

複素射影空間における代数的全微分方程式

木村 俊房 (東大理)

§1 Darboux の結果

Darboux は次の方程式を考えた.

$$L(x, y) dy - M(x, y) dx - N(x, y)(x dy - y dx) = 0$$

ここで L, M, N は x, y の $m-1$ 次、多項式である. 一見変わった形の方程式であるが、複素射影平面の方程式と考えると対称的な形になる. このため,

$$x \text{ を } \frac{x}{z} \text{ で, } y \text{ を } \frac{y}{z} \text{ で}$$

おきかえると,

$$P(x, y, z)(z dy - y dz) + Q(x, y, z)(z dx - x dz) + R(x, y, z)(y dx - x dy) = 0$$

とすると,

$$P(x, y, z) = z^{m-1} L\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

$$Q(x, y, z) = z^{m-1} M\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$$

$$R(x, y, z) = z^{m-1} N\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

これを行列式と使うと書くと

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

dx, dy, dz を基底として

$$(1) \quad A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz = 0$$

と書くと,

$$A = yR - zQ, \quad B = zP - xR, \quad C = xQ - yP$$

で,

$$(2) \quad xA + yB + zC = 0$$

とみられる。(2) は (1) の複素射影平面 $\mathbb{P}^2$ における方程式とみなされ、その必要十分条件である。

A, B, C は互に素: $(A, B, C) = 1$ とする。

$f=0$ が (1) の代数的解であるとは、 f が既約な同次多項式で $\{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\}$ 上で

$$df \wedge \omega = 0$$

がなりたつものとする。

F, G を x, y, z の同次多項式 (互に素) とし、 F/G が有理的積分であるとしよう。

$$d\left(\frac{F}{G}\right) = R\omega \quad (R \text{ は有理関数})$$

がなりたつことを示す。

そのとき、Darboux の定理は次のように述べられる。

定理 (Darboux). A, B, C は互に素な m 次同次多項式

で (2) を満たすとする.

$$p = \frac{1}{2} m(m-1) + 2$$

とあく. さて, 方程式 (1) は互に異なる n 個の代数的解

$f_1 = 0, \dots, f_n = 0$ とおける. そのとき,

1) $n = p-1$ ならば, 適当に $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ とおくと

$$f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n}$$

は (1) の積分因子となる積分となる.

2) $n = p$ ならば, 適当に $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ とおくと

$$f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n}$$

は (1) の積分となる.

3) $n > p$ ならば, (1) は有理的積分 F/G を持つ. 此

より, すべての解は代数的解である.

$f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n}$ が積分因子であること,

$$d(f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n} \omega) = 0$$

は同値である. この式を $\prod f_i^{\alpha_i-1}$ で割って,

$$f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n} \text{ が積分因子} \iff \left(\sum_i \alpha_i \prod_{k \neq i} f_k \right) \wedge \omega + \prod_i f_i \cdot d\omega = 0$$

となる.

$f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n}$ が積分であること,

$$d(f_1^{\alpha_1} \cdots f_n^{\alpha_n}) \wedge \omega = 0$$

は同値. これは $\prod f_i^{\alpha_i}$ で割って,

$f_1^{\alpha_1} \dots f_n^{\alpha_n}$ の種分 $\leftrightarrow \left(\sum_i \alpha_i \frac{df_i}{f_i} \right) \wedge \omega = 0$
 がわかる。

(1) の代数的解の個数について、次の $p+2$ 個の場合が起る:
 $0, 1, \dots, p, p+1$ 。

最後の場合は (代数的と解ける) といわれた, Poincaré, Autonne, Painlevé の研究の対象となつたが、いずれも不完全である。最初の場合、すなわち代数的解とともなる方程式については、最近 Jouanolou の次の結果を得ている。

(1) は定数倍と無理で済むから、 A, B, C の係数のうち独立なもの個数を N とすれば、 m 次係数をもつ方程式は $\mathbb{P}^N$ と同一視できる。そのとき

定理. m 次多項式と係数にもつ方程式 (1) の全体は、 $\mathbb{P}^N$ から可算個の代数多様体を除くものに等しい。ところで $m > 2$ のような方程式の例として

$$(x^{m-1}z - y^m)dx + (y^{m-1}x - z^m)dy + (z^{m-1}y - x^m)dz = 0$$

($m > 2$) がある。

注意. (2) とみえ互に素な A, B, C はない。

$$A = zR - zQ, \quad B = zP - xR, \quad C = xQ - yP$$

とみえ P, Q, R が存在する。ところで題にはさまらるゝ。終

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

をかくと一通りにきまる

§2 P^n における方程式

$(x_0, x_1, \dots, x_n)$ を n 次元複素射影空間 P^n の同次座標とし

るとき, m 次代数的な微分方程式は

$$(3) \quad \sum_{i=0}^n A_i(x_0, x_1, \dots, x_n) dx_i = 0$$

の形の方程式とする. ところで A_i は m 次同次多項式で

$$(4) \quad \sum_{i=0}^n x_i A_i = 0$$

と満たすものとする.

(3) の左辺を ω で表わす:

$$\omega = \sum_{i=0}^n A_i(x_0, \dots, x_n) dx_i.$$

$T(P^n)$ を P^n の接バンドル, L を P^n の標準直線バンドルと

すると, m 次代数的 1-形式の全体は $\text{Hom}(T(P^n), L^{-(m+1)})$

とは自然な対応によって 1:1 となる.

以下 A_i ($i=0, \dots, n$) の最大公約因子は 1 とする.

定義: 至14

$$A_0(x_0, \dots, x_n) = \dots = A_n(x_0, \dots, x_n) = 0$$

を満たす点 $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ を (3) の特異点と"し, 特異点の集合を S で表わす.

そのとき,

定理. n が奇数で $m=1$ の場合以外は, $S \neq \emptyset$.

がなりたつ.

定義: (3) は,

$$\omega \wedge d\omega = 0$$

とみえるとき, 完全積分可能という.

$n=2$ のとき ω は常に完全積分可能である.

そのとき,

定理. (3) が完全積分可能であるば, ω は $n-2$ 次元の成分を含む.

しかし, 可能な成分が $n-2$ 次元とは限らない.

定義: f と既約同次多項式とし, $\omega \wedge d\omega$ が f の冪で割れるとき, $f=0$ は (3) の代数的解という.

定義: F, G と互に素な同次多項式とし,

$$d\left(\frac{F}{G}\right) = R \omega \quad (R: \text{有理関数})$$

がなりたつとき, F/G は (3) の有理的積分という.

F/G が有理的積分するば, F と G の次数は等しい. (3)

有理的積分 F/G があり, $f=0$ は (3) の代数的解ならば

$$\exists (\lambda, \mu) \neq (0, 0), \lambda, \mu \in \mathbb{C} : f \mid \lambda F + \mu G$$

がなりたつ.

Darboux の定理は,

$$\rho = \frac{1}{2} m(m-1) \binom{m+n-1}{n-2} + 2$$

とあることにより, そのまま成立する.

定理. (3) は m 次 2 変数の代数的全微分方程式²⁾, n 個の代数的解 $f_1=0, \dots, f_n=0$ を持つとき, そのとき,

$$1) \quad r = p-1 \quad \text{を 515},$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{df_i}{f_i} \right) \wedge \omega + d\omega = 0$$

かまは

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{df_i}{f_i} \right) \wedge \omega = 0$$

に於て $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ 0-存在する.

$$2) \quad n = p \quad \text{を 515}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{df_i}{f_i} \right) \wedge \omega = 0$$

に於て $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ 0-存在する.

3) $n > p$ を 515, (3) は有理的積分 F/G をもつ. したがってすべての解は代数的解にある.

したがって, $n \geq p-1$ を 515, (3) は完全積分可能である.

代数的解の個数は

$$0, 1, \dots, p-1$$

のどれかになる.

問題: 代数的解をもつ方程式の例をつくれ.

代数的解をもつ m 次方程式は generic か.

(3) が正規な代数的解をもつとき, 次の定理がなりたつ.

定理: (3) は既約 m 次全微分方程式と $f=0$ かつ (3) の代数的解で, 代数超曲面 $f=0$ は正規とする. そのとき

1) 同次多項式 a と多項式係数にもつ 1-form ω が存在して

$$\omega = a df + f \omega$$

2) 曲面 $f=0$ は ω の特異集合 S の $n-2$ 次元成分を含む

3) $\deg f \leq m$

4) $f \mid \omega \wedge d\omega$

系. 特に $\deg f = m$ のときは, (3) は

$$\frac{f}{(a_0 x_0 + \dots + a_n x_n)^m}$$

の形の第一積分をもつ. したがって (3) は完全積分可能である.

3.

§3. 葉層構造

(3) は完全積分可能とする. そのとき, (3) によって

$$U = \mathbb{P}^n - S$$

内に自然に $\text{codim. } 1$ の foliation が定まる. 任意の leaf

F に対し

$$B(F) = \overline{F} - F \quad (\text{— は } \mathbb{P}^n \text{ の位相による閉包})$$

と置く. $B(F)$ は閉不変集合である. すなわち, $B(F) \cap U \neq \emptyset$

ならば, $B(F) \cap U$ の任意の点を通る leaf は $B(F)$ に含まれる.

このことから

$$B(F) \cap F = \emptyset$$

$$B(F) = \overline{F}$$

のいずれかが起こる. 前者がなりたつとき, F は proper といふ.

$\mathbb{C}^2$ における方程式

$$\lambda y dx - x dy = 0$$

を $\mathbb{P}^2$ に拡張すると

$$\lambda y z dx - x z dy - (\lambda - 1) x y dz = 0$$

となる. それは

$$(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$$

からなり, $x=0$, $y=0$, $z=0$ は代数曲線である. 点

$(1, 1, 1)$ を通る leaf は F は

$$x = e^t, y = e^{\lambda t}, z = 1$$

で表えられる. λ は無理数で $0 < \lambda < 1$ とすると

$$B(F) = \overline{F} \ni (0, 0, 1), (1, 0, 0)$$

で, $B(F) = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$ は $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{R}$ に同相である. 2.

で T^2 は Torus.

次の定理が知られている.

定理:

- 1) $\mathcal{O}$ に含まれるすべてのリーフは存在する。
- 2) F 0th algebraic leaf $\Leftrightarrow B(F) \subset S$
- 3) F 1st 2nd leaf 0th proper 5518, algebraic leaf
が存在する。

文献

- 1) 吉江琢敏：初等常微分方程式
- 2) Gerard - Jouanolou : Etude de l'existence de
variété intégrales C.R. 277 (1973) 167-169
- 3) Gerard - Jouanolou : Etude de l'existence de
feuilletés compacts C.R. 277 (1973), 311-314
- 4) Jouanolou : Equations de Pfaff algébriques
sur un espace projectif 1975 (Preprint)
- 5) Jouanolou : Densité des équations de Pfaff
algébriques sans solutions algébriques 1975 (Preprint)
- 6) Tran Huy Haang : Sur les feuilletés définis
par une équation de Pfaff algébrique sur $\mathbb{P}_n \mathbb{C}$,
Thèse de Doc. de 3^e cycle ..1975, Strasbourg.