

1 階準線型方程式の初期値問題の weak solution

の存在について

航空宇宙技研 小島 清史

1 序論

最近 準線型双曲型偏微分方程式に対する初期値問題を不連続な解に、多くの関心が払われるようになり、1 空間次元の場合の conservation type の 1 階準線型方程式に対しては、shock 以外の不連続をもたない (つまり entropy condition を満たす) weak solution の一意性と存在が証明された。

空間変数が 2 以上の場合には、Conway & Smoller [1] が、初期値 $u_0(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, が有界可測かつ、Tonelli-Cesari の意味で局所有界変動ならば初期値問題

$$(1.1) \quad u_t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i(u)}{\partial x_i} = 0$$

$$(1.2) \quad u(0, x) = u_0(x)$$

1) Oleinik の総合報告 [3] を参照

の weak solution が存在するということを 差分法を用いて、証明した。ある関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ が R^n において Tonelli-Cesari の意味で局所有限変動であるというのば、 R^n 内の任意のコンパクト集合 K に対して、測度 0 の集合 N が存在して 関数

$$V^i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \text{Var}_{K-N} f(x_1, \dots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$i = 1, \dots, n$$

が、可測かつ可積分なことである。ここでこのような関数全体の集合を $\mathcal{F}$ で表わすことにする。

ここでの目的は、領域

$$(1.3) \quad G = \{(t, x); 0 \leq t \leq T < \infty, \\ -\infty < x_i < +\infty, i = 1, \dots, n\}$$

において 次の様相初期値問題の weak solution の存在を示すことである。

$$(1.4) \quad u_t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f^i(t, x, u) + g(t, x, u) = 0$$

$$(1.5) \quad u(0, x) = u_0(x) \in \mathcal{F}$$

ここで $f^i, i = 1, \dots, n$ と g は次にあげた条件 i), ii) を満たしていると仮定する。

i) f^i, g とこれらの導関数 $f_{x_j}^i, f_n^i, f_{x_j x_k}^i, f_{x_j n}^i, g_{x_j}, g_n, i, j, k = 1, \dots, n$ はすべての n の値と G 内の (t, x) に対して連続で、かつ有界な u の値に対して、 G 内の (t, x) に対して一様有界。

ii) $v \geq 0$ に対して定義された次のような連続微分可能な関数 $V(v)$ が存在する。

$$\max_{\substack{(t, x) \in G \\ |u| \leq v}} \left| \sum_{i=1}^n f_{x_i}^i + g \right| \leq V(v), \quad V'(v) \geq 0$$

かつ任意の $v_0 \geq 0$ に対して

$$(1.6) \quad \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{V(v)} = \infty^2$$

すなわち

定理. $f^i, i = 1, \dots, n, g$ が条件 i) ii) を満たしている時、 $u_0 \in F$ ならば次のような (1.4)

(1.5) の weak solution $u(t, x)$ が存在する。

(1) $u(t, x)$ は G 内で有界可測、かつ Tonelli-Cesari の意味で局所有界変動。

(2) 任意の $t, (0 \leq t \leq T)$ に対して $u(t, x) \in F$ 。

2) この条件は、Vvedenskaya [4] の条件である。

この定理は、Conway & Smaller [1] におけると同様に、差分法を用いて証明される。

[1] を見れば明らかのように、上の定理を証明するには [1] における、差分方程式の解の評価に因する補題 1, 2, 4 に対応する補題を証明すれば十分である。

以下、簡単のために、 $n = 2$ の場合についてその証明を示すが、 $n \geq 3$ の場合もまったく同様である。

2. 問題の説明と差分方程式

領域

$$G = \{(t, x, y); 0 \leq t \leq T < \infty, -\infty < x, y < \infty\}$$

において 初期値問題

$$(2.1) \quad u_t + \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, y, u) + \frac{\partial}{\partial y} g(t, x, y, u) + h(t, x, y, u) = 0$$

$$(2.2) \quad u(0, x, y) = u_0(x, y) \in \bar{F}$$

を考える。ここで f, g, h は前節の条件 i), ii) を満たしていると仮定する。すなわち

i)' f, g, h とこれらの偏導関数 $f_x, f_y, f_u, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{xu}, f_{yu}, g_x, g_y, g_u, g_{xx}, g_{xy}, g_{yy}, g_{xu}, g_{yu}, h_x, h_y$ と h_u はすべての u の値と G 内の (t, x, y) に対して連続で、かつ有界な u に対して G 内の (t, x, y) に関し一様有界

ii)' $v \geq 0$ に対して定義された次の様な 1 階連続微分可能な関数 $V(v)$ が存在する。

$$\max_{\substack{(t, x, y) \in G \\ |u| \leq v}} |f_x + g_y + h| \leq V(v) \quad V'(v) \geq 0$$

かつ 任意の $v_0 \geq 0$ に対して

$$(2.3) \quad \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{V(v)} = \infty$$

(2.3) より、容易に任意の M^0 , $\alpha > 0$ に対し
 正の数 M が存在して

$$(2.4) \quad \int_{M^0}^M \frac{dv}{V(v) + \alpha} \geq T$$

が成立することが確かめられる。³⁾

今、 $\Omega = \{(t, x, y, u); (t, x, y) \in G, |u| \leq M\}$ とし

この (t, x, y, u) 空間の領域に対し

$$(2.5) \quad \frac{A}{2} = \max_{\Omega} |f_u|, \quad \frac{B}{2} = \max_{\Omega} |g_u|$$

と定義された2つの定数 A, B を用いて

$$x' = x + (A/2)t, \quad y' = y + (B/2)t, \quad t' = t$$

なる変数変換を行ない (2.1) 式を (t', x', y') を使
 って書き改めれば、

$$(2.1)' \quad u_{t'} + \frac{\partial}{\partial x'} [f'(t', x', y', u) + \frac{A}{2}u] + \frac{\partial}{\partial y'} [g'(t', x', y', u) + \frac{B}{2}u] \\
+ h(t', x', y', u) = 0,$$

$$f'(t', x', y', u) = f(t', x' - \frac{A}{2}t', y' - \frac{B}{2}t', u), \quad g'(t', x', y', u) = g(t', x' - \frac{A}{2}t', y' - \frac{B}{2}t', u)$$

3) Douglis [2; sec 3] 参照.

となる。

そこで $F = f' + \frac{A}{2}u$, $G = g' + \frac{B}{2}u$ とおけば,
 $0 \leq F_u \leq A$, $0 \leq G_u \leq B$ が Ω 内で成立する。然
 がって、一般性を失なうことなしに、(2.1) にお
 いて

$$(2.6) \quad 0 \leq f_u \leq A, \quad 0 \leq g_u \leq B \quad \text{in } \Omega$$

としてよい。

$u(t, x, y)$ が (2.1), (2.2) の weak solution
 であり、 $t = T$ で 0 でありような任意の函数
 $\phi = \phi(t, x, y) \in C_0^1$ に対して u が関係式

$$(2.7) \quad \iiint_G [u\phi_t + f\phi_x + g\phi_y - h\phi] dx dy dt \\
 + \iint_{t=0} u_0(x, y) \phi(0, x, y) dx dy = 0$$

を満たすことである。

領域 G 内に、格子領域

$$G_{p,q,r} = \{(kr, mp, nq); k = 0, 1, \dots, [T/r],$$

$$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, p, q, r > 0\}$$

を定義する。

4) Douglis [2; sec 3] 参照

$G_{p,q,r}$ 上 の 差分方程式

$$(2.8) \quad \frac{u_{m,n}^{k+1} - u_{m,n}^k}{r} + \frac{f_{m,n}^k - f_{m-1,n}^k}{p} + \frac{g_{m,n}^k - g_{m,n-1}^k}{q} + h_{m,n}^k = 0$$

を 考 え る . こ こ で

$$u_{m,n}^k = u(kr, mp, nq), \quad f_{m,n}^k = f(kr, mp, nq, u_{m,n}^k), \quad \text{etc.}$$

の 記 号 を 用 いた .

3. 差分方程式の解の評価.

補題 1. p, q, r が stability condition

$$(3.1) \quad \frac{r}{p}A + \frac{r}{q}B < 1$$

を満足するとき、 $\max_{m,n} |u_{m,n}^0| \leq M^0$ ならば $\max_{m,n,k} |u_{m,n}^k| \leq M$

証明. (2.8) より

$$(3.2) \quad u_{m,n}^{k+1} = u_{m,n}^k - \frac{r}{p}(f_{m,n}^k - f_{m-1,n}^k) - \frac{r}{q}(g_{m,n}^k - g_{m,n-1}^k) - rh_{m,n}^k$$

この式に Taylor の定理を適用して

$$(3.3) \quad u_{m,n}^{k+1} = [1 - \frac{r}{p}f_u(kr, (m-1)p, nq, \tilde{u}) - \frac{r}{q}g_u(kr, mp, (n-1)q, \tilde{u})] u_{m,n}^k \\ + \frac{r}{p}f_u(kr, (m-1)p, nq, \tilde{u}) u_{m-1,n}^k + \frac{r}{q}g_u(kr, mp, (n-1)q, \tilde{u}) u_{m,n-1}^k \\ - r[f_x + g_y + h]_{m,n}^k + \frac{r^2}{2}\{\tilde{f}_{xx} + \tilde{g}_{yy}\}$$

となる。ここで $\tilde{u}, \bar{u}$ はそれぞれ $u_{m,n}^k$ と $u_{m-1,n}^k$, $u_{m,n}^k$ と $u_{m,n-1}^k$ の適当な中間の値、 $\tilde{f}_{xx}$ と $\tilde{g}_{yy}$ は考えられている領域 Ω 内の適当な点での f_{xx}, g_{yy} の値を表わす。

以下、いつでも $\sim$ をつけた時は、 Ω 内の適当な点でのその関数の値を表わす（同じ式内に同じ関数に $\sim$ をつけた項が、二つ以上ある場合必ずしも同じ量を表わすとは限らない）とする。

(3.1) より (3.3) の右辺の u_{ij}^k の係数はすべて負ではなく、その和は 1 に等しい。

従って、 p, q を十分小さくして

$$\frac{p}{2} \max_{\Omega} |f_{xx}| + \frac{q}{2} \max_{\Omega} |g_{yy}| < \alpha$$

を満たすようにすれば

$$(3.4) \quad M^{k+1} \leq M^k + r(V(M^k) + \alpha)$$

$$\text{そこで} \quad M^j = \max_{m,n} |u_{m,n}^j|$$

(2.4), (3.4) より Douglis [2; Th.5.1] とまっ

たく同様に、この補題は証明出来る。

以下においては、常に補題 1 は成立しているものとして、議論を進めることにする。

$$(3.5) \quad v_{m,n}^k = \frac{u_{m+1,n}^k - u_{m,n}^k}{p} \quad w_{m,n}^k = \frac{u_{m,n+1}^k - u_{m,n}^k}{q}$$

とあけは

補題 2、 $p < \delta r, q < \delta' r$ ならば

$$(3.6) \quad \sum_{\substack{|m| \leq X \\ |p| \leq X \\ |n| \leq Y \\ |q| \leq Y}} \{|v_{m,n}^k| + |w_{m,n}^k|\} pq \\ \leq \left[\sum_{\substack{-X-\delta kr \leq mp \leq X \\ -Y-\delta' kr \leq nq \leq Y}} \{|v_{m,n}^0| + |w_{m,n}^0|\} pq + \frac{D}{C} \right] e^{Ckr - \frac{D}{C}}$$

$$D = (2X+k-r)(wY+k-r)(D'+D'')$$

$$D' = (p/q)\|g_{xx}\| + \|g_{xy}\| + \|h_x\| + 2\|f_{xx}\|$$

$$D'' = (q/p)\|f_{yy}\| + \|f_{xy}\| + \|h_y\| + 2\|g_{yy}\|$$

$$C = \max (\|f_{xu}\| + \|f_{yu}\| + \|h_u\|, \|g_{xu}\| + \|g_{yu}\| + \|h_u\|)$$

$$\|\cdot\| = \max_{\Omega} |\cdot|$$

証明 (3.2), (3.5) より

$$\begin{aligned} v_{m,n}^{j+1} &= v_{m,n}^j - \frac{r}{p^2} (f_{m+1,n}^j - 2f_{m,n}^j + f_{m-1,n}^j) \\ &\quad - \frac{r}{pq} (g_{m+1,n}^j - g_{m+1,n-1}^j - g_{m,n}^j - g_{m,n-1}^j) - \frac{r}{p} (h_{m+1,n}^j - h_{m,n}^j) \end{aligned}$$

この式に Taylor の定理を用いて

$$\begin{aligned} (3.7) \quad v_{m,n}^{j+1} &= v_{m,n}^j - \frac{r}{p} \alpha_{m,n}^j v_{m,n}^j + \frac{r}{p} \alpha_{m-1,n}^j v_{m-1,n}^j - \frac{r}{p} [(f_x)_{m+1,n}^j - (f_x)_{m,n}^j] \\ &\quad + \frac{r}{2} \{f_{xx} + f_{xx}\} - \frac{r}{q} \gamma_{m,n}^j v_{m,n}^j + \frac{r}{q} \gamma_{m,n-1}^j v_{m,n-1}^j \\ &\quad - \frac{r}{q} [(g_x)_{m,n}^j - (g_x)_{m,n-1}^j] - \frac{rp}{2q} \{g_{xx} - g_{xx}\} - rh_u v_{m,n}^j - rh_x \end{aligned}$$

上式中で

$$\alpha_{m,n}^j = \begin{cases} (f(jr, mp, nq, u_{m+1,n}^j) - f_{m,n}^j) / (u_{m+1,n}^j - u_{m,n}^j) & u_{m+1,n}^j \neq u_{m,n}^j \\ (f_u)_{m,n}^j & u_{m+1,n}^j = u_{m,n}^j \end{cases}$$

$$\gamma_{m,n}^j = \begin{cases} (g_{m+1,n}^j - g(jr, (m-1)p, nq, u_{m,n}^j)) / (u_{m+1,n}^j - u_{m,n}^j) & u_{m+1,n}^j \neq u_{m,n}^j \\ (g_u)_{m+1,n}^j & u_{m+1,n}^j = u_{m,n}^j \end{cases}$$

(3.7) 式の [] の項に平均値の定理を適用し、

(3.1) 式と $\alpha_{m,n}^j$, $\gamma_{m,n}^j$ の定義を考慮に入れて、両辺の絶対値をとれば

$$(3.8) \quad |v_{m,n}^{j+1}| \leq [1 - \frac{r}{p}\alpha_{m,n}^j - \frac{r}{q}\gamma_{m,n}^j + r(\|f_{xu}\| + \|h_u\|)] |v_{m,n}^j| \\ + \frac{r}{p}\alpha_{m-1,n}^j |v_{m-1,n}^j| + \frac{r}{q}\gamma_{m,n-1}^j |v_{m,n-1}^j| + r\|g_{xu}\| |w_{m,n-1}^j| + rD'$$

同様にして

$$(3.8)' \quad |w_{m,n}^{j+1}| \leq [1 - \frac{r}{q}\beta_{m,n}^j - \frac{r}{p}\delta_{m,n}^j + r(\|g_{yu}\| + \|h_u\|)] |w_{m,n}^j| \\ + \frac{r}{q}\beta_{m,n-1}^j |w_{m,n-1}^j| + \frac{r}{p}\delta_{m-1,n}^j |w_{m-1,n}^j| + r\|f_{yu}\| |v_{m-1,n}^j| + rD''$$

そこで

$$\beta_{m,n}^j = \begin{cases} (g(jr, mp, nq, u_{m,n+1}^j) - g_{m,n}^j) / (u_{m,n+1}^j - u_{m,n}^j) & u_{m,n+1}^j \neq u_{m,n}^j \\ (g_u)_{m,n}^j & u_{m,n+1}^j = u_{m,n}^j \end{cases}$$

$$\delta_{m,n}^j = \begin{cases} (f_{m,n+1}^j - f(jk, mp, (n+1)q, u_{m,n}^j)) / (u_{m,n+1}^j - u_{m,n}^j) & u_{m,n+1}^j \neq u_{m,n}^j \\ (f_u)_{m,n+1}^j & u_{m,n+1}^j = u_{m,n}^j \end{cases}$$

(3.8) (3.8)' より

$$(3.9) \quad \sum_{\substack{X' \leq mp \leq X \\ Y' \leq nq \leq Y}} \{|v_{m,n}^{j+1}| + |w_{m,n}^{j+1}|\} pq \leq \sum_{\substack{X' - p \leq mp \leq X \\ Y' - q \leq nq \leq Y}} \{|v_{m,n}^j| + |w_{m,n}^j|\} pq [1 + rC] \\ + r(D' + D'')(X - X')(Y - Y')$$

が成り立つ。そこで $N^j = \sum_{\substack{X - (k-j)p \leq mp \leq X \\ Y - (k-j)q \leq nq \leq Y}} \{|v_{m,n}^j| + |w_{m,n}^j|\} pq$

とあければ

(3.9) より

$$N^j \leq N^{j-1} [1 + rC] + Dr \quad 1 \leq j \leq k$$

故に

$$N^k \leq N^0 [1+rC]^k + \frac{D}{C} \{ [1+rC]^k - 1 \} \leq [N^0 + \frac{D}{C}] e^{Ckr} - \frac{D}{C}$$

この式と条件 $p < \delta r$, $q < \delta' r$ より (3.6) が成り立つ。

補題 3. $p < \delta r$, $q < \delta' r$ ならば

$$(3.10) \quad \sum_{\substack{|m| \leq X \\ |n| \leq Y}} |u_{m,n}^k - u_{m,n}^j| pq \leq (k-j)rE, \quad 0 \leq j \leq k$$

$$(3.6) \quad E = \max(\delta, \delta') F + 4XY(V(M) + \alpha), \quad F \text{ は}$$

(3.6) 式の右辺

証明. (3.3) 式を前補題の証明中の記号を用いて書き換えれば.

$$\begin{aligned} u_{m,n}^j - u_{m,n}^{j-1} &= -r\alpha_{m-1,n}^{j-1} v_{m-1,n}^{j-1} - r\beta_{m,n-1}^{j-1} w_{m,n-1}^{j-1} \\ &\quad - r[f_x + g_y + h]_{m,n}^{j-1} + r\{\frac{p}{2}\tilde{f}_{xx} + \frac{q}{2}\tilde{g}_{yy}\} \end{aligned}$$

 $\alpha_{m,n}^j, \beta_{m,n}^j$ の定義と (3.1) より

$$|u_{m,n}^j - u_{m,n}^{j-1}| \leq \max(\delta, \delta') r \{ |v_{m,n}^{j-1}| + |w_{m,n}^{j-1}| \} + r[V(M) + \alpha]$$

従、2 補題 2 より

$$\sum_{\substack{|m| \leq X \\ |n| \leq Y}} |u_{m,n}^j - u_{m,n}^j|_{pq} \leq r \max(\delta, \delta') \left\{ \sum_{\substack{-X-p \leq mp \leq X \\ -Y-q \leq nq \leq Y}} \{ |v_{m,n}^{j-1}| + |w_{m,n}^{j-1}| \}_{pq} \right\}$$

$$+ r 4XY [V(M) + \alpha] \leq rE$$

$$\text{for } 1 \leq j \leq k$$

故に

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|m| \leq X \\ |n| \leq Y}} |u_{m,n}^k - u_{m,n}^j|_{pq} &\leq \sum_{\ell=j+1}^k \sum_{\substack{|m| \leq X \\ |n| \leq Y}} |u_{m,n}^{\ell} - u_{m,n}^{\ell-1}|_{pq} \\ &\leq \sum_{\ell=j+1}^k rE = (k-j)rE. \end{aligned}$$

4. 定理の証明.

前節の3つの補題に基づいて Conway & Smoller [1] の第3節とまったく同様に、定理は証明出来る。

今、格子領域 $G_{p,q,r}$ 上の差分方程式 (2.8) の解 $u_{m,n}^k$ を

$$(4.1) \quad U(t, x, y) = u_{m,n}^k$$

$$\text{for } kr \leq t < (k+1)r, \quad mp \leq x < (m+1)p, \quad nq \leq y < (n+1)q$$

によって定義される階段関数であると考えれば、補題 1, 2, 3 より [1] の第3節の如くにして次のようなことが結論される。

すなわち $u_0 \in \mathcal{F}$ ならば 条件.

$$\frac{p_i}{r_i} A + \frac{q_i}{r_i} B < 1, \quad p_i < \delta r_i, \quad q_i < \delta' r_i, \quad \frac{q_i}{p_i} = \text{const} > 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} r_i = 0$$

を満たす格子領域の列 $G_i = G_{p_i, r_i, q_i}$, $i = 1, 2, \dots$

とそれらの上での差分方程式 (2.8) の適当な解

$U^i(t, x, y)$, $i = 1, 2, \dots$ が存在して、任意に固定し

た t ($0 \leq t \leq T$) に対して $U^i(t, x, y)$ はある $u(t, x, y) \in \mathcal{F}$

に、 t に関して一様に任意の R^2 のコンパクト集

合の上で L^1 の意味で収束する。ここで $u(t, x, y)$

は G で Tonelli-Cesari の意味で局所有限変動である。更に $U^i(0, x, y)$ は上と同じ意味で $u_0(x, y)$ に収束する。

したがって、定理の証明のためには、このようにして得られた関数 $u(t, x, y)$ が、(2.1), (2.2) の weak solution であることを示せばよい。これは次の補題から、ただちに得られる。

補題 4. $u(t, x, y)$ は、 $t = T$ で 0 であるような任意の関数 $\phi = \phi(t, x, y) \in C_0^3$ に対して関係式

$$(2.7) \quad \iiint_G [u\phi_t + f\phi_x + g\phi_y - h\phi] dx dy dt + \iint_{t=0} u_0(x, y)\phi(0, x, y) dx dy = 0$$

を満たす。

証明. (2.8) 式に $\phi_{m,n}^k$ をかければ、

$$\phi_{m,n}^k \left(\frac{u_{m,n}^{k+1} - u_{m,n}^k}{r} + \frac{f_{m,n}^k - f_{m-1,n}^k}{p} + \frac{g_{m,n}^k - g_{m,n-1}^k}{q} + h_{m,n}^k \right) = 0$$

この式を変形して

$$\begin{aligned}
(4.2) \quad & -u_{m,n}^{k+1} \frac{m,n^{k+1}-m,n^k}{r} + \frac{1}{r}(u_{m,n}^{k+1} m,n^{k+1} - u_{m,n}^k m,n^k) - f_{m,n}^k \frac{m,n^k - m,n}{p} \\
& + \frac{1}{p}(\phi_{m+1,n}^k f_{m,n}^k - \phi_{m,n}^k f_{m-1,n}^k) - g_{m,n}^k \left(\frac{\phi_{m,n+1}^k - \phi_{m,n}^k}{q} \right) \\
& + \frac{1}{q}(\phi_{m,n+1}^k g_{m,n}^k - \phi_{m,n}^k g_{m,n-1}^k) + \phi_{m,n}^k h_{m,n}^k = 0
\end{aligned}$$

ϕ の え ら れ 方 より 十 分 大 き な m, n に 対 し て
 $\phi_{m,n}^k = 0$, 又 r が 十 分 小 さ け れ ば $\phi_{m,n}^{k_0} = 0, k_0 = [T/r]$ で あ
る こ と を 考 慮 に 入 れ て, (4.2) 式 に pqr を か け て
 $m, n, k, \quad (0 \leq k < [T/r], \quad -\infty < m, n < \infty)$ に 関 し て
和 を と れ ば,

$$\begin{aligned}
(4.3) \quad & - \sum_{m,n,k} u_{m,n}^{k+1} \frac{\phi_{m,n}^{k+1} - \phi_{m,n}^k}{r} pqr - \sum_{m,n} u_{m,n}^0 \phi_{m,n}^0 pq - \sum_{m,n,k} f_{m,n}^k \frac{\phi_{m+1,n}^k - \phi_{m,n}^k}{p} pqr \\
& - \sum_{m,n,k} g_{m,n}^k \frac{\phi_{m,n+1}^k - \phi_{m,n}^k}{q} + \sum_{m,n,k} h_{m,n}^k \phi_{m,n}^k pqr = 0
\end{aligned}$$

$u(t, x, y)$ が, この補題の前で述べた様な意味で
(2.8) 式の解の列の極限であるから ϕ の support
の上で $U^1(t, x, y)$ は $u(t, x, y)$ に L^1 の意味で収束
し, $\phi(0, x, y)$ の support の上で $U^1(0, x, y)$ は $u_0(x, y)$
に, L^1 の意味で収束する。

これらのことから, 求める関係式 (2.7) は得ら

れる。詳細な証明については、Oleinik [3] の補題 7 を参照されたい。

参考文献

- [1] E. Conway & J. Smoller, Global Solutions of the Cauchy Problem for First-Order Equations in Several Space Variables, Comm. Pure Appl. Math. Vol.19, 1966, pp.95-105.
- [2] A. Douglis, On Calculating Weak Solutions of Quasi-Linear First-Order Partial Differential Equations, Contributions to Diff. Eqns, Vol.1, 1963, pp.59-94.
- [3] O.A. Oleinik, Discontinuous solutions of nonlinear differential equations, Uspekhi. Mat. Nauk, Vol.12, 1957, pp.3-73. English translation, Amer. Math. Soc. Trans, Ser.2, No.26, pp.95-172.
- [4] N.D. Vvedenskaya, The difference method solution of Cauchy's problem for non-linear equation with discontinuous initial values, Doklady Acad. Nauk. S. S. S. R, Vol.111, 1956, pp.517-521.