

偏極多様体の分類と構造

—— Δ 種数の理論 ——

東大教養 藤田隆夫

現在、複素数体上定義された偏極多様体について得られている諸結果 (ϕ . [2]~[7], [9]) と、定義体の標数が一般の場合に拡張することとを試みたところ、どんな状況に立ち至っているかを報告する。概括して述べると、①の場合の結果のうち「総論」に相当する部分、及び「各論」の内の $\Delta=0$ に相当する部分はほぼ元のまま、又はごく簡単な修正のもとに拡張できるのであるが、次に来るべき $\Delta=1$ の偏極多様体の分類については、Picard 多様体に対する Lefschetz 型比較定理の十分精密な形がまだ得られていないため、現在では何とも結論し難い部分がある。他にも、小平型消滅定理に関連して、成否の不明な予想が (①の場合は定理) いくつかある。

§1. 総論

① の場合の復習を兼ね、標数一般の場合の結果を定式化する。

定義 1.1. 多様体 V と $\mathcal{O}_V$ の上の ample 直線束 L の対 (V, L) を偏極多様体と呼ぶ。以下で (M, L) と書く時は多様体 M は非特異と仮定されているものと了解されたい(記号の簡単のため)。一般には V は既約かつ被約な scheme。

定義 1.2. (V, L) の Hilbert 多項式を

$$\chi(V, tL) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dim H^p(V, tL)$$

$$= \sum_{j=0}^n \chi_j(V, L) \frac{t^{[j]}}{j!} \quad \text{の形に展開}$$

し、 $\chi_j(V, L)$ ($j=0, 1, \dots, n=\dim V$) を定義する。ただしここで $t^{[j]} = t(t+1)(t+2)\cdots(t+j-1)$, 特に $t^{[0]} = 1$ 。 $\chi_j(V, L)$ がすべて整数値をとることはすぐわかる。以下 $d(V, L) = \chi_n(V, L)$, $g(V, L) = 1 - \chi_{n-1}(V, L)$ とおく。

注意. Riemann-Roch の定理より $d(V, L) = L^n$, また V が非特異なら $2g(V, L) - 2 = (K_V + (n-1)L)L^{n-1}$, ここで K_V は V の canonical bundle. 他方 V が curve の時には $g(V, L) = h^1(V, \mathcal{O}_V)$. つまりこの

$g(V, L)$ は曲線論における種数概念の高次元の
の一つの拡張とみなせる。

定義 1.3. $\Delta(V, L) = n + d(V, L) - \dim H^0(V, L)$
と定義する。これを (V, L) の Δ -種数, 又は古典
幾何の用語にちなみ *total deficiency* と呼ぶ。

定義 1.4. (V, L) を偏極多様体, $D \in |L|$ と
する。この Cartier 因子 D の, V の部分 scheme
としての自然な構造が既約かつ被約であれば,
 D を (V, L) の段 (rung) と呼ぶ。 V の部分多様
体の列 $V = V_n^* \supset V_{n-1} \supset V_{n-2} \supset \cdots \supset V_1$ で, V_{n-1}
は (V_n, L) の段, V_{n-2} は $(V_{n-1}, L_{V_{n-1}})$ の段, $\cdots$,
 V_1 は (V_2, L_{V_2}) の段, となっているようなもの
を, (V, L) のはしご (ladder) と呼ぶ。

はしごが存在すると, (V, L) の構造に関す
る問題が多くの場合低次元に帰着できる。

定理 1.5. (cf. [6] Prop. 2.2) D を (V, L) の段
とし, その定義式を $\delta \in \Gamma(V, L)$ とする。次数
多元環 $G(D, L) = \bigoplus_{t=0}^{\infty} \Gamma(D, tL_D)$ の生成元 $\eta_1, \cdots$
 $\cdots \eta_k$ が $G(V, L) = \bigoplus_{t=0}^{\infty} \Gamma(V, tL)$ の元 $\xi_1, \cdots, \xi_k$
の制限になっていると仮定する。このとき,

4

$G(V, L)$ は $\delta, \xi_1, \dots, \xi_n$ によって生成される。

定理 1.6. (cf. [6] Prop. 2.4) 上の定理の状況のもとで, さうに, $g_1(\eta_1, \dots, \eta_n) = \dots = g_n(\eta) = 0$ が $G(D, L)$ における $\eta_1, \dots, \eta_n$ の基本関係となっているとする。このとき, n 個の $(n+1)$ 変数多項式 $f_1, \dots, f_n$ で, $f_j(0, \gamma_1, \dots, \gamma_n) = g_j(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ for $\forall j$, なるような, しかも $f_1(\delta, \xi_1, \dots, \xi_n) = \dots = f_n(\delta, \xi_1, \dots, \xi_n) = 0$ が $G(V, L)$ における $\delta, \xi_1, \dots, \xi_n$ の基本関係を与えるようなものが存在する。

これらの定理の証明は $\mathbb{C}$ でも p でも同じ。

注意. 上で見たように, $G(V, L) \rightarrow G(D, L)$ なる制限写像が全射であれば (V, L) と $\mathcal{X}$ の段 D の構造とは密接な関連がある。そこでその一次の部分に注目し, $\dim \operatorname{Coker}(P(V, L) \rightarrow P(D, L))$ を考えると, これは古典で deficiency と呼ばれた量である。一方これは $\Delta(V, L) - \Delta(D, L)$ なる差に等しい。これ ~~が~~ total deficiency なる呼称の由来である。なお特に曲面上の曲線の場合については, 上の差は $H^1(V, L) = 0$ ならば $\kappa'(V)$

5

に等しい。これを *irregularity* と呼ぶ由来を一般化して, $\Gamma(V, L) \rightarrow \Gamma(D, L)$ が全射であるような段を *regular* と呼ぶことにする。

次にははしごの存在する条件を探す。

定理 1.7. (cf. [4] Th. 1.9) (V, L) を偏極多様体とすると, $\dim B_s |L| < \Delta(V, L)$ 。ここでは $\dim \emptyset = -1$ と規約しているので, 特に, 任意の (V, L) に対して $\Delta(V, L) \geq 0$ 。

証明はほぼ①のときのものそのままが良いが, 数ヶ所修正を要する。修正のしかたは, [10] Th. 3 の証明を参考として考えればすぐわかる。

定理 1.8. (cf. [6] Cor. 3.6) (V, L) を偏極多様体, $B_s |L|$ は高々有限個, さるにこの $B_s |L|$ 上の各点で V は非特異とする。このとき,

$$d(V, L) \geq 2\Delta(V, L) - 1$$
 なる (V, L) ははしごを持つ。

これは [6] に於けるよりもやや精密な形になっているがこの方が次元に関する帰納法がスムーズに運ぶ。証明法は①の場合と同じで,

ただ、定理 1.7 のとき同様、[11] Ch. IX の
Cor. of Th. 15 や、同. Th. 17 を用いて p で通用する
論法に通ず。[6] §3, Th. 3.1. は、 V' の非特異
性は以下の論議で不要なことに鑑み、 $B_S|L|$ の
定義イテアルを中心とする V の monoidal 変換
を考えることで代用する。

さてここまできれば後は p も $\mathbb{C}$ も同じで

定理 1.9. (cf. [6] Th. 4.1) (V, L) を偏極多様体、
 $B_S|L|$ は高々有限個で、その各点で V は非特
異、さらに $g(V, L) \geq \Delta(V, L)$ とする。この時

a) $d(V, L) \geq 2\Delta(V, L) - 1$ なる (V, L) は正
則 (regular) なほしごとを持つ。

b) $d \geq 2\Delta$ なる $B_S|L| = \emptyset$ 。

c) $d \geq 2\Delta + 1$ なる $G(V, L)$ は $\Gamma(V, L)$ で生成
され、かつ $g(V, L) = \Delta$ 。特に L は very ample。

d) $d \geq 2\Delta + 2$ なる $G(V, L)$ における $\Gamma(V, L)$
の元の間の基本関係式は二次式。 //

注意. 定理 1.8 及び 1.9 に於て L : ample
との仮定を弱めることもできる ([6] 同様)。

§ 2. 各論 への 1

一般に $\Delta(V, L) \geq 0$ であるから，分類理論は $\Delta = 0$ のものから始めるのが自然であるう。
 さて $\Delta = 0$ とすると，定理 1.7 より $B_S |L| = \emptyset$ ，
 えてで定理 1.8 よりはしご $V = V_n \supset V_{n-1} \supset \cdots \supset V_1$
 が存在する。 $g(V, L) = g(V_{n-1}, L) = \cdots = g(V_1, L) =$
 $h^1(V_1) \geq 0$ だから定理 1.9 が適用でき， $g = 0$
 で L は very ample。それから [4] Cor. 1.8 を帰
 納的に用いて $H^p(V, tL) = 0$ for any $p > 0, t \geq -n+1$
 なる消滅定理を得る。これを $\mathbb{C}$ の場合の小平
 消滅定理に代用したの分類定理を得る。

定理 2.1 (cf. [4] §2 & §3) (M, L) を非特異
 偏極多様体， $\Delta(M, L) = 0$ とする。このとき
 (M, L) は次のうちどれか：

- 1) $(M, L) \cong (\mathbb{P}^n, H)$
- 2) $(M, L) \cong (\mathbb{Q}^n, H)$ ， $\mathbb{Q}^n$ は 2 次超曲面。
- 3) $(M, L) \cong (\mathbb{P}^2, 2H)$
- 4) $\mathbb{P}^2$ 上の vector bundle E があって

$(M, L) \cong (P(E), H(E))$ ，但しここで $H(E)$ は
 $\mathcal{O}(1)$ に対応する line bundle。

8

注意. 要するに, $\mathbb{C}$ のときと同じ結果。

注意 2.2. 一般の (V, L) の分類は, $\mathbb{C}$ のときと同様, 非特異な (M, L) の分類に帰着する (cf. [4] §4)

さて $\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^n$ は Δ だけでなく g を使っても特徴づけることができた; 例えば「 $\mathcal{L}(M, L) = 1$, $g(M, L) \leq 0 \implies (M, L) \cong (\mathbb{P}^n, H)$ 」 (cf. [4] Th. 2.1). これを一般化して次の予想を考える:

予想 2.3. 一般の偏極多様体 (V, L) に対して, $g(V, L) \geq 0$ が成立ち, また, $g = 0$ となるのは $\Delta = 0$ の場合に ~~極~~限られる。

この予想は $\mathbb{C}$ でも未解決である。いくつか部分的結果はあるが, そのほとんどは小平消滅定理に極めて大きく依存しており, p での成否はわからない。 $p > 0$ でのほとんど唯一の肯定的結果は

命題 2.4. (V, L) は偏極多様体, V : 正規, $g(V, L) \leq 0$, さらに (V, L) にはしごが存在すると仮定する。されば $\Delta(V, L) = 0$ 。

これは [6] Lemma 5.1. の精密化であるが,

消滅定理を安直に適用できる①の場合とちが
い，相当こみ入った議論を要する。詳細略。

あと①でのみ証明されている（但し筆者の
知る範囲での話）事実を列举しておく。

$$\textcircled{1} \quad d(M, L) \leq 2, \quad g(M, L) \leq 0 \quad \implies \quad \Delta(M, L) = 0.$$

$$\textcircled{2} \quad K_M + (n+1)L = 0 \quad \implies \quad (M, L) \cong (\mathbb{P}^n, H)$$

$$\textcircled{3} \quad K_M + nL = 0 \quad \implies \quad (M, L) \cong (\mathbb{Q}^n, H)$$

$$\textcircled{4} \quad g(M, L) \leq 0, \quad n = \dim M \leq 2 \quad \implies \quad \Delta(M, L) = 0$$

$$\textcircled{5} \quad g(M, L) \leq 0, \quad \Delta(M, L) \leq 2 \quad \implies \quad \Delta(M, L) = 0.$$

いずれも (M, L) は非特異偏極多様体である。

§3. 各論その2

さて次は $\Delta = 1$ の場合であるが，非特異な
 M の場合だけに話を限ることにする。まず最
初に定理1.7より $B_S(L)$ は高々有限個。そこ
で定理1.8よりはしごが存在する。よって命
題2.4より $g \geq 1$ 。故に定理1.9が適用でき
る。その結論で以後使うものを再録すると

① (M, L) は正則なはしごをもつ。

② $d \geq 2$ なら $B_S(L) = \emptyset$ 。

③ $d \geq 3$ なら $g = 1$ ，かつ L は very ample。

12

さて, $d \geq 3$ なる [4] Cor. 1.8 を用いて帰納的に $H^p(M, tL) = 0$ for $p > 0, t \geq 0, n = \dim M \geq 2$ が示せる。これを小平型消滅定理に代用して, ①の場合と同様に次を得る。

命題 3.4. $\Delta(M, L) = 1, d(M, L) \geq 3$ なるば,
 $K_M + (n-1)L = 0$ (linearly eq.).

予想 3.5. $\Delta(M, L) = g(M, L) = 1 \iff K_M + (n-1)L = 0$.
 この主張は, $\mathbb{C}$ に於ては成立つ (cf. [7] Tr. 1.9
 又は [9] 定理 3.18). $p > 0$ では $\Leftarrow$ が特に難しい。

さて $\mathbb{C}$ の場合の結果を思い出す。

定理 3.6. (M, L) を $\mathbb{C}$ 上の n 次元非特異偏極多様体とする。このとき $d = d(M, L)$ の値に応じて (M, L) は次の構造をもつ。 ($n \geq 2$ とする)

- ① $d = 1$: $g = g(M, L) = 1, 2$ の場合を除きよくわからない。詳細は略。
- ② $d = 2$: $|L|$ の定める有理子像により M は $\mathbb{P}^n$ の二重分岐 ~~被覆~~ 被覆となり, その branch locus は $\mathbb{P}^n$ の非特異超平面。次数は g で計算できる。hyperelliptic curve の高次元版。
- ③ $d = 3$: 非特異 3 次超曲面。

- ④ $d=4$: $(2,2)$ 型完全交又多様体.
- ⑤ $d=5$: Plücker 座標により埋めこまれたグラスマン多様体 $Gr(5,2)$ (5次元ベクトル空間の2次元部分空間の全体, 従って多様体としては6次元で, $\mathbb{P}^9$ に埋込まれている), 又は $\times$ の linear section ($\mathbb{P}^9$ の線型部分空間との transversal な共通部分), 又はある種の4次元多様体 (4次元の2次超曲面をある定まった仕方で2度 blow up し, さらに2度 blow down して構成するのだが, 詳細は略す). $n \geq 7$ とはなり得ない.
- ⑥ $d=6$: $\mathbb{P}^2$ の, 非共線三点の blow up, 又は $M \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, 又は $\mathbb{P}(T_{\mathbb{P}^2})$. ($T_{\mathbb{P}^2}$ は $\mathbb{P}^2$ の tangent bundle), 又は $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. 特に $n \leq 4$.
- ⑦ $d=7$: $\mathbb{P}^2$ の2点 blow up, 又は $\mathbb{P}^3$ の1点 blow up. (注: 後者の場合 $L = 2H - E_P$).
- ⑧ $d=8$: $\mathbb{P}^2$ の1点 blow up, 又は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, 又は $\mathbb{P}^3$ (このとき $L = 2H$). 特に $n \leq 3$.
- ⑨ $d=9$: $(\mathbb{P}^2, 3H)$.
- ⑩ $d \geq 10$: $n \geq 2$ では存在しない.

に

なお, $K_M + (n-1)L = 0$ で L は一意に決まるので, 上では M の構造についてのみ述べた。

さてこれの正標数の場合への拡張を試みよう。まず③, ④ は L が very ample であることなどより容易に証明できる。また, $p \neq 2$ ならば, ②を拡張することもむづかしくない。 $d \geq 5$ の場合は, 一般に d が小さくなるほど問題はむづかしくなる。まず $n=2$ の場合から始める。命題 3.4 より $K_M = -L$, また $H^1(M) = 0$ もあるから, M は rational。そこで分類理論を思い出せば, ①と同様の結果を得る。従って特に⑩も成立つ。

ここから 3次元の結果に移る際に困難がある。最もやさしい⑨を例にとって説明する。さて①でこのギャップを乗り越えることができたのは次の事実に基く。

命題 3.7. M は 3次元非特異複素多様体, D は M の上の非特異な ample divisor とする。このとき $\text{Coker} (P_{ic}(M) \rightarrow P_{ic}(D))$ は torsion free である。

13

これは $H_2(D; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(M; \mathbb{Z})$ が全射であることから容易に導かれる。

さてこれを用いて④は次のようにして証明される。3次元以上で $\Delta=1$, $d=9$ となる (M, L) の存在しないことを言えばよい。さてそのような (M, L) が存在したとする。 $|L|$ は very ample だから, その一般のメンバー D は非特異, として $d(D, L) = d(M, L)$, $l = g(M, L) = g(D, L)$ 。また, $\Delta(D, L) \leq \Delta(M, L)$ だが, $\Delta(M, L) = 1$ だから, $\Delta(D, L) \neq 1$ とすると $\Delta(D, L) = 0$, 従って $g(D, L) = 0$ で矛盾。よって $\Delta(D, L) = 1$ 。そこで, この手続きをくり返すことにより, $\dim M = 3$ の場合を考えれば十分なことがわかる。さてこのときは $\dim D = 2$ だから, 2次元での分類理論より $(D, L) \cong (\mathbb{P}^2, 3H)$ 。ここで命題 3.7 により $\exists F \in \text{Pic}(M)$, s.t. $F_D = H$ がわかる。すると, $\text{Pic}(M) \rightarrow \text{Pic}(D)$ は単射だから, $L = 3F$ が $\text{Pic}(M)$ で成立つ。よって $9 = d(M, L) = L^3 = (3F)^3 = 27 F^3$, これは F^3 が整数であることに矛盾。

14

注意。上の論法を用いて次の主張が示せる
 「 D が多様体 M 上の ample 因子で $D \cong \mathbb{P}^{n-1}$,
 $n \geq 3$ なら $M \cong \mathbb{P}^n$, $[D] = H$ 」。実際, $L = [D]$
 $\in \text{Pic}(M)$ とおき, $L_D = \mathcal{O}H'$, 但し H' は $\mathbb{P}^{n-1}$
 の hyperplane の定める直線束, とおけば, $\mathcal{O} = 1$
 が先の論法で出る。よって (M, L) ははしごを
 持ち, $g(M, L) = g(D, H') = 0$ 。命題 2.4 より
 $\Delta(M, L) = 0$ 。一方 $d(M, L) = d(D, H') = 1$ だから分類
 定理 2.1 より $(M, L) \cong (\mathbb{P}^n, H)$ 。Q.E.D.。とこ
 りで, これを見ればわかるように, $\mathbb{C}$ の特殊
 性はただ Lefschetz 型の定理のみに関係してい
 る。さて他方, シンボジウムの際に丹後先生
 に教えていただいたところによれば, 上の主
 張は, 標数 $= n = 3$ という成否不明の場合を
 除き, 一般標数で成立つようである。ただし
 証明法は全然異なる由。こうした事実は多分
 「予想: D を M 上の豊富因子とするとき, 制
 限写像 $\text{Pic}(M) \rightarrow \text{Pic}(D)$ は $\dim M \geq 4$ なら同型,
 $\dim M = 3$ なら単射でしかもその Coker は $\bullet$ ℓ
 torsion を持たない。」 (P. 175)

15

を暗示している のであらう。証明のアイデア
などない無責任な想像であるからどうせついで、
もっと一般化しておこう；

「想像： D を M 上の豊富因子， $CH^i(\quad)$ を余次元 i の代数的サイクルの有理同値類のなす群とする。このとき $CH^i(M) \rightarrow CH^i(D)$ は，
 $2i \leq \dim M - 2$ なる同型， $2i = \dim M - 1$ なる単射かつ余核は ℓ -torsion free」

とは書いてみたが p -torsion が本当にあるのかどうかわからない。また，仮定の方も D を単に “ample” としたのではだめで，小平型消滅定理でそうだったように，何らかの意味で “十分 ample” としなればならないかもしれない。 $\Delta=1$ の偏極多様体の分類に役立てようという筆者の下心から言うと，せめて “very ample” くらいで成立，てほしいところであるが……。

再び $\Delta=1$ の偏極多様体の分類定理 3.6 にもどる。⑤, ⑥, ⑦, ⑧ の諸結果の拡張に関して，第一の障害は二次元から三次元へのギャップ。

16

ッ プであり, $\text{Pic}(M) \rightarrow \text{Pic}(D)$ の有様が問題となる。ここで D は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 又は $\mathbb{P}^2$ の何点かの blow up (点の個数 $= 9-d$) であり, $\text{Pic}(D)$ の構造は交叉型式をこめてすっかりわかっていることに注意しよう。さて, $\text{Pic}(D)$ の自己同型の内で, 交叉型式を保ち, かつ $C_1(D)$ を動かさないようなもののなす群を $W(D)$ としよう。C での分類理論ができたのは次が成したからである (cf. [7], §4):

命題 3.8. 上の状^況~~態~~のもとで, $W(D)$ のある部分群 G が定まり, $\text{Pic}(M) \rightarrow \text{Pic}(D)$ の像はこの G による不動点の全体と一致する。

この G というのは実は $|L|$ のメンバー達のなす代数族から定まるモノドロミー群であり, 上の命題は [1] Td. 4-1-1 の簡単な応用として得られる。

さてこの命題を用いて ⑧ は次のように証明される。 $|L|$ の一般のメンバー D をとれば, $D \cong \mathbb{P}_\alpha^1 \times \mathbb{P}_\beta^1$ 又は $\mathbb{P}_\gamma^2$ の一点 blow up. 前者の場合 $L_D = C_1(D) = 2H_\alpha + 2H_\beta$. そこで命題 3.7 より

17

$F = H_\alpha + H_\beta$ も $Pic(M)$ からくる。そして $L = 2F$ は $Pic(M)$ でも成立つ。よって F は ample, また $K_M = -2L = -4F$ 。故に $(M, F) \cong (\mathbb{P}^3, H)$ 。後者の場合は矛盾が出る。実際, $D \cong \mathbb{Q}_q(\mathbb{P}_r^2)$ の例外曲線 E_q を考えると, これは $W(D)$ で動かない。よって命題 3.8 より直線束としては $F \in Pic(M)$ の制限になつてゐるとしてよい。詳細は略すが消滅定理をうまく使って $|F| \neq \emptyset$ が言える。そこで $E \in |F|$ をとる。 $E \cap D = E_q$ であり, E_q は偏極多様体 (E, L_E) の段である。 E は正規だから, 命題 2.4 が適用できて $(E, L) \cong (\mathbb{P}^2, H)$ 。 $F \cdot L\{E\} = F \cdot \{E_q\} = -1$ だから $[E] = -H$, これより因子 E は非特異点に *blow down* できる。そこで $M = \mathbb{Q}_p(M^b)$, $E = \mathbb{Q}_p(F)$ とする。 $L^b = L + E$ が $Pic(M^b)$ から来ることは容易にわかる。また中井判別法 [12] により L^b は M^b 上では ample。 $K_{M^b} = -2L^b$ なので $\Delta(M^b, L^b) = 1$ (cf. 予想 3.5)。一方 $d(M^b, L^b) = 9$ 。これは ⑨ に矛盾する。

こうして $d=8$, 3次元なる $(\mathbb{P}^3, 2H)$ になる

れけであるが，丹後先生の結果（又はLefschetzの定理）を用いれば4次元以上で $d=8$ とはなり得ないことがすぐわかる。

⑥ ⑦ でも状況は似たようなものである。命題3.8 が成立てば，①での論法を $p>0$ に移し変えることはさう困難ではない（はず）。しかし⑤に関してはなかなかさうもいかず，3次元に上がってからの先にもなお障害がある（主に消滅定理が関係する：Bertini 型定理も難題）模様であるが，あまりに技術的なことになるし筆者にもよくわからないのでここでは一切省略する。

というわけで，命題3.7 及びその精密化した命題3.8 の正標数版を見出すことが $p>0$ の偏極多様体の分類理論における現下の最大課題となっているわけである。何か御存じの方は御一報下されば大層有難いところなのですが。

11

文献

- [1] Deligne ; Théorie de Hodge , Publ.Math. IHES 40 (1972)
- [2] Fujita ; On the structure of certain types of polarized varieties I & II , Proc. Japan Acad. 49 (1973) & 50 (1974)
- [3] " ; 偏極多様体の Δ 種数について (東京大学論'74)
- [4] " ; On the structure of pol. var. with $\Delta=0$, J. of Fac. Sci. Univ. of Tokyo , 22 (1975)
- [5] " ; 偏極多様体の構造と分類 , 数学 (1975) 秋季号
- [6] " ; Defining Equations for certain types of pol. var. Complex Analysis & Algebraic Geometry, 1977. Iwanami
- [7] " ; On the str. of pol. manif. of $\Delta=1$ (preprint)
- [8] " ; On Lefschetz principle (in preparation)
- [9] Itaka ; 可換環論 , 岩波
- [10] Matsusaka & Mumford ; Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties, Amer. J. Math. 86 (1964) 165-184
- [11] Weil ; Foundations of algebraic geometry, revised ed , Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. No. 24 (1960)
- [12] Nakai ; A criterion of an ample sheaf on a projective scheme , Amer. J. Math. 85 (1963) 14-26