

Hypo-Dirichlet algebra の interpolation について

茨城大 理 荷 見 守 助

§ 1. 問題の説明

Disk algebra A_0 と開円板 $\{ |z| < 1 \}$ 内の相異なる点の列 $\{ z_k \}$ について, 次の二つの命題が同値な事が知られてゐる:
(a) 閉円板 $\{ |z| \leq 1 \}$ 上の任意の連続函数 g に対し $f(z_k) = g(z_k)$, $k = 1, 2, \dots$, なる $f \in A_0$ が存在する. (b) 任意の有界数列 $\{ c_k \}$ に対し $h(z_k) = c_k$, $k = 1, 2, \dots$, なる $h \in H^\infty$ が存在し, 且つ $\{ z_k \}$ の単位円 $\{ |z| = 1 \}$ 上の集積点の集合は Lebesgue 測度が 0 である [10, p. 208]. この事柄の拡張については, 先に和田氏 [14] 等により論じられたが, 更にこゝで考へて見たい.

X を compact Hausdorff 空間, A を X 上の function algebra 即ち $C(X)$ の uniformly closed subalgebra で定数函数をすべて含み, X の点を分離し且つ sup norm を持つものとする. A の極大 ideal 空間を $M(A)$, A の Gelfand 表現を $A \rightarrow \hat{A}$ と書く. 今 X は A の Šilov 境界に等しいものとし, $M(A) \setminus X$ とまじ

はる Gleason part 全体のなす集合を $\mathcal{P}$ と書く. $\mathcal{P}$ は空集合ではないと仮定し, 各 $P \in \mathcal{P}$ に X 上の正の Radon 測度 $\mu(P)$ を一つ宛対応させ, 次のやうに L^1 , L^∞ を定義する:

$$L^1 = \{(f_P) \in \prod (L^1(\mu(P)) : P \in \mathcal{P}) : \| (f_P) \|_1 = \sum_{P \in \mathcal{P}} \| f_P \|_{1,P} < +\infty\},$$

$$L^\infty = \{(f_P) \in \prod (L^\infty(\mu(P)) : P \in \mathcal{P}) : \| (f_P) \|_\infty = \sup_{P \in \mathcal{P}} \| f_P \|_{\infty,P} < +\infty\}.$$

但し, $\|\cdot\|_{1,P}$, $\|\cdot\|_{\infty,P}$ は夫々 $L^1(\mu(P))$, $L^\infty(\mu(P))$ の普通の norm である. L^1 と L^∞ は上の norm について Banach 空間をなし, L^∞ を L^1 の双対と看做することが出来る. $u \in C(X)$ に (u_P) , $u_P = u$, を対応させれば, 準同型 $C(X) \rightarrow L^\infty$ を得るが, この写像による A の像の汎弱閉包を H^∞ と書く.

更に進むために次の仮定をおく.

- (1) $P \in \mathcal{P}$ 内の任意の点 p の表現測度 μ_p はいづれも $\mu(P)$ に対し絶対連続である.

この時は, 任意の $p \in P \in \mathcal{P}$ に対して

$$(2) \quad h \longrightarrow \int_X h_p(x) d\mu_p(x) \quad h = (h_P) \in H^\infty$$

は H^∞ 上の乗法的線型汎函数であつて p のみで決定され, 従つて $M(A) \setminus X$ から $M(H^\infty)$ への injection i が得られる. さて, 上の (a), (b) に対応して次の二性質を考へる.

$$(A) \quad \hat{A}|_F = C(F);$$

$$(B) \quad A|(F \cap X) = C(F \cap X) \text{ 且つ } (H^\infty)^*|_{i(F \setminus X)} = C^b(i(F \setminus X)).$$

但し, F は $M(A)$ の閉集合を, $C^b(i(F \setminus X))$ は $i(F \setminus X)$ の上の有界

連続関数全体の集合を表はす。我々の目的は、どんな条件下で (A), (B) の一方から他方が導けるかを調べる事である。今迄には, disk algebra の場合 [10], 唯一個の元から生成される場合 [14], logmodular algebra の場合 [7] が調べられてゐる。本稿の内容はほぼ [9] と同じである。

§ 2. 定理

以下では假定 (1) が満足されるとし, F を $M(A)$ の閉部分集合とする。

定理 1. $F \setminus X$ 上で injection λ が連続ならば (特に $F \setminus X$ が discrete ならば), $(A) \Rightarrow (B)$.

次に, A に含まれる函数の実部のなす空間を $\operatorname{Re} A$, A の可逆な元の全体を A^{-1} と書き, 更に $\log |A^{-1}| = \{\log |f| : f \in A^{-1}\}$ とおく. A が X 上で hypo-Dirichlet であるとは,

- (i) $\log |A^{-1}|$ の real linear span は $C_{\mathbb{R}}(X)$ で uniformly dense;
- (ii) $\operatorname{Re} A$ の uniform closure の $C_{\mathbb{R}}(X)$ での codimension は有限

の二条件が満足される事を云ふ。

定理 2. A が X 上で hypo-Dirichlet とする. もし F と交はる $\mathcal{P}$ の part が高々可算個ならば (特に $F \setminus X$ が可算集合ならば) $(B) \Rightarrow (A)$. (註 1)

前定理の条件を多少緩めることは出来る.

定理 3. A は次の条件を満足すると假定する.

(i') 有限個の $Z_1, \dots, Z_s \in A^{-1}$ を適當に取れば,

$$\log |f| + \sum_{j=1}^s a_j \log |Z_j|, \quad f \in A^{-1}, \quad a_j \in \mathbb{R}$$

の形の函数は $C_{\mathbb{R}}(X)$ で uniformly dense;

(ii') 任意の $p \in M(A)$ に対し, p のすべての表現測度の集合

M_p は有限次元.

この時, もし F と交はる ρ の part が高々可算個ならば (特に $F \setminus X$ が可算集合ならば), $(B) \implies (A)$.

§ 3. 証明についての注意

定理 1 は A が logmodular であるという条件の下で [7] で証明されたが, この条件は本質的ではなく, 假定 (1) のみで充分である事が容易に分る. 従て証明は省略する.

次に, $(B) \implies (A)$ についても矢張 A が logmodular であるとして [7] で証明された. ここでは次の事実が用いられた: (α) function algebra の interpolation 集合の特徴付けに関する Glicksberg [4] の定理; (β) logmodular algebra に直交する測度の Glicksberg-Wermer 型の分解定理 [6]; (γ) logmodular algebra の場合, $p \longrightarrow \mu_p$ が汎弱連続なること; (δ) logmodular algebra の場合, X の閉部分集合 F が $A|_F = C(F)$ を満足する

ならば, 任意の $p \in M(A) \setminus X$ に対して $\mu_p|F = 0$ なること; (e) logmodular algebra の自明でない Gleason part は analytic disk であること [11]. 従て, これらの事実が更に拡張出来るかを調べることは自然であらう.

(x) は既に十分に一般性のある結果である. (p) は Glicksberg [5] により一般の場合へ拡張されたが, これは後で述べる.

(y) については次の事が分る.

補題 1. $\log|A^{-1}|$ の real linear span は $C_R(X)$ で uniformly dense であると假定する. この時は, 任意の $p \in M(A)$ に対し, その Arens-Singer 表現測度が一意的に定まるから, それを ν_p と書くなうば, $p \rightarrow \nu_p$ は $M(A)$ より $M(X)$ への汎弱連続函数である.

証明. $\{p_\alpha\}$ を $M(A)$ の中の net で或 $p \in M(A)$ に収斂するものとし, ν_α 及び ν を夫々 p_α 及び p の Arens-Singer 測度とする. 假定により, 任意の $g \in C_R(X)$ と $\varepsilon > 0$ に対し, X 上で $|g(x) - k^{-1} \log|f(x)|| < \varepsilon$ を満足するやうな $f \in A^{-1}$ と正整数 k が存在する. 従て,

$$\begin{aligned} \left| \int_X g(d\nu_\alpha - d\nu) \right| &\leq \left| \int_X (g - k^{-1} \log|f|)(d\nu_\alpha - d\nu) \right| + \left| \int_X k^{-1} \log|f|(d\nu_\alpha - d\nu) \right| \\ &\leq 2\varepsilon + k^{-1} |\log|\hat{f}(p_\alpha)| - \log|\hat{f}(p)||. \end{aligned}$$

こゝで, $k \geq 1$, $\hat{f}(p_\alpha) \rightarrow \hat{f}(p)$ 且つ $\hat{f}(p) \neq 0$ であるから最終辺の第二項は α と共にいくらでも小さくなる.

次に (5) の事実は, logmodular algebra に関する次の性質から導かれた.

(3) X の閉部分集合 F に対しては, $A|F = C(F)$ なるための必要充分条件は, $\mu \in A^\perp \Rightarrow \mu|F = 0$.

この事は, logmodular よりも弱い条件の下でも正しい. 実際 Glicksberg [4] はそのやうな一つの条件を与へたが, 更に弱い次の条件が考へられる [8].

(P) 次の性質を持つ定数 c_1, c_2 ($0 < c_2 \leq 1 \leq c_1 < +\infty$) が存在する: 任意の $g \in C_{\mathbb{R}}(X)$, $g > 0$, に対して $c_2|f| \leq g \leq c_1|f|$ を満足する $f \in A$ が存在する.

補題 2. A が条件 (P) を満足すれば, 命題 (3) が成立する. 従て, X の閉集合 F が $A|F = C(F)$ を満足すれば, 任意の $p \in M(A) \setminus X$ に対し, $\mu \in M_p \Rightarrow \mu|F = 0$.

前半の証明は [8] にある. 又前半から後半を導く方法は [7] にある.

補題 3. 有限個の $Z_1, \dots, Z_s \in A^{-1}$ と有限な定数 $d > 0$ とで次の性質を持つものがあれば, A は条件 (P) を満足する: 任意の $g \in C_{\mathbb{R}}(X)$ は

$$\log|f| + \sum_{j=1}^s a_j \log|Z_j|, \quad f \in A, f \neq 0, a_j \in \mathbb{R}$$

の形の函数の集合から距離 d 以内にある.

証明は [8] にある.

§4. 定理3の証明.

証明の予定は [7] におけると同様である. 先づ, 任意の $\mu \in M(A)$ に対し, $\mu = p$ は Ahern-Sarason [1] の基本假定 (I) (II) を満足する. 彼等の結果により, p の Arens-Singer 測度 ν_p は一意的に決定し且つ strongly dominant である. 即ち, すべての $\mu \in M_p$ に対し $\mu \leq c\nu_p$ を満たす定数 c が存在する. 更に, p, q が A の同じ part に属するならば, ν_p と ν_q は互に絶対連続であり, p, q が相異なる part に属するならば, ν_p と ν_q は互に特異である. (これらについては [3] も参照のこと.) さて, 各 $P \in \mathcal{P}$ に対し一点 $p \in P$ を選び, その Arens-Singer 測度 ν_p を $\nu(P)$ と書く. この時, 假定 (1) により

$$d\nu(P) = l(P) \cdot d\mu(P), \quad l(P) \in L^1(\mu(P))$$

なる関係式が成立つ. この場合, 前節の (β) に関係して述べた Glicksberg [5] の結果は次の通りである.

補題4. $\mu \in A^+$ に対し, part の可算列 $P_1, P_2, \dots \in \mathcal{P}$ で次の性質を持つものが存在する:

$$(4) \quad \mu = \sigma + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j, \quad \sigma, \mu_j \in A^+;$$

(5) σ は $M(A)$ のすべての点のすべての表現測度に対し特異である;

(6) μ_j は $\nu(P_j)$ に対し絶対連続であり, 従て $\nu(P_k)$ ($k \neq j$) に対し特異である.

さて、定理 3 を示すために、先づ $F \setminus X$ が可算集合であると仮定しよう。 L^∞ の極大 ideal 空間を Ω と書けば、 $L^\infty \cong C(\Omega)$ であるから、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & C(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^\infty & \longrightarrow & L^\infty \cong C(\Omega) \end{array}$$

ここで、写像はすべて自然なものであって、 $\text{norm} \leq 1$ である。極大 ideal 空間へ移れば次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} M(A) & \longleftarrow & X \\ \uparrow \pi_2 & & \uparrow \\ M(H^\infty) & \longleftarrow & \Omega \\ & \pi_1 & \end{array}$$

そこで、 $\pi_1(\Omega) = \Omega_1$ とおけば、 Ω_1 は $M(H^\infty)$ の compact 部分集合で、 $\pi_2(\Omega_1) \subseteq X$ 。(2) の式によって $M(A) \setminus X$ の点を $M(H^\infty)$ の点と看做すことが出来るが、この時 $\pi_2(i(M(A) \setminus X)) = M(A) \setminus X$ であるから、 $M(H^\infty)$ においては $i(M(A) \setminus X) \cap \Omega_1 = \emptyset$ となり、特に $i(F \setminus X) \cap \Omega_1 = \emptyset$ 。

さて、 $Y = F \cup X$ とおくと、 $\hat{A}|_Y$ は $C(Y)$ の uniformly closed subalgebra であることが分る。今 $\xi \in M(Y)$ が $\hat{A}|_Y$ に直交すると仮定する。補題 1 により $p \rightarrow \nu_p$ は汎弱連続であるから、

$$\eta = \int_Y \nu_p d\xi(p)$$

により X 上の Radon 測度 η が定義される。しかも $\eta \in A^\perp$ 。何

となれば, 任意の $f \in A$ に対し $\int_X f(x) d\eta(x) = \int_Y \hat{f}(p) d\xi(p) = 0$ となるからである. 従て, 補題 4 によって (4), (5), (6) を満足する分解 $\eta = \sigma + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$ が可能である. 特に

$$\mu_j = k_j \cdot \nu(P_j) = k_j l(P_j) \mu(P_j), \quad k_j \in L^1(\nu(P_j))$$

が成立する. 便宜上, 上の μ_j の中には 0 なるものも入っているとしておく. そこで, η を Y 上の測度であると考えて, $\xi_0 = \xi - \eta$ とおくならば,

$$(7) \quad \int_Y \nu_p \cdot d\xi_0(p) = 0.$$

何となれば, $x \in X$ に対しては ν_x は evaluation δ_x に等しいから, $\int_Y \nu_p \cdot d\xi_0(p) = \int_Y \nu_p \cdot d\xi(p) - \int_X \nu_x \cdot d\eta(x) = \eta - \int_X \delta_x \cdot d\eta(x) = \eta - \eta = 0$ となるからである.

< 2 > で, 測度 ξ_0 と $\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$ を $M(H^\infty)$ の上へ移そう. 仮定により $F \setminus X$ は可算集合であるから, $\xi_0|(F \setminus X)$ をそのまま $M(H^\infty)$ 上へ移すことが出来る. これを ξ^1 とおく. 次に, (7) より

$$\begin{aligned} \xi_0|X &= - \int_{F \setminus X} \nu_p \cdot d\xi_0(p) = - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{F \cap P_j} \nu_p \cdot d\xi_0(p) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} u_j \nu(P_j) \quad (u_j \in L^1(\nu(P_j))) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} u_j l(P_j) \mu(P_j) \end{aligned}$$

を得る. 即ち, η の分解について述べたところの便法により, F と共通分を持つ $\mathcal{P}$ の part はすべて元の $\{P_j\}$ の中にあるとするのである. そこで,

$$\Phi(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j(k_j + u_j) l_j d\mu(P_j)$$

(但し f_j は $f \in L^\infty$ の P_j 成分を表はす) によって L^∞ 上の有界線型汎函数を定義し, これに対応する Ω の上の Radon 測度を λ と書く, $\pi_1(\Omega) = \Omega_1$ であるから, $\pi_1(\lambda) = \xi''$ とおけば, ξ'' は Ω_1 の上の測度である.

$$\tilde{\xi} = \begin{cases} \xi' & M(H^\infty) \setminus \Omega_1 \text{ 上で,} \\ \xi'' & \Omega_1 \text{ 上で.} \end{cases}$$

とおけば, $\tilde{\xi}$ は $M(H^\infty)$ 上の測度であって, $\tilde{\xi} \in [(H^\infty)^\wedge]^\perp$. A から H^∞ の中への自然な準同型を π とする時, $f \in A$ ならば

$$\begin{aligned} \int_{M(H^\infty)} (\pi(f))^\wedge d\tilde{\xi} &= \int_{M(H^\infty) \setminus \Omega_1} (\pi(f))^\wedge d\xi' + \int_{\Omega_1} (\pi(f))^\wedge d\xi'' \\ &= \int_{F \setminus X} \hat{f} d\xi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f(k_j + u_j) d\nu(P_j) \\ &= \int_{F \setminus X} \hat{f} d\xi_0 + \int_X f d\xi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f d\mu_j \\ &= \int_Y \hat{f} d\xi_0 = 0. \end{aligned}$$

極限をとることにより求める結果を得る.

一方, (B) の第二の等式 $(H^\infty)^\wedge|_{i(F \setminus X)} = C^b(i(F \setminus X))$ から

$i(F \setminus X)$ の $M(H^\infty)$ の中での closure を G とおけば, $(H^\infty)^\wedge|_G = C(G)$

なることが分る. 前節の (d) で述べた Glicksberg の結果 [4, Cor. 3. 2.] によれば, H^∞ と G のみで決まり次の不等式を満足する定数 $c \geq 1$ の存在が知られる: 即ち

$$\|\tilde{\xi}|_G\| \leq c \|\tilde{\xi}|_{M(H^\infty) \setminus G}\|.$$

これから次の計算式を得る.

$$\begin{aligned}
(8) \quad \|\xi|_{F \setminus X}\| &= \|\xi_0|_{F \setminus X}\| = \|\tilde{\xi}|_{i(F \setminus X)}\| \leq \|\tilde{\xi}|_G\| \\
&\leq c \|\tilde{\xi}|_{M(H^\infty) \setminus G}\| \leq c \|\tilde{\xi}|_{\Omega_1}\| \\
&= c \|\xi''|_{\Omega_1}\| = c \sum_{j=1}^{\infty} \int_X |k_j + u_j| \cdot l_j \, d\mu(p_j) \\
&= c \|\xi_0|_X + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j\| \leq c \|\xi_0|_X + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j + \sigma\| \\
&= c \|\xi|_X\|.
\end{aligned}$$

次に, (B) の第一式を用ひれば, 補題 2, 3 より

$$\xi_0|_{F \cap X} = 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j|_{F \cap X} = 0 \quad \text{且つ} \quad \sigma|_{F \cap X} = 0$$

を得るから, $\xi|_{F \cap X} = 0$ となり, (8) より

$$\begin{aligned}
\|\xi|_F\| &= \|\xi|_{F \setminus X}\| \leq c \|\xi|_X\| = c \|\xi|_{X \setminus F}\| \\
&= c \|\xi|_{Y \setminus F}\|.
\end{aligned}$$

ξ は任意であるから, Glucksberg の結果 (上記) を使って,

$\hat{A}|_F = (\hat{A}|_Y)|_F = C(F)$ であることが分る. 即ち, $F \setminus X$ が可算集合ならば "(B) $\Rightarrow$ (A)" が証明された.

次に, F と交はる $\mathcal{P}$ の part が高々可算個であると仮定しよう. この場合には, (B) の第二式を併用して $F \setminus X$ が可算集合であることを示せば充分である. それには前節の (E) の事実を拡張すればよいが, 丁度 Gamelin [2] から求まる結果が得られる. 詳細は省略する. 尚定理 2 の方, 即ち A が hypo-Dirichlet の時は, O'Neill [12], O'Neill-Wermer [13] の結果で充分である.

§ 5. 例

Hypo-Dirichlet algebra の例としては次のものがよく知られてゐる. Ω を有限 Riemann 面でその境界 $\partial\Omega$ は有限個の解析曲線から成つてゐるとし, $A(\Omega)$ は $C(\partial\Omega)$ の中の函数であつて, $\Omega \cup \partial\Omega$ まで連続的にしかも Ω では解析的になるやうに延長出来るものの全体を表はすとすれば, $A(\Omega)$ は $\partial\Omega$ 上で hypo-Dirichlet である. 又, Y を平面上の compact 集合でその補集合は有限個の成分を持つものとし, X を Y の境界とする. この時, Y 上に極を持たない有理函数の X における uniform limit として表はされる (X 上の) 函数の全体を A とすれば, A は X 上で hypo-Dirichlet である.

定理 3 の条件 (i'), (ii') を満足するものとしては例へば次のやうなものがある. A を hypo-Dirichlet algebra, $p \in M(A)$, 且つ m を p の Arens-Singer 測度とする. この時, $H^\infty(m)$ の Gelfand 表現 $(H^\infty(m))^\wedge$ は $L^\infty(m)$ の極大 ideal 空間 $\hat{X}$ 上の function algebra であつて上の二条件を満足する.

文 献

- [1] P. R. Ahern and D. Sarason, The H^p spaces of a class of function algebras, Acta Math. 117 (1967), 123-163.
- [2] T. W. Gamelin, Embedding Riemann surfaces in

maximal ideal spaces, *J. Functional Analysis* 2 (1968), 123—146.

[3] T. W. Gamelin and G. Lumer, Universal Hardy class, (to appear).

[4] I. Glicksberg, Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry, *Trans. Amer. Math. Soc.* 105 (1962), 415—435.

[5] I. Glicksberg, The abstract F. and M. Riesz theorem, *J. Functional Analysis* 1 (1967), 109—122.

[6] I. Glicksberg and J. Wermer, Measures orthogonal to a Dirichlet algebra, *Duke Math. J.* 30 (1963), 661—666.

[7] M. Hasumi, Interpolation sets for logmodular Banach algebras, *Osaka J. Math.* 3 (1966), 303—311.

[8] M. Hasumi, On the converse of Bishop's interpolation theorem, (to appear).

[9] M. Hasumi, Interpolation sets for a class of uniform algebras, (to appear).

[10] K. Hoffman, Banach spaces of analytic functions, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

[11] K. Hoffman, Analytic functions and logmodular Banach algebras, *Acta Math.* 108 (1962), 271—317.

[12] B. V. O'Neill, Parts and one-dimensional analytic spaces, Amer. J. Math. 90 (1968), 84—97.

[13] B. V. O'Neill and J. Wermer, Parts as finited-sheeted coverings of the disk, Amer. J. Math. 90 (1968), 98—107.

[14] J. Wada, On the interpolation of some function algebras, Osaka J. Math. 1 (1964), 153—164.

(註1) A が条件 (i), (ii) 又は (i'), (ii') を満足する時は, X の各点は peak point となり, $M(A) \setminus X = \bigcup \{P : P \in \mathcal{P}\}$ であることが分る.