

多値論理について

東大・理・数

細井 勉

“多値論理”というとき、一般には、Łukasiewicz の多値論理を指すものと受取られがちである。しかし、Łukasiewicz の多値論理は、Rosser と Turquette の仕事によって、基礎論的には、一段落しており、興味もうすれているようである。また、記号論理を研究する手段としては、Łukasiewicz の多値論理は、たいてい有用なモデルを与えてはいない、という欠点も考えられる。記号“論理”の研究対象とはいささか異種のものであることが、その理由でもあろうか。

そこで、基礎論（特に数理論理学）においてよく利用されている多値論理と、そこのいくつかの結果について、簡単に紹介したい。この種の多値論理は、Łukasiewicz の多値論理が二値論理の一種の拡張であるように、やはり、二値論理の一種の拡張であるが、Łukasiewicz のものとは別

の方向へ拡張がなされたものである。

多値論理は、あくまでも、論理であるので、まず、“論理”の定義からはいじめねばならない。

1. 論理

論理を定義する方法はいろいろとあろう。

また、論理とは何か、と見る、見方もいろいろあろう。
Łukasiewicz 系統(?)では、基本的な論理とは二値論理であり、その中の論理演算を本質と見て、論理を考えているようである。工学的応用などでは、このことは有効なのであろう。これとは別に、論理とは、*valid (provable) formula* の集合としてみて、代数的な意味の論理演算には重きをおかない見方もある。ここでは、後者の立場で、議論を展開したい。

範囲を、命題論理に限定しておくことにする。論理記号としては、 $\rightarrow$ (if ..., then ...), $\&$ (and), $\vee$ (or), $\neg$ (not) の四つを考える。命題変数としては、アルファベットの小文字を用いる。普通のようにして、wff (well-formed formula) を定義する。wff を表わすのに、アルファベットの太文字を用いる。wff 全体の集合

を $\mathcal{W}$ とする.

基礎論では, たいていの場合, “論理” を次のように定義する.

定義 1.1 $\mathcal{W}$ の集合で, *modus ponens* と代入法則に関して閉じたものを, “論理” とする. “論理” が公理系 (or モデル) で定義されている場合, その “論理” に属す $\mathcal{W}$ は, *provable* (or *valid*) であると言われる. “論理” 全体を $\mathcal{L}$ で表わす.

例 1.2. 次の $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_{IK}, \mathcal{L}_J$ は論理である.

$$\mathcal{L}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{W}$$

$$\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{A \rightarrow A \mid A \in \mathcal{W}\}$$

$$\mathcal{L}_{IK} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{二値論理で valid な } \mathcal{W}\}$$

$$\mathcal{L}_J \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{直観主義論理で provable な } \mathcal{W}\}$$

定義により, 論理とは, $\mathcal{W}$ の集合なので, 論理と論理の間に, 集合の意味での包含関係 $\supset, \supseteq$, 等が定義される. 二つの論理が集合として一致することを, 記号 $\supseteq$ で表わすことにする.

また, 集合演算 $\cup$ と $\cap$ を考えたい.

“modus ponens に関して閉じている” という条件から,
 $\cup$ の定義に工夫が必要となる.

定義 1.3. $\Lambda \neq \emptyset, \lambda \in \Lambda, \mathbb{L}_\lambda \in \mathcal{L}$ に対し,

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{L}_\lambda \stackrel{\text{def.}}{=} \{A \mid A \in \mathbb{L}_\lambda \text{ for all } \lambda \in \Lambda\}$$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{L}_\lambda \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcap \{ \mathbb{L} \in \mathcal{L} \mid \mathbb{L} \supset \mathbb{L}_\lambda \text{ for all } \lambda \in \Lambda \}$$

により, $\cup$ と $\cap$ を定義する.

系 1.4. $\mathcal{L}$ は $\supset$ を順序関係とし, $\cup$ と $\cap$ に関して,
 complete lattice である.

基礎論では, $\mathbb{L} \vee \mathbb{K} \supset \mathbb{L} \supset \mathbb{L} \wedge \mathbb{K}$ であるような論理
 $\mathbb{L}$ (中間論理という) を取扱うことが多い.

定義 1.5. $\mathcal{J} = \{ \mathbb{L} \mid \mathbb{L} \vee \mathbb{K} \supset \mathbb{L} \supset \mathbb{L} \wedge \mathbb{K} \}$

定理 1.6. $\mathcal{J}$ は complete lattice であり, 関係

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{L}_\lambda \right) \cap \mathbb{L} \supset \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{L}_\lambda \cap \mathbb{L})$$

は, $\supset$ で特長的である.

問題 1.7. $\mathcal{L}$, $\mathcal{I}$ の濃度は?

2. モデル

モデルにより論理を定義する方法も、いくつかあるがここでは、Łukasiewicz と類似の方法を用いることにする。(他にも、Kripke の方法等は有名である。)

モデル M の定義法はよく知られている通りである。しかし、念のため、はっきりさせておこう。

まず、truth value の集合 V_M , designated value の集合 D_M として V_M の一つの部分集合, $V_M \times V_M$ から V_M への三つの関数 $\rightarrow_M, \&_M, \vee_M, V_M$ から V_M への関数 $\neg_M$ を用意する。 f を, $\{\text{命題変数}\}$ から V_M への関数 (assignment function) とする。 wff A に対し, $f(A)$ の値とは, A の中の命題変数に対し f で定まる V_M の元を代入し, $\rightarrow, \&, \vee, \neg$ をそれぞれ $\rightarrow_M, \&_M, \vee_M, \neg_M$ で置きかえたとき, その結果として定まる V_M の元 α にとする。

定義 2.1. $M = (V_M, D_M, \rightarrow_M, \&_M, \vee_M, \neg_M)$ が論理 $\mathcal{L}$ のモデルであるということを,

$$\mathcal{L} \subset \{A \mid A \in \mathcal{W}, f(A) \in D_M, \text{ for all } f\}$$

により定義する。特に、論理 $\mathbb{L}$ というかわりに、略して、
(多値) 論理 M とも言う。 M は (V_M, D_M) とか (V, D)
とか、略記されることもある。

ある論理 $\mathbb{L}$ を定義するモデル (その存在は、すぐ
後で述べる) は *unique* ではない。

定理 2.2. $\forall \mathbb{L} \in \mathcal{L}$ に対し、 $M \subset \mathbb{L}$ となるモデル M で、
 $\#V$ が可付番であるものが存在する。

(証明) $V_M = W$, $D_M = \mathbb{L}$ ととれば明きらか。この場合、
 $\#D_M$ も可付番である ($\# \mathbb{L}$ は必ず可付番)。

この定理により、論理を問題とするかぎり、たか
だか、可付番モデルを考えれば十分、であることがわかる。

定理 2.3. $\mathbb{L} \in \mathcal{J}$ のモデル M において、 $u, v \in V_M$ に
対し、 $u \geq v \iff u \xrightarrow{M} v \in D_M$

と定義すると、 $\geq$ は V_M に対する pseudo-order となる。

特に、 $\#D_M = 1$ のときは、order となる。

(証明略)

定義 2.4. モデル M が次の 4 条件を満足するとき,
 k -regular であるという.

- (1) $\# D_M = k \quad (1 \leq k \leq \infty)$
- (2) $D_M \ni u, u \xrightarrow{M} v \Rightarrow D_M \ni v$
- (3) $D_M \ni v \Rightarrow D_M \ni u \xrightarrow{M} v$ for all $u \in V_M$
- (4) $M \in \mathcal{L}$

(条件 (3) は次の (3') から得られるものである.)

- (3') $D_M \ni v \Rightarrow \exists$ assignment function $f, \exists A \in M, \text{ s.t. } f(A) = v$

定理 2.5. k -regular モデル M ($k > 1$) に対し,
 $M \subset N$ であるような 1-regular モデル N が存在する.

(証明) V_M 中の equivalence relation $\sim$ を

$$u \sim v \Leftrightarrow D_M \ni u \xrightarrow{M} v, v \xrightarrow{M} u$$

により定義し, $N = (V_M / \sim, D_M / \sim)$ とすればよい.

$\xrightarrow{N}$ 等は, 代表元に対する $\xrightarrow{M}$ 等により定めればよい.

$\mathcal{L}$ の元である論理を考えると, 1-regular モデル
 が本質的であることがわかる.

一般にはある元 M においては, $\# D_M = 1$ に reduce
 できるとはかぎらない. たとえば, $\mathcal{L}_1$ はその反例となる.

定義 2.4 は, $\#D_M = 1$ に reduce できるための十分条件を述べたものであって, ぎりぎりのところを述べたものではない。しかし, その中の条件 (4) は少ししかゆるめられないであろう。

定理 2.6. $\#V_M < \infty$ であるような 1-regular モデルで定義される論理は, 有限的に公理化できる (手続きがある) (証明略)

問題 2.7. $\#V_M = \infty$ の場合, あるいはある元での場合ではどうか?

1-regular モデル M では, 2.3 の $\geq$ を V_M の順序とすると, V_M は $\&_M, \vee_M$ を $\cap, \cup$ とした lattice であることがわかる。こまかい説明や定義は略すが, 次の定理は有名。

定理 2.8. 1-regular モデル $\iff$ 最大元をもつ relatively pseudo-complemented lattice.

問題 2.9. 一般の論理のモデル M では, V_M の lattice 構造は

次に, Łukasiewicz の多値論理に準じた論理を定義する.

定義 2.10. $\mathcal{S}_n = (\{1, 2, \dots, n, \omega\}, \{1\})$ ($1 \leq n \leq \omega$)

$$u \xrightarrow{\mathcal{S}_n} v = \begin{cases} 1 & \text{if } u \geq v \\ v & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$u \&_{\mathcal{S}_n} v = \max\{u, v\}$$

$$u \vee_{\mathcal{S}_n} v = \min\{u, v\}$$

$$\overline{\mathcal{S}_n} u = \begin{cases} \omega & \text{if } u \neq \omega \\ 1 & \text{if } u = \omega \end{cases}$$

そこで, $\omega > i$ ($1 \leq i \leq n$) とする.

定理 2.11. (1) $\mathcal{S}_n \in \mathcal{I}$

$$(2) \mathcal{L} \mathcal{K} \supset \subset \mathcal{S}_1 \supsetneq \mathcal{S}_2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathcal{S}_n \supsetneq \dots \supsetneq \mathcal{S}_\omega \supsetneq \mathcal{L} \mathcal{J}$$

(3) $\mathcal{S}_i$ と $\mathcal{S}_{i+1}$ の間の論理は存在しない ($i = 1, 2, \dots$)

(証明略)

定理 2.12. $\mathcal{I}$ において

(1) $\neg$ はどんな論理においても定義不能.

(2) $\rightarrow$ と $\&$ は $\mathcal{S}_1$ においてのみ定義可能.

(3) $\vee$ は $\mathcal{S}_n$ ($1 \leq n \leq \omega$) においてのみ定義可能.

(証明略)

3. operation

定義 3.1. モデル M_λ ($\lambda \in \Lambda$) に対し, その直積を,

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} V_{M_\lambda}, \prod_{\lambda \in \Lambda} D_{M_\lambda} \right)$$

($\prod$ は直積を表わす) とし, 論理演算を,

$$\prod u_{M_\lambda} \longrightarrow \prod v_{M_\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \prod (u_{M_\lambda} \longrightarrow v_{M_\lambda})$$

のようにして定義する. これはモデルである.

定理 3.2. $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$

問題 3.3. モデル M_λ ($\lambda \in \Lambda$) に対し, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ のモデルを得るためには, どのような, モデル上の演算を定義すればよいか?

定義 3.4. $\mathcal{L} + A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ とは, 論理 (モデルでもかまわない) $\mathcal{L}$ に, $A_1, A_2, \dots, A_n$ を公理として追加して得られる論理.

定理 3.5. $\mathbb{L} \in \mathcal{I}$ とし, A, B は共通な命題変数をもたないとする.

$$(1) (\mathbb{L} + A) \cup (\mathbb{L} + B) \subset \mathbb{L} + A + B \subset \mathbb{L} + A \& B$$

$$(2) (\mathbb{L} + A) \cap (\mathbb{L} + B) \subset \mathbb{L} + A \vee B$$

$\mathcal{I}$ の元の 1-regular モデル M_1, M_2 に対し, $N = M_1 \uparrow M_2$ として次のようなモデルを考えることがある. すなわち, lattice V_{M_1} の上に V_{M_2} をのせて (ie. V_{M_2} の元は V_{M_1} の元より大きいとする) V_{M_1} の最大元と V_{M_2} の最小元を同一視して得られる lattice を, 定理 2.8 によるモデルと見て, それを N とする.

問題 3.6. $\mathcal{S}_1$ に operation を施して $\mathcal{I}$ の元をすべて得るためには, どのような operation を用意すればよいか. (直積と $\uparrow$ だけでは足りない).

4. 分類

$\mathcal{I}$ の元の分類を考える.

定義 4.1 $\mathcal{S}_n = \{ \mathbb{L} \in \mathcal{I} \mid \mathbb{L} \cup \mathcal{S}_\omega \subset \mathcal{S}_n \} \quad (1 \leq n \leq \omega)$

定理 4.2. $\mathcal{J} = \sum_{n=1}^{\omega} \mathcal{S}_n$ (直和)

定義 4.3. $Z = ((a \rightarrow b) \rightarrow c) \rightarrow (((b \rightarrow a) \rightarrow c) \rightarrow c)$

$$K = ((a_1 \rightarrow a_0) \rightarrow a_1) \rightarrow a_1$$

$$X_n = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} ((a_i \rightarrow a_j) \& (a_j \rightarrow a_i))$$

$$R_n = a_1 \vee (a_1 \rightarrow a_2) \vee (a_2 \rightarrow a_3) \vee \dots \vee (a_{n-1} \rightarrow a_n) \vee a_n$$

$$\begin{cases} P_1 = K \\ P_{i+1} = ((a_{i+1} \rightarrow P_i) \rightarrow a_{i+1}) \rightarrow a_{i+1} \quad (i \geq 1) \end{cases}$$

$$\mathbb{L} P_n = \mathbb{L} \mathcal{J} + P_n$$

定理 4.4. (1) $\mathcal{S}_n \supset \subset \mathbb{L} \mathcal{J} + R_n \supset \subset \mathbb{L} \mathcal{J} + P_n + Z \quad (n < \omega)$

(2) $\mathcal{S}_\omega \supset \subset \mathbb{L} \mathcal{J} + Z$

定理 4.5. $\mathcal{S}_n$ と $\mathbb{L} P_n$ は $\mathcal{S}_n$ の最大元と最小元.

定義 4.6. $r(\mathbb{L}) = \min \{i \mid X_i \in \mathbb{L}\}$

定理 4.7. (1) $\mathbb{L} \in \mathcal{S}_n \Rightarrow r(\mathbb{L}) \geq n+1$

(2) $r(\mathbb{L}) = \omega \Rightarrow \mathbb{L}$ は有限モデルを持たない.

(3) $\mathcal{S}_\omega$ の元は有限モデルを持たない.

(4) $\mathbb{L}\mathcal{J} + A \in \mathcal{S}_n (n < \omega) \Rightarrow A$ は少なくとも n 個の命題変数をもつ.

問題 4.8. (1) $\mathbb{L}IP_n$ のモデルは?

(2) $\mathcal{S}_n \ni \mathbb{L}$ のとき, $\mathbb{L} \subset \mathbb{L}\mathcal{J} + A$ となるような n 変数の wff A を定め得るか.

(3) $\gamma(\mathbb{L}) = n$ のとき, $\mathbb{L}$ に対し $\#V = n$ のモデルを与え得るか. Yes という説もあるが, 多分 no?

(4) 1-regular モデルでは, かならず, 最小元のすぐ上の元が一つしかないような, 同値なモデルを見つけ得るか. Yes という説もあるが, 多分 no?

(5) $\mathcal{S} \ni \mathbb{L}$ に対し, $\mathbb{L}$ が finite model を持たないことの有限的な判定法は?

(6) モデルが separable axiomatization (定義略) をもつための条件は?

(7) $M \uparrow N$ の公理化は?