

完全シフト不変定理に基づく Hilbert 変換ペア・ ウェーブレット基底

Hilbert Transform Pairs of Wavelet Bases Based on Perfect Translation Invariance Theorems

戸田 浩 (Hiroshi Toda) *

章 忠 (Zhong Zhang) *

* 豊橋技術科学大学
(Toyohashi University of Technology)

1 はじめに

離散ウェーブレット変換 (Discrete Wavelet Transform, DWT) においては、一般的に Mallat[1] の提案した多重解像度解析 (Multi Resolution Analysis, MRA) が用いられる。しかしこうした DWT の変換結果には、シフト不変性 (Translation Invariance) にならないという問題が指摘されている [2]。すなわちシフト不変性とは、各レベルの解析結果の関数の形状が、解析始点位置 (信号の位相) に依存しないことであるが、MRA に基づいた一般的な DWT では、このシフト不変性が保たれないのである。こうした現象は、種々の信号処理や画像処理にムラを生じさせてしまうことになり、DWT の深刻な問題として一般的に認識されている。例えば信号からパルス成分を抽出しようとする場合、パルスの位置により各レベルの解析結果は変動してしまい、各レベルの各ウェーブレットがパルスを必ずしも的確に捉えていることにはならず、処理結果にムラが生じてしまうのである。

このようなシフト不変性の欠如 (Lack of Translation Invariance) を改善する一つの策として、Magarey[3], Kingsbury[4] および筆者ら [5] は、対称と反対称の形状を持つ 2 種類のウェーブレット基底による DWT の並列処理を提案した (並列処理された結果は平均化され、全体としては、冗長性を含むウェーブレット・フレームを構築する)。さらに Selesnick[6, 7] は、DWT の並列処理に用いるペアは必ずしも対称、反対称に限定する必要はなく、Hilbert 変換ペアを成す 2 種類のウェーブレット基底を用いればよいことを示した。また筆者ら [8, 9, 10] はこれらの手法を基礎に、任意の直交ウェーブレットより Hilbert 変換ペアを作成し、これによる DWT の並列処理を提案した。しかし以上に掲げたいずれの手法も、近似的にシフト不変性を実現するだけで、完全シフト不変性 (Perfect Translation Invariance, PTI) を実現するには至らなかった。そこで筆者ら [11] は、Meyer ウェーブレット [12] を基に設計した、幅広い形状を持つ Hilbert 変換ペアによる DWT の並列処理により、完全シフト不変性を実現する手法を提案した。

以上に掲げたいずれの手法においても、2種類のウェーブレット基底によるDWTの並列処理により得られた2種類のウェーブレット係数を、複素数の実数部と虚数部として扱うことにより、信号の位相情報が得られる。またその複素数の絶対値を各種の信号処理や画像処理において適切に処理することにより、従来の実数型ウェーブレットによるDWTの処理と高い互換性が保たれる[11, 13]。そしてこれらの実際の処理は、先に説明したMRAのツリー構造を、二重に重ね合わせたブロックダイアグラムにより表すことができる。そこでこれらの手法を二重ツリー複素数離散ウェーブレット変換 (Dual-Tree Complex Discrete Wavelet Transform, DT-CDWT) と呼ぶことにする。また筆者らが提案した完全シフト不変性を実現する同手法を、特にPTI二重ツリー複素数離散ウェーブレット変換 (PTI DT-CDWT)、そのウェーブレット基底をPTIウェーブレット基底 (PTI Wavelet Bases) と呼ぶことにする。本文ではこのPTI DT-CDWTの理論的な基礎となる完全シフト不変定理 (Perfect Translation Invariance Theorems)[14]を紹介し、PTIウェーブレット基底の設計法、PTI DT-CDWTの計算法について考察する。そして最後に上記の定理によって生み出される、新しいウェーブレット基底の展望について述べる。

2 本文の議論に必要な公式について

この章では本文の議論に必要な公式について吟味する。なお本文で扱う関数は、後述するディラックのデルタ関数を除いて、すべて2乗可積分関数の集合 $L^2(\mathbf{R})$ ($\mathbf{R}$: 実数全体の集合) に属することを前提とする。すなわち扱う関数 $f(t)$ に関しては、以下の式が成立することを前提とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (1)$$

2.1 内積, ノルム, 変換式

関数 $f(t)$, $g(t)$ の内積 $\langle f, g \rangle$ を次のように定義する。

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (2)$$

ただし本文では上記の内積 $\langle f, g \rangle$ を、 $\langle f(t), g(t) \rangle$ と表すことにする。なお $\overline{g(t)}$ は $g(t)$ の複素共役を表す。次に関数 $f(t)$ のノルム (Norm) $\|f\|$ を次のように定義する。

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}. \quad (3)$$

次に本文ではウェーブレット $\psi_k(t)$ ($k \in \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}$: 整数全体の集合) による、関数 $f(t)$ の変換を表す式、例えば

$$g(t) = \sum_k \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(t). \quad (4)$$

あるいは係数 $1/2$ 等を含んだ式

$$g(t) = \frac{1}{2} \sum_k \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(t). \quad (5)$$

等をウェーブレット $\psi_k(t)$ ($k \in \mathbf{Z}$) による関数 $f(t)$ に対する変換式, あるいは単に変換式と呼ぶ.

2.2 z 変換, 周波数応答関数, フーリエ変換

本文では z 変換を次のように定義する. すなわち数列 $\{h_n\}$ における z 変換 $H_z(z)$ を次の式で表す.

$$H_z(z) = \sum_n h_n z^{-n}. \quad (6)$$

さらに $z = e^{i\omega}$ を式 (6) に代入することにより, 周波数応答関数 $H_\omega(\omega)$ を, 次のように定義する.

$$H_\omega(\omega) = H_z(e^{i\omega}). \quad (7)$$

ところで逆 z 変換の式である

$$h_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c H_z(z) z^{n-1} dz. \quad (8)$$

において, 周回積分路 c を複素平面上の原点を中心とする半径 1 の円とすることにより, 次のような周波数応答関数 $H_\omega(\omega)$ から数列 $\{h_n\}$ への変換式が導かれる.

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_\omega(\omega) e^{in\omega} d\omega. \quad (9)$$

続いて関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $\hat{f}(\omega)$ を, 次のように定義する.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (10)$$

また逆フーリエ変換を次のように定義する.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (11)$$

次にフーリエ変換に関する一般的な性質について考察する. ここで関数 f を時間軸方向にシフトさせ, 拡大・縮小を施した関数 $f_{(a,b)}$ を, 次のように定義する.

$$f_{(a,b)}(t) = f\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a > 0, b \in \mathbf{R}. \quad (12)$$

そうするとフーリエ変換の一般的な性質により, 関数 $f_{(a,b)}$ のフーリエ変換 $\hat{f}_{(a,b)}(\omega)$ は次のように表せる.

$$\hat{f}_{(a,b)}(\omega) = a \hat{f}(a\omega) e^{-ib\omega}. \quad (13)$$

2.3 クロネッカーのデルタとディラックのデルタ関数

クロネッカーのデルタ (Kronecker delta) $\delta_{k,l}$ ($k, l \in \mathbf{Z}$) に関して, 次式が成立する.

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \quad (14)$$

ディラックのデルタ関数 (Dirac delta function) $\delta(t)$ に関して, 次式が成立する.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (16)$$

また任意の関数 $f(t)$ において次式が成立する.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0). \quad (17)$$

2.4 直交ウェーブレットに関する公式

直交ウェーブレットに関して以下の式が成立する [15, 16].

$$\phi(t) = \sum_n p_n \phi(2t - n), \quad (18)$$

$$\psi(t) = \sum_n q_n \phi(2t - n), \quad (19)$$

$$\langle \phi(t - k), \phi(t - l) \rangle = \delta_{k,l}, \quad (20)$$

$$\langle \psi(t - k), \psi(t - l) \rangle = \delta_{k,l}, \quad (21)$$

$$\langle \psi(t - k), \phi(t - l) \rangle = 0, \quad (22)$$

ただし $n, k, l \in \mathbf{Z}$ であり, $\phi(t)$ はスケーリング関数 (Scaling Function), $\psi(t)$ はマザーウェーブレット (Mother Wavelet) である. そして $\{p_n\}$ はツースケール数列 (Two-Scale Sequence), $\{q_n\}$ はウェーブレット数列 (Wavelet Sequence) である. (18) はツースケール関係 (Two-Scale Relation), (19) はウェーブレット方程式 (Wavelet Equation) と呼ばれ, また (20)-(22) は直交関係を表す式である. そして (18), (20) が成立する時, 以下の $\{p_n\}$ と $\{q_n\}$ の関係のもと, (18)-(22) のすべてが成立する [17].

$$q_n = (-1)^{1-n} p_{1-n}. \quad (23)$$

2.5 ツースケール関係に関する公式

(18) のフーリエ変換は次のように表せる.

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n p_n \phi(2t - n) e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n p_n \phi(y) e^{-i\omega(y+n)/2} \frac{dy}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_n p_n e^{-in\omega/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) e^{-i\omega y/2} dy \\
 &= \frac{1}{2} P_z(e^{i\omega/2}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \tag{24}
 \end{aligned}$$

(24) の2行目では $2t - n$ を y に置き換え, また4行目では (6) を適用している. さらに (7) を (24) に適用することにより次式が得られる.

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{2} P_{\omega}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \tag{25}$$

次に (18) より, (20) の左辺は次のように表せる.

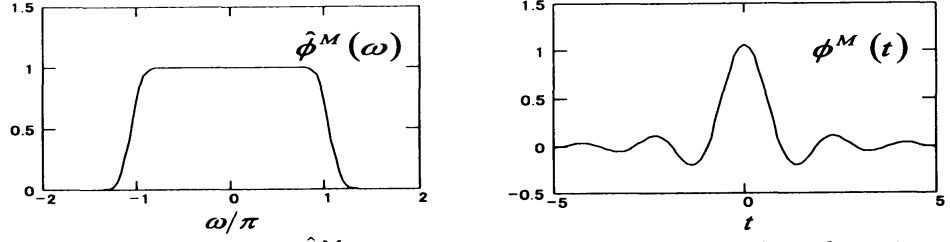
$$\begin{aligned}
 \langle \phi(t - k), \phi(t - l) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t - k) \overline{\phi(t - l)} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_m p_m \phi(2t - 2k - m) \sum_n \overline{p_n \phi(2t - 2l - n)} dt \\
 &= \sum_m \sum_n p_m \overline{p_n} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y - 2k - m) \overline{\phi(y - 2l - n)} \frac{dy}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_m \sum_n p_m \overline{p_n} \langle \phi(t - 2k - m), \phi(t - 2l - n) \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \sum_n p_{n-2k+2l} \overline{p_n} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_n p_{n+2l} \overline{p_{n+2k}}, \tag{26}
 \end{aligned}$$

ただし $k, l \in \mathbb{Z}$ である. (26) の3行目では $2t$ を y に置き換えている. また (20) より, (26) の4行目の $\langle \phi(t - 2k - m), \phi(t - 2l - n) \rangle$ は $2k + m = 2l + n$ の時に1となり, $2k + m \neq 2l + n$ の時に0となるから, (26) の5行目が得られる. そして (26) の6行目では $n - 2k$ を n に置き換えている. 次に (20), (26) より次式が得られる.

$$\frac{1}{2} \sum_n p_{n+2l} \overline{p_{n+2k}} = \delta_{k,l}, \tag{27}$$

ただし $k, l \in \mathbb{Z}$ である. そして $k = 0$ の時, 次式が得られる.

$$\sum_n p_{n+2l} \overline{p_n} = 2 \delta_{l,0}. \tag{28}$$



(a) The Fourier transform $\hat{\phi}^M(\omega)$, (b) The Meyer scaling function $\phi^M(t)$,

図 1: The Meyer scaling function.

2.6 Meyer ウェーブレットに関する公式

Meyer ウェーブレットにおける, スケーリング関数のフーリエ変換 $\hat{\phi}^M(\omega)$ は次のように定義される [12, 15].

$$\hat{\phi}^M(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 2\pi/3, \\ 0, & |\omega| \geq 4\pi/3. \end{cases} \quad (29)$$

また (29) の外の領域では, 次のように定義される.

$$|\hat{\phi}^M(\omega - 2\pi)|^2 + |\hat{\phi}^M(\omega)|^2 = 1, \quad 2\pi/3 < \omega < 4\pi/3. \quad (30)$$

(30) は $2\pi/3 < |\omega| < 4\pi/3$ の領域を定義する式であるが, 例えば Daubechies[15] は, この領域に次のような曲線を提案している.

$$\hat{\phi}^M(\omega) = \cos \left\{ \frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} |\omega| - 1 \right) \right\}, \quad (31)$$

$$\nu(x) = x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3). \quad (32)$$

$$\therefore 0 < \hat{\phi}^M(\omega) < 1, \quad 2\pi/3 < |\omega| < 4\pi/3. \quad (33)$$

Meyer ウェーブレットは直交ウェーブレットであるため, (20) より次のような関係が成立する.

$$\langle \phi^M(t - k), \phi^M(t - l) \rangle = \delta_{k,l}. \quad (34)$$

図 1 (a), (b) は Meyer ウェーブレットにおける, スケーリング関数のフーリエ変換 $\hat{\phi}^M(\omega)$, およびマザーウェーブレット $\phi^M(t)$ を表す.

2.7 Hilbert 変換ペアのウェーブレットについて

ペアのウェーブレット $\psi^R(t)$, $\psi^I(t)$ が Hilbert 変換ペアであるということは, 以下の関係が成立することである [7, 9].

$$\hat{\psi}^I(\omega) = \begin{cases} i \hat{\psi}^R(\omega), & \omega < 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ -i \hat{\psi}^R(\omega), & \omega > 0. \end{cases} \quad (35)$$

ところでウェーブレットは直流成分を含まないので、以下の式が成立する.

$$\hat{\psi}^R(0) = \hat{\psi}^I(0) = 0. \quad (36)$$

すると式 (35), (36) より次式が導かれる.

$$\hat{\psi}^R(\omega) + i\hat{\psi}^I(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq 0, \\ 2\hat{\psi}^R(\omega), & \omega > 0. \end{cases} \quad (37)$$

式 (37) が成立する時, $\psi^R(t)$, $\psi^I(t)$ は Hilbert 変換ペアとなる [7, 9].

3 完全シフト不変定理

この章では完全シフト不変性を定義し、これに基づく完全シフト不変定理を、定理 1, 3. として紹介する. ただし定理 1. は, (15)-(17) で表されるディラックのデルタ関数 $\delta(t)$ に対して DT-CDWT を実行する場合の, 完全シフト不変性の条件を示すもので, これは文献 [14] で「可変密度・完全シフト不変定理」としてすでに証明済みであるから詳細はそちらに譲る. この章では, この定理をより一般化し, $L^2(\mathbf{R})$ に属する任意の関数に対する, 複素数ウェーブレットによる変換における, 完全シフト不変性の条件を示す定理を, 定理 3. として証明する.

完全シフト不変性 (PTI) の定義 関数 $f(t)$ から関数 $g(t)$ への変換を, 作用素 $\mathcal{T}$ を用いて以下のように表す.

$$g(t) = \mathcal{T} f(t). \quad (38)$$

次に $g_d(t)$ ($d \in \mathbf{R}$) を次のように定義する.

$$g_d(t) = \mathcal{T} f(t - d). \quad (39)$$

以下のような関係が成立する時, 作用素 $\mathcal{T}$ による関数 $f(t)$ から関数 $g(t)$ への変換は完全シフト不変性 (PTI) であると定義する.

$$g_d(t) = g(t - d), \quad \forall d \in \mathbf{R}. \quad (40)$$

定理 1. Hilbert 変換ペアである $\psi^R(t)$, $\psi^I(t)$ をもとに, 以下のような複素数ウェーブレット $\psi(t)$ を定義する.

$$\psi(t) = \psi^R(t) + i\psi^I(t). \quad (41)$$

周波数領域において, $\hat{\psi}(\omega)$ は以下のような長さ Ω のコンパクトサポート領域を持つものとする.

$$\text{supp } \hat{\psi}(\omega) = [\omega_1, \omega_2], \quad 0 < \omega_1 < \omega_2, \quad (42)$$

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1 > 0, \quad (43)$$

次に $p > 0$ は次式を満たす実数定数とする.

$$0 < p\Omega \leq 2\pi \quad (\text{PTI 条件}). \quad (44)$$

q を任意の実数として, (15)-(17) で表されるディラックのデルタ関数 $\delta(t)$ に対して, $\psi^R(t - pk - q)$, $\psi^I(t - pk - q)$, $k \in \mathbf{Z}$ により次式のような変換を実行する.

$$\begin{aligned} g_q^p(t) &= \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \langle \delta(t), \psi^R(t - pk - q) \rangle \psi^R(t - pk - q) \right. \\ &\quad \left. + \langle \delta(t), \psi^I(t - pk - q) \rangle \psi^I(t - pk - q) \right\}. \end{aligned} \quad (45)$$

すると次式が得られる.

$$\hat{g}_q^p(\omega) = \frac{1}{p} |\hat{\psi}^R(\omega)|^2 = \frac{1}{p} |\hat{\psi}^I(\omega)|^2, \quad \forall q \in \mathbf{R}. \quad (46)$$

(44) は完全シフト不変性 (PTI) を実現するための重要な条件となる. そこで (44) を PTI 条件と呼ぶことにする.

証明 文献 [14] にて証明済みのため省略する.
証明終わり.

定理 1. より, PTI 条件 (44) のもと, $\psi^R(t - pk)$, $\psi^I(t - pk)$, $k \in \mathbf{Z}$ による $\delta(t)$ の変換式 (45) は, (38)-(40) で表せるような PTI となることを証明する. この証明のために, $g_{q,d}^p(t)$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} g_{q,d}^p(t) &= \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \langle \delta(t - d), \psi^R(t - pk - q) \rangle \psi^R(t - pk - q) \right. \\ &\quad \left. + \langle \delta(t - d), \psi^I(t - pk - q) \rangle \psi^I(t - pk - q) \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

すると $\psi^R(t - pk)$, $\psi^I(t - pk)$, $k \in \mathbf{Z}$ による $\delta(t - d)$, $\forall d \in \mathbf{R}$ の変換式は次式で表せる.

$$\begin{aligned} g_{0,d}^p(t) &= \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \langle \delta(t - d), \psi^R(t - pk) \rangle \psi^R(t - pk) \right. \\ &\quad \left. + \langle \delta(t - d), \psi^I(t - pk) \rangle \psi^I(t - pk) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \langle \delta(t - d), \psi^R((t - d) - pk + d) \rangle \psi^R((t - d) - pk + d) \right. \\ &\quad \left. + \langle \delta(t - d), \psi^I((t - d) - pk + d) \rangle \psi^I((t - d) - pk + d) \right\} \\ &= g_0^p(t - d), \quad \forall d \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (48)$$

(45) より, $q = -d$ の時, (48) の 3, 4 行目は $g_q^p(t - d)$ に等しくなるが, (46) より $g_q^p(t)$ は変数 q に対して独立であるから, (48) の 5 行目が導かれる. 従って, PTI

条件 (44) のもと, (38)-(40), (45), (47) および (48) より, $\psi^R(t - pk)$, $\psi^I(t - pk)$, $k \in \mathbf{Z}$ による $\delta(t)$ の変換式 (45) は PTI となる.

定理 1. は, ディラックのデルタ関数 $\delta(t)$ に対する DT-CDWT の PTI 条件を保証するものであるが, 次に任意の関数 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ に対する複素数ウェーブレットによる変換の, PTI 条件を保証する定理 3. を証明する. この定理のためには補題 2. が必要であるから, こちらを先に証明する.

補題 2. $\psi(t)$ を複素数ウェーブレットとする. そして周波数領域において, $\hat{\psi}(\omega)$ は以下のような長さ Ω のコンパクトサポート領域を持つものとする.

$$\text{supp } \hat{\psi}(\omega) = [\omega_1, \omega_2], \quad 0 < \omega_1 < \omega_2, \quad (49)$$

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1 > 0. \quad (50)$$

次に $p > 0$ は次式を満たす実数定数とする.

$$0 < p\Omega \leq 2\pi \quad (\text{PTI 条件}). \quad (51)$$

q を任意の実数として, 関数 $h_q^p(t)$ を次のように定義する.

$$h_q^p(t) = \sum_k \overline{\psi(-pk - q)} \psi(t - pk - q). \quad (52)$$

すると以下の式が得られる.

$$h_q^p(t) = h_0^p(t) = \sum_k \overline{\psi(-pk)} \psi(t - pk), \quad \forall q \in \mathbf{R}, \quad (53)$$

$$\hat{h}_q^p(\omega) = \hat{h}_0^p(\omega) = \frac{1}{p} |\hat{\psi}(\omega)|^2, \quad \forall q \in \mathbf{R}. \quad (54)$$

証明 (12), (13) を適用することにより, (52) のフーリエ変換は次式で表せる.

$$\hat{h}_q^p(\omega) = \sum_k \overline{\psi(-pk - q)} \hat{\psi}(\omega) e^{-ipk\omega} e^{-iq\omega} = \hat{\psi}(\omega) e^{-iq\omega} \sum_k \overline{\psi(-pk - q)} e^{ipk\omega}. \quad (55)$$

逆フーリエ変換の (11) より, (55) の中の $\psi(-pk - q)$ は次のように表せる.

$$\psi(-pk - q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\xi) e^{-i(pk+q)\xi} d\xi. \quad (56)$$

従って (55) の中の $\sum_k \overline{\psi(-pk - q)} e^{ipk\omega}$ は次のように表せる.

$$\begin{aligned} \sum_k \overline{\psi(-pk - q)} e^{ipk\omega} &= \sum_k \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\xi) e^{-i(pk+q)\xi} d\xi \right\} e^{ipk\omega} \\ &= \sum_k \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{\psi}(\xi) e^{-iq\xi} \right) e^{-ipk\xi} d\xi \right\} e^{ipk\omega} \\ &= \sum_k \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/p} \sum_m \left(\hat{\psi}(\xi + 2\pi m/p) e^{-iq(\xi + 2\pi m/p)} \right) e^{-ipk\xi} d\xi \right\} e^{ipk\omega} \\ &= \frac{1}{p} \sum_m \hat{\psi}(\omega + 2\pi m/p) e^{-iq(\omega + 2\pi m/p)}. \end{aligned} \quad (57)$$

(57) の 3 行目では, $e^{-ipk\xi}$ の周期が $2\pi/p$ であることを考慮して, 積分区間を長さ $2\pi/p$ の間隔に細切れにしている. するとこれは, 正規直交系 $\{\sqrt{\frac{p}{2\pi}}e^{ipk\omega}\}$ による間隔 $[0, 2\pi/p)$ のフーリエ級数展開と見なすことができ, (57) の 4 行目が導かれる. (57) を (55) に代入することにより, 次式が得られる.

$$\hat{h}_q^p(\omega) = \hat{\psi}(\omega)e^{-iq\omega} \frac{1}{p} \sum_m \overline{\hat{\psi}(\omega + 2\pi m/p)e^{-iq(\omega + 2\pi m/p)}}. \quad (58)$$

$\omega \notin \text{supp } \hat{\psi}(\omega)$ の時, $\hat{\psi}(\omega) = 0$ が得られ, $\hat{h}_q^p(\omega) = 0$ が成立し, 次式が得られる.

$$\hat{h}_q^p(\omega) = \frac{1}{p} |\hat{\psi}(\omega)|^2, \quad \omega \notin \text{supp } \hat{\psi}(\omega). \quad (59)$$

次に $\omega \in \text{supp } \hat{\psi}(\omega)$ の時, (51) より $\Omega \leq 2\pi/p$ が得られ, $\hat{\psi}(\omega + 2\pi m/p) = \hat{\psi}(\omega)$, $m = 0$ および $\hat{\psi}(\omega + 2\pi m/p) = 0$, $m \neq 0$ が得られる. 従って (58) より次式が得られる.

$$\hat{h}_q^p(\omega) = \frac{1}{p} \hat{\psi}(\omega)e^{-iq\omega} \overline{\hat{\psi}(\omega)e^{-iq\omega}} = \frac{1}{p} |\hat{\psi}(\omega)|^2, \quad \omega \in \text{supp } \hat{\psi}(\omega). \quad (60)$$

(59), (60) より次式が得られる.

$$\hat{h}_q^p(\omega) = \frac{1}{p} |\hat{\psi}(\omega)|^2. \quad (61)$$

(61) の右辺は q を含まないので, (52) の $h_q^p(t)$ は変数 q に対して独立である. 従って次式が得られる.

$$h_q^p(t) = h_0^p(t) = \sum_k \overline{\psi(-pk)} \psi(t - pk), \quad \forall q \in \mathbf{R}. \quad (62)$$

(62) より $\hat{h}_q^p(\omega) = \hat{h}_0^p(\omega)$, $q \in \mathbf{R}$ が成立するので, (61) は次のように表せる.

$$\hat{h}_q^p(\omega) = \hat{h}_0^p(\omega) = \frac{1}{p} |\hat{\psi}(\omega)|^2, \quad \forall q \in \mathbf{R}. \quad (63)$$

証明終わり.

定理 3. 補題 2. の (49), (50) の条件を満たす複素数ウェーブレット $\psi(t)$, PTI 条件 (51) を満たす実数定数 $p > 0$, および任意の実数 q を考える. そして任意の関数 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ が, $\psi(t - pk - q)$, $k \in \mathbf{Z}$ により, 次式で変換される場合を考える.

$$u_q^p(t) = \sum_k \langle f(t), \psi(t - pk - q) \rangle \psi(t - pk - q). \quad (64)$$

すると次式が得られる.

$$\hat{u}_q^p(\omega) = \frac{1}{p} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \hat{f}(\omega), \quad \forall q \in \mathbf{R}. \quad (65)$$

証明 (2) より (64) は次のように表せる.

$$\begin{aligned} u_q^p(t) &= \sum_k \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi(x - pk - q)} dx \times \psi(t - pk - q) \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sum_k \left\{ \overline{\psi(x - pk - q)} \psi(t - pk - q) \right\} dx. \end{aligned} \quad (66)$$

(66) の1行目では, 変数 t と区別をするために, 内積の積分には変数 $x \in \mathbf{R}$ を使用している. PTI条件 (51) のもと, (52), (53) より, (66) の中の $\sum_k \{ \overline{\psi(x - pk - q)} \psi(t - pk - q) \}$ は次のように表せる.

$$\begin{aligned} &\sum_k \left\{ \overline{\psi(x - pk - q)} \psi(t - pk - q) \right\} \\ &= \sum_k \left\{ \overline{\psi(-pk - (q - x))} \psi((t - x) - pk - (q - x)) \right\} \\ &= h_{q-x}^p(t - x) = h_0^p(t - x), \quad \forall q \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (67)$$

(67) を (66) に代入することにより次式が得られる.

$$u_q^p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) h_0^p(t - x) dx, \quad \forall q \in \mathbf{R}. \quad (68)$$

(68) の右辺は, $f(t)$ と $h_0^p(t)$ の畳み込み演算であるから, (68) のフーリエ変換は次のように表せる.

$$\begin{aligned} \hat{u}_q^p(\omega) &= \hat{f}(\omega) \hat{h}_0^p(\omega) \\ &= \frac{1}{p} |\hat{\psi}(\omega)|^2 \hat{f}(\omega), \quad \forall q \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (69)$$

(69) の2行目では (54) を代入している.

証明終わり.

定理 3. を (47), (48) と同じように考察することにより, PTI 条件 (51) のもと, 任意の関数 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ に対する複素数ウェーブレット $\psi(t - pk)$, $k \in \mathbf{Z}$ による変換式 (64) は, PTI となることが証明される.

4 PTI ウェーブレット基底の設計法 ^[11]

Meyer ウェーブレットのスケーリング関数は, 時間軸上の任意の位置に平行移動しても, それは新たな直交ウェーブレットのスケーリング関数となる. この章では, これを証明するとともに, $1/2$ サンプルの距離を置いて2つの Meyer ウェーブレットのスケーリング関数を配置することにより, PTI ウェーブレット基底が設計できることを示す.

4.1 スケーリング関数 $\phi^b(t)$ の定義

Meyer ウェーブレットのスケーリング関数 $\phi^M(t)$ を用いて, 新たなスケーリング関数 $\phi^b(t)$ を次のように定義する.

$$\phi^b(t) = \phi^M(t - b), \quad (70)$$

ただし $b \in \mathbf{R}$ は定数とする. ここで $\phi^b(t)$ が正規直交スケーリング関数になることを示すが, 文献 [17] によると, 以下の条件を満たす $\phi(t)$ が正規直交スケーリング関数となる.

- 1) $V_j \subset V_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbf{Z},$
- 2) $f \in V_j \Leftrightarrow f(2(\cdot)) \in V_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbf{Z},$
- 3) $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\},$
- 4) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R}),$
- 5) 関数 $\phi \in V_0$ が存在して $\{\phi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}\}$ は V_0 の正規直交基底を成す (リース基底でも可).

$\phi^b(t)$ が Meyer ウェーブレットのスケーリング関数 $\phi^M(t)$ を距離 b ほど平行移動したものであることを考慮すると, $\phi^b(t)$ は上記の条件のうち, すでに 3)-5) を満たしている. 例えば $\phi^b(t)$ が (20) の直交関係を満たすことは次のように証明できる. すなわち (70), (34) より, 次のような式の展開が可能である.

$$\langle \phi^b(t - k), \phi^b(t - l) \rangle = \langle \phi^M(t - b - k), \phi^M(t - b - l) \rangle = \delta_{k,l}. \quad (71)$$

次に 1), 2) の条件であるが, これは $\phi^b(t)$ に関して (18) を満たすツースケール数列 $\{p_n^b\}$ が存在することを示せばよいが, これは次の章で証明する.

4.2 ツースケール数列 $\{p_n^b\}$

スケーリング関数 $\phi^b(t)$ に関して, ツースケール関係 (18) を満足するツースケール数列 $\{p_n^b\}$ が存在することは, 以下の定理により証明される.

定理 4. (70) のスケーリング関数 $\phi^b(t)$ におけるツースケール数列 $\{p_n^b\}$ は, Meyer ウェーブレットのスケーリング関数 $\phi^M(t)$ を用いて, 次のように求まる.

$$p_n^b = \phi^M\left(\frac{n - b}{2}\right). \quad (72)$$

証明 (18) と (25) は同値であるから, $\{p_n^b\}$ は (25) から求まる. $\phi^b(t)$ と p_n^b を (25) に代入することにより, $\{p_n^b\}$ に関する次のような関係式が求まる.

$$\hat{\phi}^b(\omega) = \frac{1}{2} P_\omega^b \left(\frac{\omega}{2} \right) \hat{\phi}^b \left(\frac{\omega}{2} \right). \quad (73)$$

(73) の ω を 2ω に置き換えることにより, 次式が求まる.

$$2 \hat{\phi}^b(2\omega) = P_\omega^b(\omega) \hat{\phi}^b(\omega). \quad (74)$$

(12), (13) および (70) より, $\hat{\phi}^b(\omega)$ は次のように表せる.

$$\hat{\phi}^b(\omega) = \hat{\phi}^M(\omega) e^{-ib\omega}. \quad (75)$$

(75) の ω を 2ω に置き換えることにより, 次式が求まる.

$$\hat{\phi}^b(2\omega) = \hat{\phi}^M(2\omega) e^{-i2b\omega}. \quad (76)$$

(75), (76) を (74) に代入することにより次式が得られる.

$$2 \hat{\phi}^M(2\omega) e^{-ib\omega} = P_\omega^b(\omega) \hat{\phi}^M(\omega). \quad (77)$$

ここで ω の領域を場合分けして, (77) を考察する. (29) より $\hat{\phi}^M(\omega) = 1$, $|\omega| \leq 2\pi/3$ が得られるので, これを (77) に代入すると次式が得られる.

$$P_\omega^b(\omega) = 2 \hat{\phi}^M(2\omega) e^{-ib\omega}, \quad |\omega| \leq 2\pi/3. \quad (78)$$

(29), (33) より, $\hat{\phi}^M(2\omega) = 0$, $\hat{\phi}^M(\omega) \neq 0$, $2\pi/3 < |\omega| < \pi$ が得られるので, これを (77) に代入して次式が得られる.

$$P_\omega^b(\omega) = 0, \quad 2\pi/3 < |\omega| < \pi. \quad (79)$$

(29), (30) を考慮すると, (78), (79) より次式が得られる.

$$P_\omega^b(\omega) = 2 \hat{\phi}^M(2\omega) e^{-ib\omega}, \quad |\omega| < \pi. \quad (80)$$

同じく (29), (30) を考慮し, さらに (80) より次式が得られる.

$$2 \hat{\phi}^M(2\omega) e^{-ib\omega} = \begin{cases} P_\omega^b(\omega), & |\omega| < \pi, \\ 0, & |\omega| \geq \pi. \end{cases} \quad (81)$$

(11)-(13) を考慮しながら, (81) を逆フーリエ変換すると次式が得られる.

$$\phi^M \left(\frac{t-b}{2} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_\omega^b(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (82)$$

$t = n$ ($n \in \mathbf{Z}$) を (82) に代入し, (9) を考慮すると次式が得られる.

$$\phi^M \left(\frac{n-b}{2} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_\omega^b(\omega) e^{i\omega n} d\omega = p_n^b. \quad (83)$$

よって以下の式が得られる.

$$p_n^b = \phi^M \left(\frac{n-b}{2} \right). \quad (84)$$

証明終わり.

4.3 PTI ウェーブレット基底

先にも説明したとおり PTI DT-CDWT では, Hilbert 変換ペアを成す 2 種類のウェーブレット基底による DWT の並列処理により得られた 2 種類のウェーブレット係数を, 複素数の実数部と虚数部として扱う. そこで PTI DT-CDWT では, 並列処理される DWT を実数部と虚数部に分けて考える. そしてそれぞれに用いるマザーウェーブレットやスケーリング関数を, 以下のように定義, 命名する. $\psi^R(t)$, $\psi^I(t)$ は, 実数部マザーウェーブレット, および虚数部マザーウェーブレット, また $\phi^R(t)$, $\phi^I(t)$ は, 実数部スケーリング関数, および虚数部スケーリング関数とする. そして $\{p_n^R\}$, $\{p_n^I\}$ は, それぞれ $\phi^R(t)$, $\phi^I(t)$ に関連するツースケール数列 (cf. (18)), $\{q_n^R\}$, $\{q_n^I\}$ は, それぞれ $\psi^R(t)$, $\psi^I(t)$ に関連するウェーブレット数列 (cf. (19)) とする. ところで Selesnick[6, 7] の研究によれば, 以下のような関係が成立する時, $\psi^R(t)$, $\psi^I(t)$ は (35)-(37) を満足する Hilbert 変換ペアを成す.

$$P_\omega^I(\omega) = P_\omega^R(\omega)e^{-i\frac{\omega}{2}}, \quad |\omega| < \pi. \quad (85)$$

そこで (72) で表されるツースケール数列 $\{p_n^b\}$ における b の値として, 以下のような b_1 , b_2 を考える.

$$b_1 = b, \quad (86)$$

$$b_2 = b + \frac{1}{2}, \quad (87)$$

ただし $b \in \mathbf{R}$ は定数とする. これら b_1 , b_2 を (80) の b に代入すると, 次式が得られる.

$$P_\omega^b(\omega) = 2\hat{\phi}^M(2\omega)e^{-ib\omega}, \quad |\omega| < \pi, \quad (88)$$

$$P_\omega^{b+\frac{1}{2}}(\omega) = 2\hat{\phi}^M(2\omega)e^{-i(b+\frac{1}{2})\omega}, \quad |\omega| < \pi. \quad (89)$$

さらに (88), (89) より次式が求まる.

$$P_\omega^{b+\frac{1}{2}}(\omega) = P_\omega^b(\omega)e^{-i\frac{\omega}{2}}, \quad |\omega| < \pi. \quad (90)$$

(90) の $P_\omega^{b+\frac{1}{2}}(\omega)$ と $P_\omega^b(\omega)$ の関係は, (85) の $P_\omega^I(\omega)$ と $P_\omega^R(\omega)$ の関係に等しいから, 以下のようにツースケール数列を設定すると, Hilbert 変換ペアが得られる.

$$P_\omega^R(\omega) = P_\omega^b(\omega), \quad (91)$$

$$P_\omega^I(\omega) = P_\omega^{b+\frac{1}{2}}(\omega). \quad (92)$$

すなわち (72) より, ツースケール数列 $\{p_n^R\}$, $\{p_n^I\}$ は以下のように求まる.

$$p_n^R = p_n^b = \phi^M\left(\frac{n-b}{2}\right), \quad (93)$$

$$p_n^I = p_n^{b+\frac{1}{2}} = \phi^M\left(\frac{n-b-1/2}{2}\right). \quad (94)$$

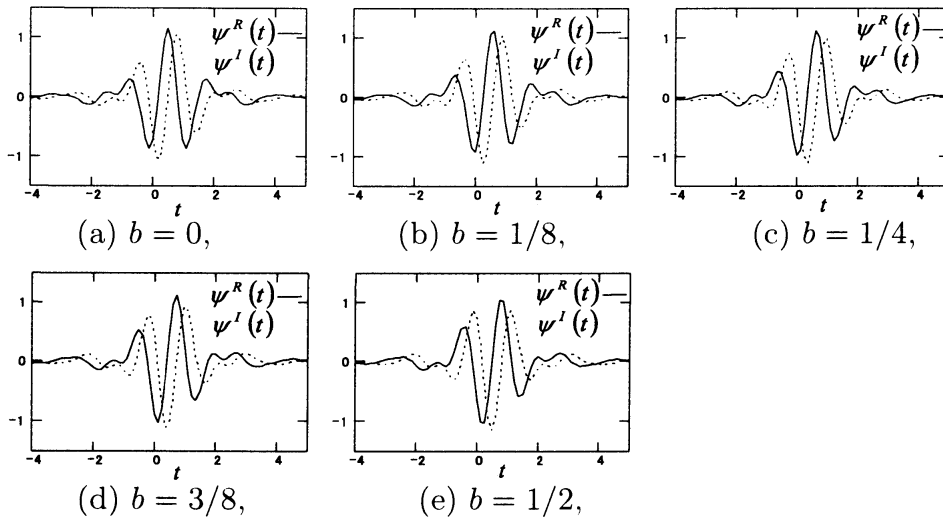


図 2: The real and imaginary mother wavelets $\psi^R(t)$, $\psi^I(t)$, $0 \leq b \leq 1/2$.

(70) より, 実数部スケーリング関数 $\phi^R(t)$, 虚数部スケーリング関数 $\phi^I(t)$ は次のように求まる.

$$\phi^R(t) = \phi^b(t) = \phi^M(t - b), \quad (95)$$

$$\phi^I(t) = \phi^{b+\frac{1}{2}}(t) = \phi^M\left(t - b - \frac{1}{2}\right), \quad (96)$$

ただし $\phi^M(t)$ は Meyer ウェーブレットのスケーリング関数である. 続いて (19), (23) より, 実数部マザーウェーブレット $\psi^R(t)$, 虚数部マザーウェーブレット $\psi^I(t)$, およびそれらに関連するウェーブレット数列 $\{q_n^R\}$, $\{q_n^I\}$ は次のように求まる.

$$\psi^R(t) = \sum_n q_n^R \phi^R(2t - n), \quad (97)$$

$$\psi^I(t) = \sum_n q_n^I \phi^I(2t - n), \quad (98)$$

$$q_n^R = (-1)^{1-n} p_{1-n}^R, \quad (99)$$

$$q_n^I = (-1)^{1-n} p_{1-n}^I. \quad (100)$$

(93)-(96) の定数 $b \in \mathbf{R}$ を可変することにより, (97), (98) の実数部マザーウェーブレット $\psi^R(t)$, 虚数部マザーウェーブレット $\psi^I(t)$ は, さまざまな形状を持つ. 図 2 には, $0 \leq b \leq 1/2$ における $\psi^R(t)$, $\psi^I(t)$ の形状の変化の様子を示す. これらすべての $\psi^R(t)$, $\psi^I(t)$ を, PTI ウェーブレット基底のマザーウェーブレットとして用いることが可能である.

5 PTI DT-CDWT の計算法^[11]

この章では、PTI DT-CDWT の計算法について考察する。まずターゲットのデジタル信号は、補間法に基づいて、スケーリング関数により補間される。続いて補間により得られたスケーリング係数をもとに、変換は分解アルゴリズムにより行われ、逆変換は再構成アルゴリズムにより行われる。

5.1 補間法

最初に補間法に必要な2つの定理を証明しておく。

定理 5. (15)-(17) で表されるディラックのデルタ関数 $\delta(t)$ ，および (95)，(96) で表される $\phi^R(t)$ ， $\phi^I(t)$ を用いて，次のような関数 $s(t)$ を定義する。

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \langle \delta(t), \phi^R(t-k) \rangle \phi^R(t-k) + \langle \delta(t), \phi^I(t-k) \rangle \phi^I(t-k) \right\}. \quad (101)$$

すると次式が得られる

$$s(n) = \delta_{n,0}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (102)$$

証明 (95)，(96) より，(101) の $s(t)$ は次のように表せる。

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \langle \delta(t), \phi^M(t-k-b) \rangle \phi^M(t-k-b) \right. \\ &\quad \left. + \langle \delta(t), \phi^M\left(t-k-b-\frac{1}{2}\right) \rangle \phi^M\left(t-k-b-\frac{1}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \left\langle \delta(t), \phi^M\left(t-\frac{k}{2}-b\right) \right\rangle \phi^M\left(t-\frac{k}{2}-b\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \overline{\phi^M\left(-\frac{k}{2}-b\right)} \phi^M\left(t-\frac{k}{2}-b\right). \end{aligned} \quad (103)$$

(103) の4行目では，(2)，(17) を適用している。次に $t = n \in \mathbf{Z}$ を (103) に代入し，(72)，(28) を適用すると次式が得られる。

$$s(n) = \frac{1}{2} \sum_k \overline{\phi^M\left(\frac{-k-2b}{2}\right)} \phi^M\left(\frac{2n-k-2b}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_k \overline{p_{-k}^{2b}} p_{2n-k}^{2b} = \delta_{n,0}. \quad (104)$$

証明終わり。

定理 6. 任意のデジタル信号 $\{f_l\}$ ($l \in \mathbf{Z}$, $f_l \in \mathbf{R}$) と (15)-(17) で表される $\delta(t)$ より, 以下のような関数 $f^\delta(t)$ を定義する.

$$f^\delta(t) = \sum_l f_l \delta(t-l). \quad (105)$$

(105) の $f^\delta(t)$ が, $\phi^R(t-k)$, $\phi^I(t-k)$, $k \in \mathbf{Z}$ により, 次式で変換される場合を考える.

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \langle f^\delta(t), \phi^R(t-k) \rangle \phi^R(t-k) + \langle f^\delta(t), \phi^I(t-k) \rangle \phi^I(t-k) \right\}, \quad (106)$$

ただし $\phi^R(t)$, $\phi^I(t)$ は (95), (96) で表される実数部スケーリング関数と虚数部スケーリング関数である. すると次式が得られる.

$$f(n) = f_n, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (107)$$

証明 (105) を (106) に代入することにより次式が得られる.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \left\langle \sum_l f_l \delta(t-l), \phi^R(t-k) \right\rangle \phi^R(t-k) \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \sum_l f_l \delta(t-l), \phi^I(t-k) \right\rangle \phi^I(t-k) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_l \sum_k \left\{ f_l \left\langle \delta(t-l), \phi^R(t-k) \right\rangle \phi^R(t-k) \right. \\ &\quad \left. + f_l \left\langle \delta(t-l), \phi^I(t-k) \right\rangle \phi^I(t-k) \right\} \\ &= \sum_l \left[f_l \times \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \left\langle \delta(t-l), \phi^R(t-l-k) \right\rangle \phi^R(t-l-k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left\langle \delta(t-l), \phi^I(t-l-k) \right\rangle \phi^I(t-l-k) \right\} \right] \\ &= \sum_l f_l s(t-l). \end{aligned} \quad (108)$$

(108) の 5, 6 行目では, k を $l+k$ に置き換えている. そして 7 行目では, (101) を代入している. 次に $t = n \in \mathbf{Z}$ を (108) に代入し, (102) を適用すると次式が得られる.

$$f(n) = \sum_l f_l s(n-l) = \sum_l f_l \delta_{n-l,0} = f_n. \quad (109)$$

証明終わり.

(108) の 1, 2 行目を考察すると, $\phi^R(t-k)$ と $\phi^I(t-k)$ の係数 $c_{0,k}^R$ と $c_{0,k}^I$ は次のように表せる.

$$c_{0,k}^R = \frac{1}{2} \left\langle \sum_l f_l \delta(t-l), \phi^R(t-k) \right\rangle, \quad (110)$$

$$c_{0,k}^I = \frac{1}{2} \left\langle \sum_l f_l \delta(t-l), \phi^I(t-k) \right\rangle. \quad (111)$$

(2), (17) より, (110) の $c_{0,k}^R$ は次のように表せる.

$$\begin{aligned} c_{0,k}^R &= \frac{1}{2} \sum_l f_l \langle \delta(t-l), \phi^R(t-k) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_l f_l \langle \delta(y), \phi^R(y+l-k) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_l f_l \overline{\phi^R(l-k)}. \end{aligned} \quad (112)$$

(112) の 2 行目では, $t-l$ を y に置き換えている. おなじょうにして, (111) の $c_{0,k}^I$ は次式で表せる.

$$c_{0,k}^I = \frac{1}{2} \sum_l f_l \overline{\phi^I(l-k)}. \quad (113)$$

(108) の 1, 2 行目と (110)-(113) より, 任意のデジタル信号 $\{f_l\}$ の $\phi^R(t-k)$, $\phi^I(t-k)$, $k \in \mathbf{Z}$ による補間はこのように表せる.

$$f(t) = \sum_k \{c_{0,k}^R \phi^R(t-k) + c_{0,k}^I \phi^I(t-k)\}, \quad (114)$$

$$c_{0,k}^R = \frac{1}{2} \sum_l f_l \overline{\phi^R(l-k)}, \quad (115)$$

$$c_{0,k}^I = \frac{1}{2} \sum_l f_l \overline{\phi^I(l-k)}. \quad (116)$$

定理 6. の (107) より $f(n) = f_n$, $n \in \mathbf{Z}$ が得られ, 関数 $f(t)$ はデジタル信号 $\{f_n\}$ を補間する.

5.2 PTI DT-CDWT の計算法

PTI DT-CDWT の計算に必要な数列はこのように求まる.

$$a_n^R = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{p_{-n}^R}, \quad b_n^R = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{q_{-n}^R}, \quad (117)$$

$$g_n^R = \frac{1}{\sqrt{2}} p_n^R, \quad h_n^R = \frac{1}{\sqrt{2}} q_n^R, \quad (118)$$

$$a_n^I = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{p_{-n}^I}, \quad b_n^I = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{q_{-n}^I}, \quad (119)$$

$$g_n^I = \frac{1}{\sqrt{2}} p_n^I, \quad h_n^I = \frac{1}{\sqrt{2}} q_n^I. \quad (120)$$

$\{a_n^R\}$, $\{b_n^R\}$ は実数部分解数列, $\{g_n^R\}$, $\{h_n^R\}$ は実数部再構成数列, $\{a_n^I\}$, $\{b_n^I\}$ は虚数部分解数列, $\{g_n^I\}$, $\{h_n^I\}$ は虚数部再構成数列である. (114)-(116) のスケーリ

ング係数 $\{c_{0,n}^R\}, \{c_{0,n}^I\}$ を用いて, PTI DT-CDWT は以下の分解アルゴリズムにより計算される.

$$c_{j-1,n}^R = \sum_k a_{2n-k}^R c_{j,k}^R, \quad (121)$$

$$d_{j-1,n}^R = \sum_k b_{2n-k}^R c_{j,k}^R, \quad (122)$$

$$c_{j-1,n}^I = \sum_k a_{2n-k}^I c_{j,k}^I, \quad (123)$$

$$d_{j-1,n}^I = \sum_k b_{2n-k}^I c_{j,k}^I. \quad (124)$$

(121)-(124) を $j = 0$ より $j = J + 1$ ($J < 0, J \in \mathbf{Z}$) まで繰り返すことにより, 以下の変換式が得られる.

$$f(t) = \sum_{j=J}^{-1} \sum_k \{d_{j,k}^R \psi_{j,k}^R(t) + d_{j,k}^I \psi_{j,k}^I(t)\} + \sum_k \{c_{J,k}^R \phi_{J,k}^R(t) + c_{J,k}^I \phi_{J,k}^I(t)\}, \quad (125)$$

$$\psi_{j,k}^R(t) = \sqrt{2}^j \psi^R(2^j t - k), \quad (126)$$

$$\psi_{j,k}^I(t) = \sqrt{2}^j \psi^I(2^j t - k), \quad (127)$$

$$\phi_{j,k}^R(t) = \sqrt{2}^j \phi^R(2^j t - k), \quad (128)$$

$$\phi_{j,k}^I(t) = \sqrt{2}^j \phi^I(2^j t - k). \quad (129)$$

PTI DT-CDWT の逆変換は, 以下の再構成アルゴリズムにより計算される.

$$c_{j,n}^R = \sum_k \{g_{n-2k}^R c_{j-1,k}^R + h_{n-2k}^R d_{j-1,k}^R\}, \quad (130)$$

$$c_{j,n}^I = \sum_k \{g_{n-2k}^I c_{j-1,k}^I + h_{n-2k}^I d_{j-1,k}^I\}. \quad (131)$$

(130), (131) を繰り返すことにより, レベル 0 のスケーリング係数 $\{c_{0,n}^R\}, \{c_{0,n}^I\}$ が得られる. 続いて (114) より関数 $f(t)$ が得られ, (107) の $f_n = f(n)$, $n \in \mathbf{Z}$ の関係を用いることにより, デジタル信号 $\{f_n\}$ が得られる.

5.3 PTI DT-CDWT における PTI の証明

変換式 (125) は, (105) で表される $f^\delta(t)$ を (126)-(129) により変換したものと考えられ, 次のように表すことができる [11].

$$f(t) = \sum_{j=J}^{-1} g_j(t) + f_J(t), \quad (132)$$

$$g_j(t) = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \langle f^\delta, \psi_{j,k}^R \rangle \psi_{j,k}^R(t) + \langle f^\delta, \psi_{j,k}^I \rangle \psi_{j,k}^I(t) \right\}, \quad (133)$$

$$f_J(t) = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \langle f^\delta, \phi_{J,k}^R \rangle \phi_{J,k}^R(t) + \langle f^\delta, \phi_{J,k}^I \rangle \phi_{J,k}^I(t) \right\}, \quad (134)$$

ただし $J < 0, J \in \mathbf{Z}$ である. ここで定理 1. の変換式 (45) と, 上記の変換式 (133) および (126), (127) を比較して考慮すると

$$\psi^R(t) = \psi_{j,0}^R(t), \quad \psi^I(t) = \psi_{j,0}^I(t), \quad (135)$$

$$p = 2^{-j}, \quad q = 0, \quad (136)$$

と置くことにより, 定理 1. の変換式 (45) の $g_q^p(t)$ と, 変換式 (133) の $g_j(t)$ は, $\delta(t) \neq f^\delta(t)$ である点を除いて, ほぼ一致する. ところで (105) の $f^\delta(t) = \sum_l f_l \delta(t-l)$, $l \in \mathbf{Z}$ は, デルタ関数 $\delta(t)$ を平行移動したものに, デジタル信号 $\{f_l\}$ の数列を掛け合わせて合成した関数である. 従って定理 1. より, PTI 条件 (44) が成立する時, 変換式 (133) の $g_j(t)$ は PTI となる. ここで次のような $\psi_{j,0}(t)$ を定義する.

$$\psi_{j,0}(t) = \psi_{j,0}^R(t) + i\psi_{j,0}^I(t). \quad (137)$$

(135), (136) が成立していることを前提とすると, (41) の $\psi(t)$ と (137) の $\psi_{j,0}(t)$ は等しくなる. 次に (137) の $\psi_{j,0}(t)$ のコンパクトサポートの長さ Ω を考察する. (137) の $\psi_{j,0}^R(t)$ と $\psi_{j,0}^I(t)$ は Hilbert 変換ペアを成すので, (37) より次式が得られる.

$$\hat{\psi}_{j,0}(\omega) = \hat{\psi}_{j,0}^R(\omega) + i\hat{\psi}_{j,0}^I(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq 0, \\ 2\hat{\psi}_{j,0}^R(\omega), & \omega > 0. \end{cases} \quad (138)$$

(126) より, $\psi_{j,0}^R(t)$ は $\psi^R(t)$ で表される. そこで $\hat{\psi}^R(\omega)$ のコンパクトサポート領域を $\hat{\phi}^R(\omega)$ のコンパクトサポート領域で表すことを考える. (95), (12) および (13) より, $|\hat{\phi}^R(\omega)|$ は次のように表せる.

$$|\hat{\phi}^R(\omega)| = |\hat{\phi}^M(\omega)e^{-ib\omega}| = |\hat{\phi}^M(\omega)|. \quad (139)$$

ところで任意の直交ウェーブレット基底における, マザーウェーブレット $\psi(t)$ およびスケーリング関数 $\phi(t)$ において, 次の関係が成立する [17].

$$|\hat{\phi}(2\omega)|^2 + |\hat{\psi}(2\omega)|^2 = |\hat{\phi}(\omega)|^2, \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (140)$$

$$\therefore |\hat{\psi}(\omega)|^2 = |\hat{\phi}(\omega/2)|^2 - |\hat{\phi}(\omega)|^2, \quad \omega \in \mathbf{R}. \quad (141)$$

(141), (139) および (29)-(33) より次式が得られる.

$$|\hat{\psi}^R(\omega)|^2 = \begin{cases} |\hat{\phi}^M(\omega/2)|^2 - |\hat{\phi}^M(\omega)|^2 > 0, & 2\pi/3 < |\omega| < 8\pi/3, \\ 0, & |\omega| \leq 2\pi/3, 8\pi/3 \leq |\omega|. \end{cases} \quad (142)$$

(126), (138) および (142) より次式が得られる.

$$\text{supp } \hat{\psi}_{j,0}(\omega) = [2\pi \times 2^j/3, 8\pi \times 2^j/3], \quad (143)$$

$$\Omega = 8\pi \times 2^j/3 - 2\pi \times 2^j/3 = 2^{j+1}\pi. \quad (144)$$

(136), (144) より次式が得られる.

$$p\Omega = 2^{-j} \times 2^{j+1}\pi = 2\pi. \quad (145)$$

従って (135), (136) のもと, PTI 条件 (44) が成立するため, 定理 1. より (133) の $g_j(t)$ は PTI となる.

6 今後の展望とまとめ

本文では完全シフト不変定理と, それに基づいて設計された Hilbert 変換ペアの PTI ウェーブレット基底について述べてきた. またこの他にも筆者ら [14] は, これらの理論に基づき, 完全シフト不変性を実現する複素数ウェーブレット・パッケージ変換を提案している. そして最近, 筆者らは, 本文で紹介した定理 3. を基礎に, 正規直交複素数ウェーブレット基底を発見した. これは次のようなものである. Shannon ウェーブレットを $\psi^R(t)$ とし, Hilbert 変換を作用素 $\mathcal{H}$ で表し, 以下のマザーウェーブレット $\psi(t)$ を定義する.

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^R(t) + i\psi^I(t)), \quad (146)$$

$$\psi^I(t) = \mathcal{H}\psi^R(t). \quad (147)$$

以上の定義のもと, 以下の複素数ウェーブレットの集合 $\{\psi_{j,k}^P(t), \psi_{j,k}^M(t) : j, k \in \mathbf{Z}\}$ は正規直交基底を成す.

$$\psi_{j,k}^P(t) = \sqrt{2^j} \psi(2^j t - 2k), \quad j, k \in \mathbf{Z}, \quad (148)$$

$$\psi_{j,k}^M(t) = \sqrt{2^j} \overline{\psi(2^j t - 2k)}, \quad j, k \in \mathbf{Z}. \quad (149)$$

以上のような複素数ウェーブレットの集合が正規直交基底となることは, 定理 3. より容易に証明できる. すなわち任意の関数 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ は以下のように展開できる.

$$f(t) = \sum_{j,k} \left\{ \langle f, \psi_{j,k}^P \rangle \psi_{j,k}^P(t) + \langle f, \psi_{j,k}^M \rangle \psi_{j,k}^M(t) \right\}. \quad (150)$$

このように, 完全シフト不変定理に基づく PTI ウェーブレット基底には, 今後の発展性があり, 信号処理や画像処理等にますます応用されていくことが期待される.

参考文献

- [1] S. Mallat: A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.11, No.7, 674–693(1989).

- [2] S. G. Mallat and Z. Zhang: Matching pursuits with time-frequency dictionaries; *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol.41, No.12, 3397–3415(1993).
- [3] J.F.A. Magarey and N.G. Kingsbury: Motion estimation using a complex-valued wavelet transform; *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol.46, No.4, 1069–1084(1998).
- [4] N. Kingsbury: Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals; *Journal of Applied and Computational Harmonic Analysis*, Vol.10, No.3, 234–253(2001).
- [5] 章 忠, 戸田浩, 川畑洋昭: RI-Spline ウェーブレットおよびその非定常信号解析への応用, 第2報: RI-Spline ウェーブレットによる複素数多重解像度解析; 計測自動制御学会論文集, Vol.39, No.7, 612–623(2003).
- [6] I. W. Selesnick: Hilbert Transform Pairs of Wavelet Bases; *IEEE Signal Processing Letters*, 8-6, 170–173(2001).
- [7] I. W. Selesnick: The design of approximate Hilbert transform pairs of wavelet bases; *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol.50, No.5, 1144–1152(2002).
- [8] 章 忠, 戸田 浩: シフト不変な複素数離散ウェーブレット変換 第1報: 複素数離散ウェーブレット変換の理論と原理; *Journal of Signal Processing* 「信号処理」, Vol.11, No.5, 387–400(2007).
- [9] 戸田 浩, 章 忠: シフト不変な複素数離散ウェーブレット変換 第2報: 直交ウェーブレットを基にした複素数ウェーブレット設計法の一提案; *Journal of Signal Processing* 「信号処理」, Vol.11, No.5, 401–412(2007).
- [10] 戸田 浩, 章 忠: シフト不変な複素数離散ウェーブレット変換 第3報: 新たな複素数離散ウェーブレット変換の計算法; *Journal of Signal Processing* 「信号処理」, Vol.11, No.5, 413–424(2007).
- [11] 戸田 浩, 章 忠: 完全シフト不変性を実現する複素数離散ウェーブレット変換; *Journal of Signal Processing* 「信号処理」, Vol.12, No.2, 155–166(2008).
- [12] Y. Meyer: Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algebres d'operateurs; *In Seminaire Bourbaki*, vol.662, Paris (1986).
- [13] I. W. Selesnick, R. G. Baraniuk and N. G. Kingsbury: The Dual-Tree Complex Wavelet Transform; *IEEE Signal Processing Magazine*, 123–151(November 2005).

- [14] 戸田 浩, 章 忠: 完全シフト不変性を実現する複素数ウェーブレット・パケット変換; *Journal of Signal Processing* 「信号処理」, (2010 年 3 月掲載予定).
- [15] I. Daubechies: Ten lectures on wavelets, *SIAM, Philadelphia* (1992).
- [16] 戸田浩, 章 忠, 川畑洋昭: 最新ウェーブレット実践講座 入門と応用; ソフトバンク クリエイティブ (2005).
- [17] E. Hernandez, G. L. Weiss: A First Course on Wavelets, *CRC Press* (1996).