる。次に、数値シミュレーションの手法について説明し、最後に予備的な結果と今後の課題について述べる。

2 線ソリトンの線形安定解析

正の分散のKP方程式は

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x - 3u_{yy} = 0 \quad (1)$$

のように表される。

x 方向に進行する孤立波を表すソリトン解は

$$U = 2P^2 \operatorname{sech}^2 \xi \quad (2)$$

ただし、

$$\xi = Px + \Omega t - \xi_0, \quad \Omega = P^3 \quad (3)$$

である。ここで、 P と ξ_0 は定数である。このソリトンは y 方向に一様に伸びているので線ソリトンと呼ぶことにする。

微小攪乱に対する線ソリトンの安定性を調べるために、KP方程式に $U(\zeta) + u(\zeta, y, t)$ (ここで、 $\zeta = x - \frac{\Omega}{P}t$, U は線ソリトン解, u は微小攪乱とする。) を代入する。微小攪乱の2次の項を無視することにより、微小攪乱 u に対する方程式は

$$(u_t + 6Uu_\zeta + 6U_\zeta u + u_{\zeta\zeta\zeta})_\zeta - 3u_{yy} = 0 \quad (4)$$

のように与えられる。境界条件は、 ζ 方向については $u \rightarrow 0$, ($\zeta \rightarrow \pm\infty$), y 方向についてはフーリエ級数で展開できる場合を考える。固有値および固有関数を式(4)に基づいて解析的に見つけることは非常に難しい。

そこで、式(4)の固有値および固有関数を見つけるために、KP方程式(式(1))における線ソリトンと周期ソリトンとの非線形相互作用を表す解析解を利用する。以下ではその手順を説明する。(文献[11]にあるのとほぼ同様である。)

まず、共鳴状態と準共鳴状態について説明する [11]. 線ソリトンと周期ソリトンとの相互作用を表す解を記述するために双一次変換

$$u = 2(\log f)_{xx} \quad (5)$$

を用いる. この変換へ次式を代入すると相互作用を表す解が得られる.

$$f = 1 + \frac{K}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) - \frac{1}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1) \cos(\eta) \\ + \exp(\xi_2) \left[1 + \frac{KL^2}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) - \frac{L}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1) \cos(\eta) \right]. \quad (6)$$

ここで以下の式を使っている.

$$K = \frac{\delta^2}{\delta^2 - \alpha_1^4}, \\ L = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\delta/\alpha_1)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\delta/\alpha_1)^2}, \\ \xi_1 = \alpha_1 x - \Omega_1 t + \sigma_1, \\ \xi_2 = \alpha_2 x - \Omega_2 t + \sigma_2, \\ \eta = \delta y + \theta, \\ \Omega_1 = \alpha_1^3 + 3\frac{\delta^2}{\alpha_1}, \\ \Omega_2 = \alpha_2^3.$$

ここで, α_1 と α_2 はそれぞれ, 線ソリトンと周期ソリトンの x 方向の波数であり, δ は周期ソリトンの y 方向の波数である. また, σ_1, σ_2 と θ は任意の定数である.

2つのソリトンの衝突後の x 方向の位相のずれは, $\Gamma = \log |L|$ で表されるので, $L \rightarrow \pm\infty$ の時, Γ は無限大となり, 共鳴状態が表れる. パラメータが共鳴状態を満たすとき, 線ソリトンと周期ソリトンは相互作用により, 新たな共鳴線ソリトンを形成する. また, パラメータが共鳴状態に近い値を取るときを準共鳴状態と呼ぶことにする.

図1に準共鳴状態における周期ソリトンと線ソリトンとの衝突, 分裂の様子を示す. y 方向については1周期分をとり, x 方向については衝突付近の領域に注目している. 図1(a)は周期ソリトンと線ソリトンの衝突前の状態を示している. この状態から時間発展すると, 図1(b)に示すように, 周期ソリトンが線ソリトンに近づき非線形相互作用による変形が始まる. さらに時間発展すると, 図1(c)に示すような波形を形成する. この波形は共鳴線ソリトンとわずかなズレの和で表される. パラメータが共鳴状態を満たすときは, 完全な共鳴線ソリトンが形成され, その後再び分裂すること無く形を保ったまま進行する. 一方, 準共鳴状態では図1(d)での共鳴線ソリトンからのズレが時間発展に伴い成長する (図1(d)). さらに時間発展す

ると、ズレは周期ソリトンへと成長し、図 1(e) に示すように、元の線ソリトンと周期ソリトンに分裂する。

次に、準共鳴状態を用いて線ソリトンの安定性を調べる方法を述べる。先ほど述べたように、線ソリトンと周期ソリトンとの非線形相互作用により共鳴線ソリトンに近い波形を形成する時刻に着目する (図 1(c)). ここで、共鳴線ソリトンを U とおき、共鳴線ソリトンとその微小なズレの部分を $\tilde{u}$ とする。

式 (1) に $u = U + \tilde{u}$ を代入し、 $u = U$ は式 (1) の解であることを考慮すると次式を得る。

$$(\tilde{u}_t + 6\tilde{u}\tilde{u}_x + 6U\tilde{u}_x + 6U_x\tilde{u} + \tilde{u}_{xxx})_x - 3\tilde{u}_{yy} = 0. \quad (7)$$

さらに、2 次の微小項を無視することで次の式を得る。

$$(\tilde{u}_t + 6U\tilde{u}_x + 6U_x\tilde{u} + \tilde{u}_{xxx})_x - 3\tilde{u}_{yy} = 0. \quad (8)$$

式 (8) は式 (4) と同じ形をしており、 $\tilde{u}$ を求めることは線形理論における固有関数を求めることに対応する。この考えに基づいて、 $\tilde{u}$ に対応する f のズレの部分を求める。

線ソリトンと周期ソリトンが準共鳴状態 ($L \rightarrow \infty$) にあるとき、式 (6) において、 $\exp(\xi_1) \ll 1$, $\exp(\xi_2) \ll 1$ かつ $\exp(2\xi_1 + \xi_2) \sim O(1)$ の領域が準共鳴状態に対応する。したがって、 $\exp(\xi_1) \sim O(1/\sqrt{L})$, $\exp(\xi_2) \sim O(1/L)$ となる。そこで、 $\sqrt{L}\exp(\xi_1) \rightarrow \exp(\tilde{\xi}_1)$, $L\exp(\xi_2) \rightarrow \exp(\tilde{\xi}_2)$ と定義し直す。このとき、式 (6) は、次のように書き直すことができる。

$$f = 1 + \frac{K}{4\alpha_1^4} \exp(2\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2) - \frac{1}{\sqrt{L}} \left[\frac{1}{\alpha_1^2} (1 + \exp(\tilde{\xi}_2)) \exp(\tilde{\xi}_1) \cos(\eta) \right] + \frac{1}{L} \left[\exp(\tilde{\xi}_2) + \frac{K}{4\alpha_1^4} \exp(2\tilde{\xi}_1) \right]. \quad (9)$$

式 (9) の $1/L$ と $1/\sqrt{L}$ のかかっていない部分は、共鳴線ソリトンを表している。

ここで、 f を共鳴線ソリトンに対応する部分 f^s 、共鳴線ソリトンとのずれ $\tilde{f}$ と非線形相互作用を表す項 $O(1/L)$ の和として表すと、

$$f = f^s + \tilde{f} + O\left(\frac{1}{L}\right) \quad (10)$$

のようになる。

f^s に対応する線ソリトン $U = u_s$ は次式で表される。

$$u_s = 2\alpha_0^2 \operatorname{sech}^2 \tilde{\xi}_0. \quad (11)$$

ただし、

$$\alpha_0 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \quad (12)$$

$$\tilde{\xi}_0 = \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2/2 + \sigma_0, \quad (13)$$

$$\sigma_0 = \log\left(\sqrt{K}/2\alpha_1^2\right), \quad (14)$$

である. α_0 は共鳴線ソリトンの波数を表している. 式 (11) の x_{i_0} は式 (2) の x_i に対応している.

$O(1/L)$ の項を無視し, 線形問題の固有関数に対応する $O(1/\sqrt{L})$ の項 ($\tilde{f}$) を書き直すと, 次の様になる.

$$\tilde{f} = -\frac{1}{\sqrt{L}} \left[\frac{1}{\alpha_1^2} \exp(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2/2) \cosh(\tilde{\xi}_2/2) \cos(\eta) \right]. \quad (15)$$

共鳴条件 $\delta/\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ を用いて, $\tilde{u}$ に戻すと, 次の式が得られる.

$$\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{KL}} \operatorname{sech} \tilde{\xi}_0 \left\{ 2\alpha_0^2 \operatorname{sech}^2 \tilde{\xi}_0 - \alpha_0^2 - \alpha_2^2 + 2\alpha_0\alpha_2 \tanh \frac{1}{2}\tilde{\xi}_2 \tanh \tilde{\xi}_0 \right\} \cosh \frac{1}{2}\tilde{\xi}_2 \cos(\delta y + \theta) \quad (16)$$

図 2 に $(\alpha_1, \alpha_2, \delta) = (1, 4.196, 9/\sqrt{3})$ のときの固有関数の形を示す. 線形安定性の境界条件を満たしていることが確認できる. 対応する固有値は

$$\gamma = 2\delta\sqrt{\alpha_0^2 - 4\delta}. \quad (17)$$

のようになる.

3 数値シミュレーションの方法

KP 方程式の解の時間発展を直接数値シミュレーションする方法について説明する. 境界条件は x 方向, y 方向ともに周期境界条件を用いる. 空間に関してはフーリエ・ガラーキン法, 時間に関しては 4 次のルンゲ・クッタ法を適用する. また, 精度の向上及び数値スキームの安定化のために, 線形項については積分因子法を用いる.

まず, 関数 $u(x, y, t)$, 非線形項 $u(x, y, t)^2$ を次のようにフーリエ級数展開する.

$$u = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{l=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{u}_{k,l}(t) \exp\{i(kx + ly)\}, \quad (18)$$

$$u^2 = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{l=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \hat{w}_{k,l}(t) \exp\{i(kx + ly)\}, \quad (19)$$

ここで, N は x 方向の分割数, M は y 方向の分割数である. また, k, l はそれぞれ x 方向, y 方向の波数であり, $\hat{u}_{k,l}, \hat{w}_{k,l}$ はそれぞれ u, u^2 のフーリエ空間での波数 k, l における大きさを表しており時間に依存する. KP 方程式に, 式 (18) と式 (19) を代入し,

$$s_{k,l} = -i(k^3 + 3l^2/k) \quad (20)$$

と置くと,

$$\frac{d}{dt}\hat{u}_{k,l} + s_{k,l}\hat{u}_{k,l} = -3ik\hat{w}_{k,l}, \quad (k \neq 0) \quad (21)$$

$$\hat{u}_{k,0} = 0 \quad (k \neq 0) \quad (22)$$

が得られる. さらに, 積分因子 $\exp(s_{k,l}t)$ を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{\exp(s_{k,l}t)\hat{u}_{k,l}\} &= -3ik\exp(s_{k,l}t)\hat{w}_{k,l} \\ &= \exp(s_{k,l}t)f(\hat{u}_{k,l}) \quad (k \neq 0) \end{aligned} \quad (23)$$

のように変形される. ここで, $f(\hat{u}_{k,l}) = -3ik\hat{w}_{k,l}$ と定義している. さらに,

$$\hat{v}_{k,l} = \exp(s_{k,l}t)\hat{u}_{k,l}$$

とおくと, 式 (23) は,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{v}_{k,l} &= \exp(s_{k,l}t)f\{\exp(-s_{k,l}t)\hat{v}_{k,l}\} \\ &= g(t, \hat{v}_{k,l}) \quad (k \neq 0) \end{aligned} \quad (24)$$

となる.

式 (24) を 4 次のルンゲ・クッタ法を適用する. 差分間隔を $h = dt$ (時間刻み), $t_n = nh$ とする. 上つきの n はその変数の時刻が t_n での値であることを表す. 第 1 段階は,

$$\begin{aligned} m_{1,k,l}^n &= h g(t_n, \hat{v}_{k,l}) \\ &= h \exp(s_{k,l}t_n) f(\hat{u}_{k,l}^n) \\ &= \exp(s_{k,l}t_n) n_{1,k,l}^n \end{aligned} \quad (25)$$

$$n_{1,k,l}^n = h f(u_{k,l}^n) \quad (26)$$

のように表される. 同様にして, 第 2 段階から第 4 段階は

$$n_{2,k,l}^n = h \exp\left(s_{k,l}\frac{h}{2}\right) f\left\{\exp\left(-s_{k,l}\frac{h}{2}\right)\left(\hat{u}_{k,l}^n + \frac{1}{2}n_{1,k,l}^n\right)\right\}, \quad (27)$$

$$n_{3,k,l}^n = h \exp\left(s_{k,l}\frac{h}{2}\right) f\left\{\exp\left(-s_{k,l}\frac{h}{2}\right)\left(\hat{u}_{k,l}^n + \frac{1}{2}n_{2,k,l}^n\right)\right\}, \quad (28)$$

$$n_{4,k,l}^n = h \exp(s_{k,l}h) f\left(\exp(-s_{k,l}h)\left(\hat{u}_{k,l}^n + n_{3,k,l}^n\right)\right) \quad (29)$$

表 1: 各パラメータの値

α_1	α_2	α_0	δ
1	4.196	6.196	$9/\sqrt{3}$

のようになる.

これらを用いて最終的に

$$\hat{u}_{k,l}^{n+1} = \exp(-s_{k,l}h) \left\{ \hat{u}_{k,l}^n + \frac{1}{6} (n_{1,k,l}^n + 2n_{2,k,l}^n + 2n_{3,k,l}^n + n_{4,k,l}^n) \right\} \quad (k \neq 0) \quad (30)$$

$$\hat{u}_{k,0} = 0 \quad (k \neq 0) \quad (31)$$

が得られる.

また, フーリエ変換をすることにより生じるエイリアジング誤差を除去するために, x 方向, y 方向ともに $2/3$ 則により高周波成分を 0 とおいた.

4 数値シミュレーションの結果

まず, 数値シミュレーションによる攪乱を伴う線ソリトンの時間発展が, 解析解により得られるその時間発展の様子と同じであることを確認する.

初期条件として次の式を与え, 数値シミュレーションを行う.

$$\begin{aligned} u &= U + \tilde{u} \\ &= 2\alpha_0^2 \operatorname{sech}^2 \tilde{\xi}_0^2 + \frac{1}{\sqrt{KL}} \operatorname{sech} \tilde{\xi}_0 \left\{ 2\alpha_0^2 \operatorname{sech}^2 \tilde{\xi}_0 - \alpha_0^2 - \alpha_2^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha_0\alpha_2 \tanh \frac{1}{2} \tilde{\xi}_2 \tanh \tilde{\xi}_0 \right\} \cosh \frac{1}{2} \tilde{\xi}_2 \cos(\delta y + \theta) \end{aligned} \quad (32)$$

パラメータは表 1 を与えた. この場合, $1/\sqrt{KL} = 0.00953268$ であり, 微小攪乱とみなせるとした.

図 3 に時間発展の様子を示す. 図 3(b) で線ソリトンの中央部分が膨らみ始め, その後, 線ソリトンと分裂し, 鋭いピークを持つ周期ソリトンとなる. この挙動は相互佐用を表す解析解の図 1(c) 以降と同じである. したがって, 数値シミュレーションは KP 方程式の解の時間発展を再現していると考えられる.

次に, 保存量について調べることにより, 数値シミュレーションの精度をチェックし, その結果をもとに, 数値シミュレーションするための適当な計算条件を決定する.

KP 方程式は可積分系であり, 保存量は無限個あることが知られている. ここでは, 数値シミュレーションの精度を調べるために, 次の保存量が時間発展に伴い保

表 2: 計算条件と $t = 0.3$ における誤差

	NX	NY	時間刻 dt	x 方向の領域	y 方向の領域	誤差 (%)
A	256	256	0.000005	$0 \rightarrow 6\pi$	$0 \rightarrow 2\pi/\delta$	2.66761
B	512	256	0.000005	$0 \rightarrow 6\pi$	$0 \rightarrow 2\pi/\delta$	0.05173
C	1024	256	0.000005	$0 \rightarrow 6\pi$	$0 \rightarrow 2\pi/\delta$	1.33406×10^{-7}
D	1024	256	0.000005	$0 \rightarrow 12\pi$	$0 \rightarrow 2\pi/\delta$	0.010572

存されているかどうかを計算条件を変化させることにより調べる. 初期条件は式 (32) と同一のものをを用いた.

$$E(t) = \sum_{k=0}^{NX-1} \sum_{l=0}^{NY-1} u_{k,l,t}^2 dx dy \quad (33)$$

また, 誤差は次式により求めた.

$$\frac{E(0) - E(0.3)}{E(0)} \times 100 \quad (34)$$

誤差を求めるために $t = 0.3$ での保存量を採用した理由は, 攪乱を伴う線ソリトンが, 周期ソリトンと線ソリトンに分裂した後であることと, 計算時間の節約のためである. 設定した計算条件とその条件下での誤差を表 2 に示す. 空間分割数が増えれば計算時間が増えるため, 無闇に空間分割数を増やすことはできない. 計算時間のバランスを考えた上で, 表 2 B の条件で十分精度を確保できるとした.

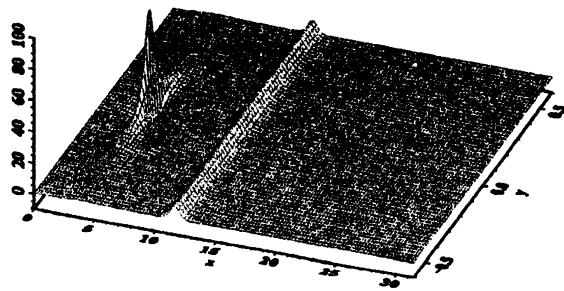
5 まとめと今後の課題

前節の数値計算の結果から, 数値スキームの信頼性と精度について確認できたので, 今後は 2 つ以上の異なる増幅率を持つ攪乱を線ソリトンに加えた場合にどのような現象が生じるかを検討していきたい.

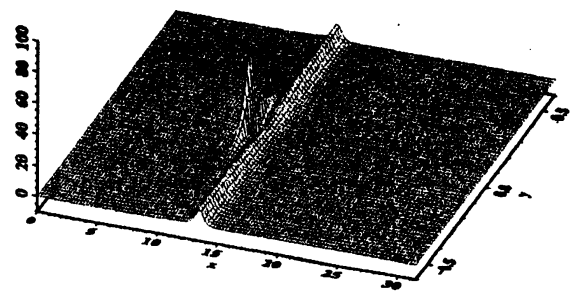
6 参考文献

- [1] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili: Sov. Phys. Dokl. **15** (1970) 539.
- [2] V. E. Zakharov and A. E. Shabat: Funct. Anal. Appl. **8** (1974) 226.
- [3] J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. **40** (1976) 286.
- [4] M. Oikawa and H. Tsuji: Fluid Dyn. Res. **38** (2006) 868.

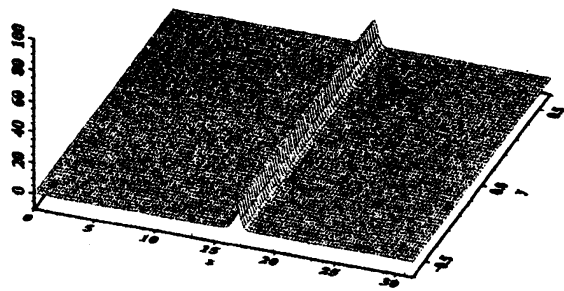
- [5] S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its and V. E. Matveev: Phys. Lett. **A63** (1977) 205.
- [6] L. A. Abramyan and Yu. A. Stepanyants: Radiophys. and Quantum Electron. **28** (1985) 26.
- [7] M. Tajiri and Y. Murakami: J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 3585.
- [8] M. Tajiri and Y. Murakami: Phys. Lett. **A143** (1990) 217.
- [9] V. E. Zakharov: Sov. Phys. JETP Lett. **22** (1975) 172.
- [10] S. K. Zhdanov: Sov. Phys. Dokl. **30** (1985) 769.
- [11] 田尻昌義, 村上洋一: 数理解析件講究録 782 (1992) 206.



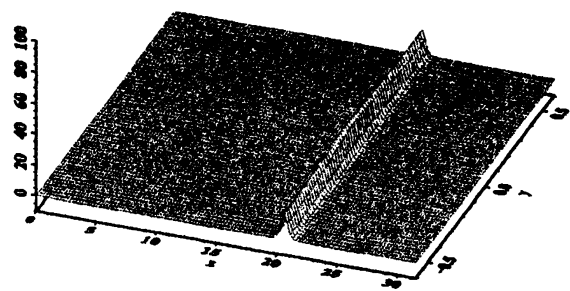
(a)



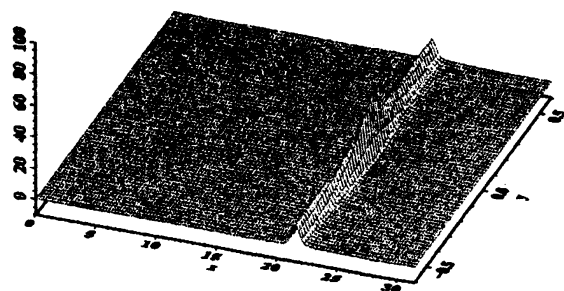
(b)



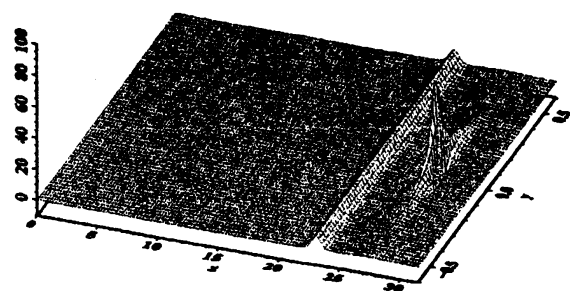
(c)



(d)



(e)



(f)

図 1: 準共鳴状態における周期ソリトンと線ソリトンの衝突. (a) $t = -0.2$, (b) $t = 0.1$, (c) $t = 0.0$, (d) $t = 0.1$, (e) $t = 0.13$, (f) $t = 0.2$

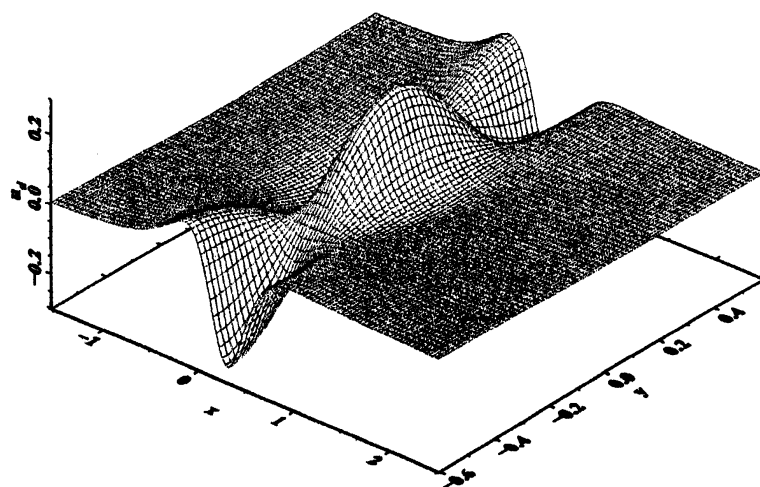
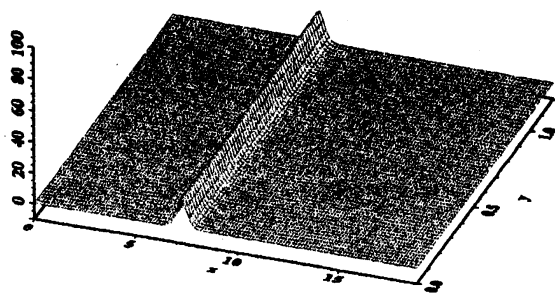
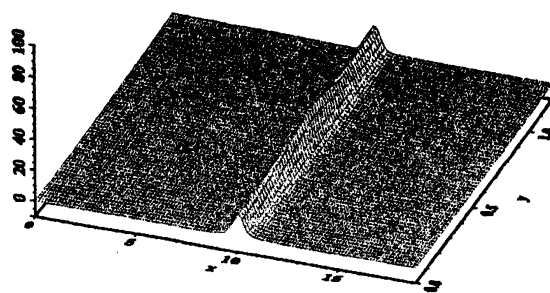


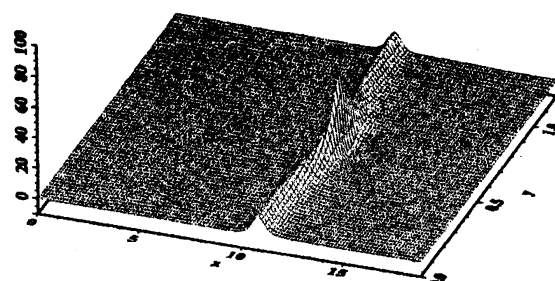
図 2: 固有関数の形



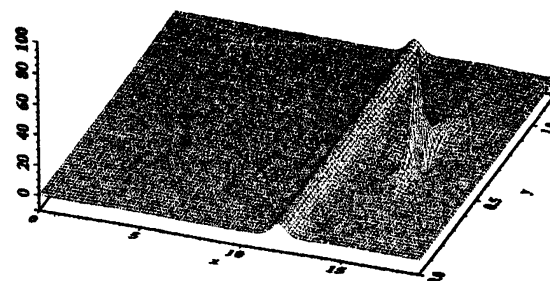
(a)



(b)



(c)



(d)

図 3: 1つの攪乱を伴う線ソリトンの数値シミュレーションによる時間発展 (a) $t = 0$, (b) $t = 0.075$, (c) $t = 0.1$, (d) $t = 0.15$