

作用素平均と指数積公式

茨城大理 日合 文雄 (Fumio Hiai)

0 序論

エルミート行列 H, K に対するトレース不等式 $\text{tr} e^{H+K} \leq \text{tr} e^H e^K$ は Golden-Thompson 不等式として有名である. この不等式を巡って多くの研究がなされてきた. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素の全体を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で表す. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の (一般化) された特異値を大きい順に重複度分ずつ並べたものを $\mu(A) = (\mu_1(A), \mu_2(A), \dots)$ で表す. 荒木 [5] の不等式は, 任意の正作用素 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $0 < p \leq q$ に対して

$$\prod_{k=1}^n \mu_k((A^{p/2} B^p A^{p/2})^{1/p}) \leq \prod_{k=1}^n \mu_k((A^{q/2} B^q A^{q/2})^{1/q}), \quad n \in \mathbb{N} \quad (0.1)$$

を主張する. [4] に従い, このような不等式 (の系列) を (弱) 対数マジョリゼーションと呼び, 記号 $\prec_{w(\log)}$ で表そう. 上の結果と Trotter-Kato の指数積公式を組み合わせると, $\mathcal{H}$ 上の下に半有界な自己共役作用素 H, K に対して

$$\mu(e^{-(H+K)}) \prec_{w(\log)} \mu((e^{-rH/2} e^{-rK} e^{-rH/2})^{1/r}), \quad r > 0$$

が示される [14] (ただし $H+K$ は H, K の form sum). これは Golden-Thompson 不等式を対数マジョリゼーションに強化したものである. マジョリゼーション理論に関しては [2, 3, 18] 参照.

他方, 行列の場合で, Golden-Thompson のトレース不等式が (逆向きに) 補完できることが [16] で示されて, さらに [4] で対数マジョリゼーションにまで次のように強化された: A, B を正定値行列とすると, 任意の $0 < \alpha < 1$ と $p \geq q > 0$ に対して

$$\mu((A^p \#_{\alpha} B^p)^{1/p}) \prec_{w(\log)} \mu((A^q \#_{\alpha} B^q)^{1/q}) \quad (0.2)$$

(ただし $\#_{\alpha}$ は α -べき作用素平均). 上述の Golden-Thompson 型 (0.1) とその補完型 (0.2) の対数マジョリゼーションを使うと, 任意のエルミート行列 H, K とユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ に対して

$$\|(e^{-rH/(1-\alpha)} \#_{\alpha} e^{-rK/\alpha})^{1/r}\| \leq \|e^{H+K}\| \leq \|(e^{rH/2} e^{rK} e^{rH/2})^{1/r}\|, \quad r > 0$$

が導かれる. さらに $r \downarrow 0$ のとき, 上の左辺は単調増加に, 右辺は単調減少に $\|e^{H+K}\|$ に収束する.

本稿では, 無限次元の作用素の場合で Golden-Thompson の補完型の対数マジョリゼーションとノルム不等式を考察する. このために, 作用素平均に対する Trotter 型の指数積公式を [6] の方針で証明する. (行列に対するこの指数積公式は, べき級数展開して計算すれば容易である.)

本稿よりもっと総括的で詳しい論文 [15] が Banach Center Publications シリーズの “Linear Operators” で発表される予定である.

1 準備

この節で、いくつかの予備的な事項を解説する。

1.1 一般化された特異値

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は常に無限次元かつ可分とし、 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素の全体を $B(\mathcal{H})$ で表す。また $\mathcal{H}$ 上の有界な正 (定値) 作用素の全体を $B(\mathcal{H})_+$ で表す。任意の $A \in B(\mathcal{H})$ に対して、 A の一般化された特異値 $\mu_1(A) \geq \mu_2(A) \geq \dots$ を次のように定義する：

$$\mu_n(A) = \inf\{\lambda \geq 0 : \text{rank}(I - E_{|A|}(\lambda)) < n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ただし $|A| = \int_0^\infty \lambda dE_{|A|}(\lambda)$ は $|A|$ のスペクトル分解とする。したがって $I - E_{|A|}(\lambda)$ は、区間 (λ, ∞) に対応する A のスペクトル射影である。上の $\mu_n(A)$ は、von Neumann 環における可測作用素に対する一般化された s -numbers [7, 8] の定義を $B(\mathcal{H})$ の場合に当てはめたものである。 A がコンパクト作用素 (特に行列) のとき、 $\mu_n(A)$ は A の通常の特異値 (i.e. $|A|$ の固有値) を大きい順に重複度分ずつ並べたものである。

$\mu_\infty(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$ は A の本質的ノルム $\|A\|_e$ と一致する。したがって、 $\mu_\infty(A) = 0$ は A がコンパクトであることと同値であり、 $\mu_n(A) > \mu_\infty(A)$ のとき $\mu_n(A)$ は $|A|$ の重複度有限の固有値である。

$\mu_n(A)$ の基本性質については、von Neumann 環の場合で [8] が詳しい。

1.2 ユニタリー不変ノルムと対称ノルム作用素イデアル

無限実数列で 0 でない項が有限個だけであるものの全体からなる線型空間を s_{fin} で表す。 s_{fin} 上のノルム Φ が対称であるとは、 $\mathbb{N}$ の任意の置換 π と $\varepsilon_i = \pm 1$ に対して

$$\Phi(a_1, a_2, \dots) = \Phi(\varepsilon_1 a_{\pi(1)}, \varepsilon_2 a_{\pi(2)}, \dots)$$

が成立するときをいう。この条件は、 $(a_1^*, a_2^*, \dots)$ を $(|a_1|, |a_2|, \dots)$ の減少再配列とするとき

$$\Phi(a_1, a_2, \dots) = \Phi(a_1^*, a_2^*, \dots)$$

が成立するといっても同じである。 s_{fin} 上の対称ノルムは対称ゲージ関数とも呼ばれる。

$\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素の全体を $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ で表し、有限階の作用素の全体を $\mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ で表す。 $\mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ 上のノルム $\|\cdot\|$ は、任意の $A \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ と $\mathcal{H}$ 上の任意のユニタリー U, V に対して

$$\|UAV\| = \|A\|$$

が成立するとき、ユニタリー不変と呼ばれる。

次の基本定理は Schatten-von Neumann による [19]。

定理 1.3 対称ゲージ関数 Φ の全体と $\mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ 上のユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ の全体の間には、次の関係式で定まる一対一の対応が存在する：

$$\|A\| = \Phi(\mu_1(A), \mu_2(A), \dots), \quad A \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H}).$$

さらに、 $\mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ 上のノルム $\|\cdot\|$ がユニタリー不変ならば、任意の $A \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ と $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\|XAY\| \leq \|X\|_{\infty} \|Y\|_{\infty} \|A\|$$

が成立する。ただし $\|\cdot\|_{\infty}$ は作用素ノルム。

Φ を対称ゲージ関数とする。有界な実数列 $a = (a_1, a_2, \dots)$ に対して

$$\Phi(a) = \sup_n \Phi(a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) \in [0, \infty]$$

と定める。 $\Phi(a) < \infty$ である有界な実数列の全体 s_{Φ} は、ノルム Φ により Banach 空間となる。 $s_{\Phi}^{(0)}$ を s_{Φ} における s_{fin} の閉包とする。 Φ に対応する $\mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ 上のユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ は、 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 全体に次のように拡張される：任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\|A\| = \sup_n \Phi(\mu_1(A), \dots, \mu_n(A), 0, 0, \dots) \in [0, \infty]. \quad (1.1)$$

$\|A\| < \infty$, i.e. $\mu(A) = (\mu_1(A), \mu_2(A), \dots) \in s_{\Phi}$ である $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の全体を $\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ で表す。さらに、 $\mu(A) \in s_{\Phi}^{(0)}$ である $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の全体を $\mathcal{C}_{\Phi}^{(0)}(\mathcal{H})$ で表す。

定理 1.4 (1) $\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$, $\mathcal{C}_{\Phi}^{(0)}(\mathcal{H})$ は共に、ノルム (1.1) により Banach 空間であり、 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の両側イデアルである。

(2) $\mathcal{C}_{\Phi}^{(0)}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ における $\mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ の閉包であり $\mathcal{C}_{\Phi}^{(0)}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H})$ 。

(3) Φ が ℓ_{∞} -ノルムと非同値ならば $\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{H})$ 。

Banach 空間 $\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H})$ および $\mathcal{C}_{\Phi}^{(0)}(\mathcal{H})$ は対称ノルム (作用素) イデアルと呼ばれる。 $s_{\Phi} = s_{\Phi}^{(0)}$ すなわち $\mathcal{C}_{\Phi}(\mathcal{H}) = \mathcal{C}_{\Phi}^{(0)}(\mathcal{H})$ のとき、 Φ は正規であるという。例えば、 $1 \leq p \leq \infty$ として、 Φ_p を ℓ_p -ノルムとし、 $\|\cdot\|_p$ を対応するユニタリー不変ノルムとする。 $1 \leq p < \infty$ のとき、 $\mathcal{C}_{\Phi_p}(\mathcal{H})$ が Schatten p -クラス $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ であり、特に $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ がトレース・クラス、 $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ が Hilbert-Schmidt クラスである。また $p = \infty$ のとき、 $\mathcal{C}_{\Phi_{\infty}}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ かつ $\mathcal{C}_{\Phi_{\infty}}^{(0)}(\mathcal{H}) = \mathcal{C}(\mathcal{H})$ 。一般の $0 < p < \infty$ に対して、 p -クラス $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ を

$$\|A\|_p = (\text{tr } |A|^p)^{1/p} = \left\{ \sum_i \mu_i(A)^p \right\}^{1/p} < \infty$$

である $A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ の全体として定義できる。しかし $0 < p < 1$ のときは、 $\|\cdot\|_p$ はノルムでなく、擬ノルムとなる。 $0 < p < q \leq \infty$ ならば、 $\|A\|_p \geq \|A\|_q$ かつ $\mathcal{C}_p(\mathcal{H}) \subset \mathcal{C}_q(\mathcal{H})$ であることに注意する。

対称ゲージ関数 Φ に対応して、 $\Phi' : s_{\text{fin}} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\Phi'(b_1, b_2, \dots) = \sup \left\{ \sum_n a_n b_n : a \in s_{\text{fin}}, \Phi(a) \leq 1 \right\}$$

と定めると、 Φ' は再び対称ゲージ関数となる。 Φ' は Φ の双対と呼ばれ、 $\Phi'' = \Phi$ となる。例えば、 $1 \leq p \leq \infty$ かつ $1/p + 1/q = 1$ のとき、 ℓ_p -ノルムと ℓ_q -ノルムは互いに双対である。 Φ, Φ' に対応するノルムをそれぞれ $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ とすると、任意の $A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ と $B \in \mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H})$ に対して、 $AB \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ であり、次の一般化された Hölder 不等式が成立する：

$$\|AB\|_1 \leq \|A\| \|B\|'.$$

定理 1.5 Φ, Φ' を双対の対称ゲージ関数とすると、 $\mathcal{C}_\Phi^{(0)}(\mathcal{H})$ の双対 Banach 空間 $\mathcal{C}_\Phi^{(0)}(\mathcal{H})^*$ は、duality $(A, B) \in \mathcal{C}_\Phi^{(0)}(\mathcal{H}) \times \mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H}) \mapsto \text{tr}(AB)$ により、 $\mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H})$ に等距離同型である。ここで tr は $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ 上の通常のトレースとする。

例えば $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})^* \cong \mathcal{B}(\mathcal{H})$ であり、 $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ のとき $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})^* \cong \mathcal{C}_q(\mathcal{H})$ である。上定理より、 Φ が正規ならば $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})^* \cong \mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H})$ 。また、 $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ が回帰的であることは、 Φ と Φ' が共に正規であることと同値である。

対称ノルム・イデアルについては [13, 20] が詳しい。

1.6 対数マジョリゼーション

$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0, b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq 0$ である無限数列 $a = (a_1, a_2, \dots), b = (b_1, b_2, \dots)$ について、(弱)マジョリゼーション $a \prec_w b$ は

$$\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i, \quad k \in \mathbb{N}$$

を意味する。また、(弱)対数マジョリゼーション $a \prec_{w(\log)} b$ は

$$\prod_{i=1}^k a_i \leq \prod_{i=1}^k b_i, \quad k \in \mathbb{N}$$

を意味する。

行列や作用素の(一般化)された特異値(また固有値)に対して、各種の(対数)マジョリゼーションが知られている。これらは、作用素のトレース不等式やノルム不等式を導くための強力な武器となっている。次の命題はこの状況をよく説明している。

命題 1.7 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ とし、一般化された特異値の列を $\mu(A), \mu(B)$ とする。このとき、以下の条件について、次が成立する：

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v).$$

(i) $\mu(A) \prec_{w(\log)} \mu(B)$;

(ii) 任意のユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ と $f(0) \geq 0$ で $f(e^x)$ が凸である $[0, \infty)$ 上の任意の連続な単調増加関数 f に対して、 $\|f(|A|)\| \leq \|f(|B|)\|$;

(iii) $\mu(A) \prec_w \mu(B)$;

(iv) 任意のユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ に対して $\|A\| \leq \|B\|$;

(v) 任意のユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ と $f(0) \geq 0$ である $[0, \infty)$ 上の任意の単調増加な凸関数 f に対して、 $\|f(|A|)\| \leq \|f(|B|)\|$ 。

1.8 反対称テンソル積

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathcal{H}$ 自身の n -重テンソル積 Hilbert 空間を $\otimes^n \mathcal{H}$ で表す. $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{H}$ に対して, $\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n \in \otimes^n \mathcal{H}$ を

$$\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\pi} (\text{sign } \pi) \xi_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes \xi_{\pi(n)}$$

と定める. ここで π は $\{1, \dots, n\}$ の置換全体にわたり, π の偶奇に応じて $\text{sign } \pi = \pm 1$ とする. $\{\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n : \xi_i \in \mathcal{H}\}$ で張られる $\otimes^n \mathcal{H}$ の閉部分空間を $\mathcal{H}$ の n -重反対称テンソル積と呼び, $\Lambda^n \mathcal{H}$ で表す. 実際, $\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_n \mapsto \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n$ の線型拡張が $\otimes^n \mathcal{H}$ から $\Lambda^n \mathcal{H}$ の上への射影である. $\{\varphi_i\}$ が $\mathcal{H}$ の正規直交基底のとき, $\{\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_n} : i_1 < \dots < i_n\}$ が $\Lambda^n \mathcal{H}$ の正規直交基底となる.

任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して, n -重テンソル積 $\otimes^n A \in \mathcal{B}(\otimes^n \mathcal{H})$ が $\Lambda^n \mathcal{H}$ を不変にするから, A の反対称テンソル積 $\Lambda^n A$ を $\Lambda^n A = \otimes^n A|_{\Lambda^n \mathcal{H}}$ として定義できる. つまり

$$(\Lambda^n A)(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n) = A\xi_1 \wedge \dots \wedge A\xi_n.$$

$\dim \mathcal{H} = N < \infty$ のとき, $\Lambda^N \mathcal{H} = \mathbb{C}$, $\Lambda^N A = \det A$ であり, $n > N$ なら $\Lambda^n \mathcal{H} = \{0\}$.

次は, 作用素の反対称テンソル積の簡単な性質である.

補題 1.9 $X, Y, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$ のとき,

- (1) $\Lambda^n(X^*) = (\Lambda^n X)^*$.
- (2) $\Lambda^n(XY) = (\Lambda^n X)(\Lambda^n Y)$.
- (3) $A \geq 0$ のとき, $\Lambda^n A \geq 0$ であり, 任意の $p > 0$ に対して $\Lambda^n(A^p) = (\Lambda^n A)^p$.
- (4) $\Lambda^n(|X|) = |\Lambda^n X|$.

次の補題は, 作用素の対数マジョリゼーションを示す際に有用な働きをする.

補題 1.10 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\prod_{i=1}^n \mu_i(A) = \mu_1(\Lambda^n A) (= \|\Lambda^n A\|_{\infty}).$$

1.11 作用素平均

作用素平均に関する公理的な研究は久保-安藤 [17] による. 2 項演算 $\sigma : \mathcal{B}(\mathcal{H})_+ \times \mathcal{B}(\mathcal{H})_+ \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が作用素結合であるとは, 次の条件 (i)–(iii) が $A, B, C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ に対して成立するときをいう:

- (i) $A \leq C$ かつ $B \leq D$ ならば $A\sigma B \leq C\sigma D$ (両単調性),
- (ii) $C(A\sigma B)C \leq (CAC)\sigma(CBC)$ (トランス不等式),
- (iii) $A_n, B_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$, $A_n \downarrow A$, $B_n \downarrow B$ ならば $A_n\sigma B_n \downarrow A\sigma B$ (上半連続性).

作用素結合 σ は, さらに次を満たすとき, 作用素平均と呼ばれる:

- (iv) $I\sigma I = I$.

久保-安藤の基本定理は次のように述べられる： 任意の作用素結合 σ に対して， $[0, \infty)$ 上の作用素単調関数 $f \geq 0$ が一意的に存在して $f(x)I = I\sigma(xI)$, $x \geq 0$, が成立する．写像 $\sigma \mapsto f$ は，作用素結合の全体と $[0, \infty)$ 上の非負の作用素単調関数の全体との間の，アフィン順序同型である．作用素結合 σ は，作用素単調関数 f を用いて， A が可逆のとき

$$A\sigma B = A^{1/2}f(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2} \quad (1.2)$$

と定められる．一般の A, B に対しては

$$A\sigma B = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} A_\varepsilon^{1/2}f(A_\varepsilon^{-1/2}B_\varepsilon A_\varepsilon^{-1/2})A_\varepsilon^{1/2} \quad (\text{単調減少})$$

と与えられる．ここで $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$, $B_\varepsilon = B + \varepsilon I$. さらに， σ が作用素平均であるためには， $f(1) = 1$ が必要十分であり，このとき，すべての A に対し $A\sigma A = A$.

作用素平均の典型的な例としては，算術平均 $A \nabla B = \frac{1}{2}(A + B)$, 調和平均 $A!B$, 幾何平均 $A \# B$ などがある．

各 $0 \leq \alpha \leq 1$ に対し， α -べき平均を $\#_\alpha$ で表す．これは，作用素単調関数 x^α に対応する作用素平均である．つまり， $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ で A が可逆のとき， $A \#_\alpha B$ は

$$A \#_\alpha B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\alpha A^{1/2}$$

と定義される． $A \#_0 B = A$, $A \#_1 B = B$, $A \#_{1/2} B = A \# B$ に注意する．

σ を作用素平均とする．対応する作用素単調関数 f は $(0, \infty)$ で無限回微分可能となる．そこで， $\alpha = f'(1)$ とおくと， f の凹性から， $0 \leq \alpha \leq 1$ であり， $x \geq 0$ で $f(x) \leq (1 - \alpha) + \alpha x$ が成立する．さらに $f(x^{-1})^{-1}$ も作用素単調であり，よって凹関数であるから，次が成立する：

$$\frac{x}{(1 - \alpha)x + \alpha} \leq f(x) \leq (1 - \alpha) + \alpha x, \quad x \geq 0. \quad (1.3)$$

特に σ が対称 (すべての A, B に対して $A\sigma B = B\sigma A$)，つまり $f(x) = xf(x^{-1})$ のとき， $\alpha = 1/2$ となるから，(1.3) は，対称作用素平均の中で算術平均が最大で，調和平均が最小であることを主張している．

作用素平均の収束に関して次が成立する．

補題 1.12 σ を作用素単調関数 f に対応する作用素平均とし， $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ とする．

- (1) A が可逆のとき， $B \mapsto A\sigma B$ は $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ 上で作用素ノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関して連続である．
- (2) $f(0) = 0$ で B がコンパクトとするととき， $A_n \downarrow A$ ならば $\|A_n\sigma B - A\sigma B\|_\infty \rightarrow 0$.

証明 (1) は表示 (1.2) より明らか．

(2) $A_n \leq aI$ となる $a > 0$ をとると， $A_n\sigma B \leq (aI)\sigma B = af(a^{-1}B)$ であり， $f(0) = 0$ より $af(a^{-1}B) \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. また $A_n\sigma B \downarrow A\sigma B$. ゆえに，有界収束定理 ([20, Theorem 2.16]) より結論を得る． ■

2 ベキ作用素平均に対する対数マジョリゼーション

次の対数マジョリゼーションは, A, B が行列のときに [4] で与えられた.

定理 2.1 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ とし, A が可逆またはコンパクトならば

$$\mu(A^r \#_{\alpha} B^r) \prec_{w(\log)} \mu((A \#_{\alpha} B)^r), \quad r \geq 1. \quad (2.1)$$

したがって

$$\mu((A^p \#_{\alpha} B^p)^{1/p}) \prec_{w(\log)} \mu((A^q \#_{\alpha} B^q)^{1/q}), \quad p \geq q > 0. \quad (2.2)$$

証明 まず A, B 共に可逆とすると, (2.1) は [4, Theorem 2.1] と全く同様に証明できる. 次に, A が可逆で, B が一般とする. $B_{\varepsilon} = B + \varepsilon I$ とすると, 補題 1.12(1) より, 作用素ノルムで

$$A^r \#_{\alpha} B^r = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} A^r \#_{\alpha} B_{\varepsilon}^r \quad \text{かつ} \quad (A \#_{\alpha} B)^r = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (A \#_{\alpha} B_{\varepsilon})^r$$

である. よって最初の場合から, (2.1) が得られる. 最後に, A がコンパクトとすると, 2 番目の場合から

$$\mu(B_{\varepsilon}^r \#_{1-\alpha} A^r) \prec_{w(\log)} \mu((B_{\varepsilon} \#_{1-\alpha} A)^r), \quad r \geq 1, \varepsilon > 0.$$

補題 1.12(2) より, 作用素ノルムで $B_{\varepsilon} \#_{1-\alpha} A \rightarrow B \#_{1-\alpha} A$ かつ $B_{\varepsilon}^r \#_{1-\alpha} A^r \rightarrow B^r \#_{1-\alpha} A^r$ であるから

$$\mu(B^r \#_{1-\alpha} A^r) \prec_{w(\log)} \mu((B \#_{1-\alpha} A)^r), \quad r \geq 1$$

となるが, これは (2.1) に他ならない. さらに, (2.1) で A, B を A^p, B^p に置き換えて, $r = q/p$ とおけば, (2.2) が得られる. ■

前定理と命題 1.7 より

系 2.2 $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ とし, A が可逆またはコンパクトとする. $\|\cdot\|$ を任意のユニタリー不変ノルムとすると, $f(0) \geq 0$ かつ $f(e^x)$ が凸である $[0, \infty)$ 上の任意の連続な単調増加関数 f に対して

$$\|f(A^r \#_{\alpha} B^r)\| \leq \|f((A \#_{\alpha} B)^r)\|, \quad r \geq 1.$$

特に

$$\|A^r \#_{\alpha} B^r\| \leq \|(A \#_{\alpha} B)^r\|, \quad r \geq 1.$$

注意 2.3 定理 2.1 (よって系 2.2) を A が可逆またはコンパクトの仮定なしに証明したいところである. もし $\|A \#_{\alpha} B\|_{\infty} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|(A + \varepsilon I) \#_{\alpha} B\|_{\infty}$ が一般の $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ について成立するならば, これは可能である. しかし, 任意の $0 < \delta < 1$ に対して, $\ker A = \ker B = \{0\}$ である $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ で

$$\|A \# B\|_{\infty} \leq \delta < 1 \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|(A + \varepsilon I) \# B\|_{\infty}$$

となるものが存在する.

次の命題は [1, Theorem 1] の拡張である. [1] では H, K が有界で $\alpha = 1/2$ の場合を扱っている.

命題 2.4 $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は自己共役であり, K は下に半有界な $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とするとき, 次の条件は同値である:

- (i) $(1-\alpha)H + \alpha K \geq 0$;
- (ii) すべての $t \geq 0$ に対して $e^{-tH} \#_{\alpha} e^{-tK} \leq I$;
- (iii) $t \mapsto e^{-tH} \#_{\alpha} e^{-tK}$ が $[0, \infty)$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ への (正定値性による順序での) 減少関数.

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii). $(1-\alpha)H + \alpha K \geq 0$, i.e. $K \geq -\alpha^{-1}(1-\alpha)H$ とする. $r \downarrow 0$ のとき (2.2) より $\|e^{-rH} \#_{\alpha} e^{-rK}\|_{\infty}^{1/r} = \|(e^{-rH} \#_{\alpha} e^{-rK})^{1/r}\|_{\infty}$ が増加するから, (ii) を示すには

$$\lim_{r \downarrow 0} \|(e^{-rH} \#_{\alpha} e^{-rK})^{1/r}\|_{\infty} \leq 1 \quad (2.3)$$

を証明すればよい. $0 < r < \alpha\{(1-\alpha)\|H\|_{\infty}\}^{-1}$ のとき, $I + rK \geq I - \alpha^{-1}(1-\alpha)rH \geq 0$ で $I - \alpha^{-1}(1-\alpha)rH$ が可逆であるから

$$e^{-rK} \leq (I + rK)^{-1} \leq \left(I - \frac{1-\alpha}{\alpha}rH\right)^{-1}.$$

また $e^{-rH} \leq (I + rH)^{-1}$. ゆえに

$$\begin{aligned} e^{-rH} \#_{\alpha} e^{-rK} &\leq (I + rH)^{-1} \#_{\alpha} \left(I - \frac{1-\alpha}{\alpha}rH\right)^{-1} \\ &= (I + rH)^{-(1-\alpha)} \left(I - \frac{1-\alpha}{\alpha}rH\right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

となり

$$\|(e^{-rH} \#_{\alpha} e^{-rK})^{1/r}\|_{\infty} \leq \|(I + rH)^{-(1-\alpha)/r} \left(I - \frac{1-\alpha}{\alpha}rH\right)^{-\alpha/r}\|_{\infty}.$$

ところで, $\lambda \in [-\|H\|_{\infty}, \|H\|_{\infty}]$ について一様に

$$\lim_{r \downarrow 0} (1 + r\lambda)^{-(1-\alpha)/r} \left(1 - \frac{1-\alpha}{\alpha}r\lambda\right)^{-\alpha/r} = (e^{\lambda})^{-(1-\alpha)} (e^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}\lambda})^{-\alpha} = 1$$

であるから

$$\lim_{r \downarrow 0} \|(I + rH)^{-(1-\alpha)/r} \left(I - \frac{1-\alpha}{\alpha}rH\right)^{-\alpha/r} - I\|_{\infty} = 0$$

がいえる. よって (2.3) が成立する.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). 次のことを証明すればよい: $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ で A が可逆のとき, $A \#_{\alpha} B \leq I$ ならば, 任意の $r \geq 1$ に対して $A^r \#_{\alpha} B^r \leq A \#_{\alpha} B$. A, B 共に可逆のとき, これは [4, Theorem 2.1] の証明の中で示されている. A が可逆で B が一般のとき, $B_{\varepsilon} = B + \varepsilon I$ とおくと

$$A \#_{\alpha} (\|A \#_{\alpha} B_{\varepsilon}\|_{\infty}^{-1/\alpha} B_{\varepsilon}) = \|A \#_{\alpha} B_{\varepsilon}\|_{\infty}^{-1} (A \#_{\alpha} B_{\varepsilon}) \leq I$$

である. A と $\|A \#_{\alpha} B_{\varepsilon}\|_{\infty}^{-1/\alpha} B_{\varepsilon}$ に最初の場合を適用すれば, $r \geq 1$ に対して

$$A^r \#_{\alpha} B_{\varepsilon}^r \leq \|A \#_{\alpha} B_{\varepsilon}\|_{\infty}^{r-1} (A \#_{\alpha} B_{\varepsilon}).$$

$\varepsilon \downarrow 0$ とすると, 補題 1.12(1) より

$$A^r \#_{\alpha} B^r \leq \|A \#_{\alpha} B\|_{\infty}^{r-1} (A \#_{\alpha} B) \leq A \#_{\alpha} B$$

がいえ.

(iii) $\Rightarrow$ (i). 任意の $\varepsilon > 0$ と $t > 0$ に対して, (1.3) より

$$\begin{aligned} e^{-tH} \#_{\alpha} (e^{-tK} + \varepsilon I) &= e^{-tH/2} \{e^{tH/2} (e^{-tK} + \varepsilon I) e^{tH/2}\}^{\alpha} e^{-tH/2} \\ &\geq e^{-tH/2} \{(1-\alpha)I + \alpha e^{-tH/2} (e^{-tK} + \varepsilon I)^{-1} e^{-tH/2}\}^{-1} e^{-tH/2} \\ &\geq e^{-tH/2} \{(1-\alpha)I + \alpha e^{-tH/2} e^{tK} e^{-tH/2}\}^{-1} e^{-tH/2} \\ &= \{(1-\alpha)e^{tH} + \alpha e^{tK}\}^{-1}. \end{aligned}$$

よって $e^{-tH} \#_{\alpha} e^{-tK} \geq \{(1-\alpha)e^{tH} + \alpha e^{tK}\}^{-1}$ となり, (iii) から $(1-\alpha)e^{tH} + \alpha e^{tK} \geq I$ がすべての $t > 0$ に対して成立する. したがって, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\alpha n(e^{K/n} - I) \geq -(1-\alpha)n(e^{H/n} - I). \quad (2.4)$$

スペクトル分解 $K = \int_b^{\infty} \lambda dE_K(\lambda)$ を用いて, 任意の $\xi \in E_K(c)\mathcal{H}$ (ただし $b < c < \infty$) に対して, (2.4) より

$$\alpha \int_b^c n(e^{\lambda/n} - 1) d\|E_K(\lambda)\xi\|^2 \geq -(1-\alpha)\langle n(e^{H/n} - I)\xi, \xi \rangle.$$

上の左辺は $n \rightarrow \infty$ のとき $\alpha \int_b^c \lambda d\|E_K(\lambda)\xi\|^2 = \alpha \langle K\xi, \xi \rangle$ に収束し, 右辺は $-(1-\alpha)\langle H\xi, \xi \rangle$ に収束する. したがって $\langle ((1-\alpha)H + \alpha K)\xi, \xi \rangle \geq 0$. $\cup_{c>b} E_K(c)\mathcal{H}$ が $(1-\alpha)H + \alpha K$ のコアだから, (i) が成立する. ■

注意 2.5 フルタ不等式 [10] を用いて, 可逆な正作用素に対してもっと一般的な結果が [11] (また [9]) で示されている: $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が可逆のとき, 例えば次の条件は同値である:

(I) $\log A \geq \log B$;

(II) すべての $p, r \geq 0$ に対して $A^r \geq (A^{r/2} B^p A^{r/2})^{\frac{r}{p+r}}$;

(III) 任意の $t \geq 0$ に対して, $A^{-r}(A^r B^p A^r)^{\frac{1+t}{p+2r}} A^{-r}$ が $p \geq t$ と $r \geq 0$ の両変数について $\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ への減少関数.

$\alpha = r/(p+r)$ とおくと, 上の (II) は $A^{-r} \#_{\alpha} B^{\frac{1-\alpha}{\alpha}r} \leq I$ がすべての $r \geq 0$ と $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して成立することを意味する. したがって, (I) $\Leftrightarrow$ (II) は命題 2.4 の (i) $\Leftrightarrow$ (ii) に他ならない.

注意 2.6 最近, 古田 [12] はフルタ不等式を拡張する次のような不等式を証明している: $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が $A \geq B \geq 0$ で A が可逆のとき, 任意の $0 \leq t \leq 1, p \geq 1, r \geq t, s \geq 1$ に対して

$$A^{1-t+r} \geq \{A^{r/2}(A^{-t/2} B^p A^{-t/2})^s A^{r/2}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}}.$$

さらに, 任意の $0 \leq t \leq 1$ と $p \geq 1$ に対して

$$(r, s) \mapsto A^{-r/2} \{A^{r/2} (A^{-t/2} B^p A^{-t/2})^s A^{r/2}\}^{\frac{1-t+r}{(p-t)s+r}} A^{-r/2}$$

は $r \geq t$ と $s \geq 1$ の両変数についての減少関数である.

上の不等式から, 定理 2.1 を拡張する多くの対数マジョリゼーションが得られる [12]. 例えば, $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ で A が可逆またはコンパクトならば, 任意の $0 \leq \alpha \leq 1$ と $r, s \geq 1$ に対して

$$\mu(A^r \#_{\alpha q/s} B^s) \prec_{w(\log)} \mu((A \#_{\alpha} B)^q),$$

ただし $q = ((1 - \alpha)r^{-1} + \alpha s^{-1})^{-1}$.

ここで, 反対称テンソル積の加法的類似を導入しよう. 下に半有界な $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 K に対して, 下に半有界な $\Lambda^n \mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 $\Sigma^n K$ を

$$\Sigma^n K = \sum_{m=1}^n \{(\otimes^{m-1} I) \otimes K \otimes (\otimes^{n-m} I)\} \Big|_{\Lambda^n \mathcal{H}}$$

と定める. もっと正確には, 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して

$$\sum_{m=1}^n (\otimes^{m-1} I) \otimes A \otimes (\otimes^{n-m} I) \quad (2.5)$$

が $\otimes^n \mathcal{H}$ から $\Lambda^n \mathcal{H}$ 上への射影と可換だから, $\Sigma^n A$ を (2.5) の $\Lambda^n \mathcal{H}$ への制限として定義できる. スペクトル分解 $K = \int_a^\infty \lambda dE_K(\lambda)$ をとり $K_k = \int_a^k \lambda dE_K(\lambda)$ とおくと, $\{\Sigma^n K_k\}_{k=1}^\infty$ は $\mathcal{B}(\Lambda^n \mathcal{H})$ の (互いに可換な) 自己共役作用素の増大列となる. この極限作用素として $\Sigma^n K$ が定義できる.

補題 2.7 $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が自己共役とし, K が下に半有界な $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. このとき

- (1) $\Lambda^n(e^{-K}) = e^{-\Sigma^n K}$.
- (2) $\Sigma^n(H + K) = (\Sigma^n H) + (\Sigma^n K)$.

証明 (1) $K \geq 0$ として十分である. K が有界ならば

$$\begin{aligned} e^{-\Sigma^n K} &= \prod_{m=1}^n \{(\otimes^{m-1} I) \otimes e^{-K} \otimes (\otimes^{n-m} I)\} \Big|_{\Lambda^n \mathcal{H}} \\ &= \otimes^n e^{-K} \Big|_{\Lambda^n \mathcal{H}} = \Lambda^n(e^{-K}). \end{aligned}$$

一般の $K \geq 0$ については, $K_k = \int_0^k \lambda dE_K(\lambda)$ とすると, $I \geq (I + K_k)^{-1} \downarrow (I + K)^{-1}$ ($k \rightarrow \infty$). e^{-K} が $f(x) = \exp(1 - x^{-1})$ ($0 \leq x \leq 1$) による $(I + H)^{-1}$ の functional calculus であることに注意すれば, $e^{-K_k} \rightarrow e^{-K}$ (SOT) がいえる. ゆえに $\Lambda^n(e^{-K_k}) \rightarrow \Lambda^n(e^{-K})$ (SOT). 同様に $e^{-\Sigma^n K_k} \rightarrow e^{-\Sigma^n K}$ (SOT). したがって結論を得る.

(2) は明らかであろう. ■

定理 2.8 $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が自己共役とし, K が下に半有界な $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とするとき

$$(e^{-rH} \#_{\alpha} e^{-rK})^{1/r} \prec_{w(\log)} e^{-((1-\alpha)H + \alpha K)}, \quad r > 0.$$

証明 補題 1.9 と補題 2.7 より

$$\begin{aligned} \Lambda^n((e^{-rH} \#_{\alpha} e^{-rK})^{1/r}) &= (\Lambda^n(e^{-rH}) \#_{\alpha} \Lambda^n(e^{-rK}))^{1/r} \\ &= (e^{-r\Sigma^n H} \#_{\alpha} e^{-r\Sigma^n K})^{1/r}, \end{aligned}$$

$$\Lambda^n(e^{-((1-\alpha)H + \alpha K)}) = e^{-((1-\alpha)\Sigma^n H + \alpha\Sigma^n K)}.$$

したがって, 補題 1.10 より, 次を示せば十分である:

$$\|(e^{-rH} \#_{\alpha} e^{-rK})^{1/r}\|_{\infty} \leq \|e^{-((1-\alpha)H + \alpha K)}\|_{\infty}.$$

ゆえに, $e^{-((1-\alpha)H + \alpha K)} \leq I$, i.e. $(1-\alpha)H + \alpha K \geq 0$ ならば, すべての $r > 0$ に対して $e^{-rH} \#_{\alpha} e^{-rK} \leq I$ であることをいえばよい. これは命題 2.4 の (i) $\Rightarrow$ (ii) のことである. ■

3 作用素平均に対する指数積公式

次の定理は作用素平均に対する Trotter 型の指数積公式である.

定理 3.1 σ を作用素平均とし, 対応する作用素単調関数 f について $\alpha = f'(1)$ とする. $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が自己共役とし, K が下に半有界な $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とするとき

$$\text{s-lim}_{r \downarrow 0} (e^{-rtH} \sigma e^{-rtK})^{1/r} = e^{-t((1-\alpha)H + \alpha K)}, \quad t > 0.$$

任意の $0 < a < b$ に対して, 上の収束は $t \in [a, b]$ で一様である. (ただし s-lim は SOT による収束を表す.)

定理の証明はいくつかの補題に分けられる.

補題 3.2 $G(t), G_1(t), G_2(t)$ が $[0, \infty)$ から $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ への SOT-連続な関数とする. 任意の $t \geq 0$ に対して $G(t), G_1(t), G_2(t)$ が互いに可換であり, ある $a \geq 0$ に対して

$$0 \leq G_1(t) \leq G(t) \leq G_2(t) \leq e^{at}I, \quad t \geq 0$$

が成立しているとする. S が $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素であり, $\mathcal{D}$ が S のコアとする. このとき, もし

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| \frac{G_i(t) - I}{t} \xi + S\xi \right\| = 0, \quad \xi \in \mathcal{D}, i = 1, 2$$

ならば

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| \frac{G(t) - I}{t} \xi + S\xi \right\| = 0, \quad \xi \in \mathcal{D}.$$

証明 $G(t), G_1(t), G_2(t)$ の代わりにそれぞれに e^{-at} を掛けたものを取り, S を $S + aI$ に置き換えればよいから, $a = 0$ の場合を示せば十分である. $\xi \in \mathcal{D}$ とする. 仮定より

$$0 \leq \frac{I - G_2(t)}{t} \leq \frac{I - G(t)}{t} \leq \frac{I - G_1(t)}{t}$$

だから,

$$\left\langle \frac{I - G_2(t)}{t} \xi, \xi \right\rangle \leq \left\langle \frac{I - G(t)}{t} \xi, \xi \right\rangle \leq \left\langle \frac{I - G_1(t)}{t} \xi, \xi \right\rangle.$$

これより, $t \downarrow 0$ のとき $\langle t^{-1}(I - G(t))\xi, \xi \rangle \rightarrow \langle S\xi, \xi \rangle$. よって, polarization より

$$\left\langle \frac{I - G(t)}{t} \xi, \eta \right\rangle \rightarrow \langle S\xi, \eta \rangle, \quad \eta \in \mathcal{D}. \quad (3.1)$$

さらに, $G(t), G_1(t), G_2(t)$ の可換性より

$$\left(\frac{I - G_2(t)}{t} \right)^2 \leq \left(\frac{I - G(t)}{t} \right)^2 \leq \left(\frac{I - G_1(t)}{t} \right)^2$$

もいえて

$$\left\| \frac{I - G_2(t)}{t} \xi \right\| \leq \left\| \frac{I - G(t)}{t} \xi \right\| \leq \left\| \frac{I - G_1(t)}{t} \xi \right\|.$$

ゆえに $\|t^{-1}(I - G(t))\xi\| \rightarrow \|S\xi\|$ であり, $t^{-1}(I - G(t))\xi, t > 0$, は有界となる. これと (3.1) から, $t^{-1}(I - G(t))\xi \rightarrow S\xi$ (弱収束) がわかる. したがって

$$\begin{aligned} \left\| \frac{I - G(t)}{t} \xi - S\xi \right\|^2 &= \left\| \frac{I - G(t)}{t} \xi \right\|^2 - 2\operatorname{Re} \left\langle \frac{I - G(t)}{t} \xi, S\xi \right\rangle + \|S\xi\|^2 \\ &\rightarrow \|S\xi\|^2 - 2\langle S\xi, S\xi \rangle + \|S\xi\|^2 = 0 \end{aligned}$$

となり, 結論を得る. ■

定理 3.1 の H, K に対して

$$F(t) = e^{-tH} \sigma e^{-tK}, \quad t \geq 0$$

と定義する. $L = (1 - \alpha)H + \alpha K$ とし, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(K)$ とおくと, $\mathcal{D}$ は L の定義域である. このとき

補題 3.3

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| \frac{F(t) - I}{t} \xi + L\xi \right\| = 0, \quad \xi \in \mathcal{D}.$$

証明 $H \leq aI$ かつ $K + aI \geq 0$ となる $a > 0$ を選ぶ. $t \geq 0$ に対して $A(t) = e^{tH/2} e^{-tK} e^{tH/2}$ と定めると, $F(t) = e^{-tH/2} f(A(t)) e^{-tH/2}$ となり

$$\begin{aligned} \frac{F(t) - I}{t} \xi &= e^{-tH/2} f(A(t)) \frac{e^{-tH/2} - I}{t} \xi \\ &\quad + e^{-tH/2} \frac{f(A(t)) - I}{t} \xi + \frac{e^{-tH/2} - I}{t} \xi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$A(t) \rightarrow I$ (SOT) だから $f(A(t)) \rightarrow I$ (SOT). よって (3.2) の右辺の第 2, 3 項は $t \downarrow 0$ のとき $(-H/2)\xi$ に強収束する. したがって, 残りは

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| \frac{f(A(t)) - I}{t} \xi + \alpha(K - H)\xi \right\| = 0, \quad \xi \in \mathcal{D} \quad (3.3)$$

を証明すればよい. そこで $G(t) = f(A(t))$, $G_1(t) = A(t)((1 - \alpha)A(t) + \alpha I)^{-1}$, $G_2(t) = (1 - \alpha)I + \alpha A(t)$ と定める. これらは, 任意の $t \geq 0$ に対して互いに可換であり, (1.3) より $0 \leq G_1(t) \leq G(t) \leq G_2(t)$ かつ $G_2(t) \leq e^{2at}I$. ゆえに, 補題 3.2 が適用できる. 次は容易に確かめられる:

$$\left\| \frac{G_2(t) - I}{t} \xi + \alpha(K - H)\xi \right\| = \alpha \left\| \frac{A(t) - I}{t} \xi + (K - H)\xi \right\| \rightarrow 0.$$

さらに

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{G_1(t) - I}{t} \xi + \alpha(K - H)\xi \right\| \\ & \leq \left\| ((1 - \alpha)A(t) + \alpha I)^{-1} \left\{ \frac{A(t) - ((1 - \alpha)A(t) + \alpha I)}{t} \xi + \alpha(K - H)\xi \right\} \right\| \\ & \quad + \left\| \{((1 - \alpha)A(t) + \alpha I)^{-1} - I\} \alpha(K - H)\xi \right\| \\ & \leq \left\| \frac{A(t) - I}{t} \xi + (K - H)\xi \right\| + (1 - \alpha) \|(A(t) - I)(K - H)\xi\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

上で $\|((1 - \alpha)A(t) + \alpha I)^{-1}\|_\infty \leq \alpha^{-1}$ を用いた. よって補題 3.2 より (3.3) が従う. ■

定理を証明するには, $H + \alpha I, K + \alpha I$ をとればよいから $H, K \geq 0$ と仮定してよい. このとき, すべての $t \geq 0$ に対して $0 \leq F(t) \leq I$. 以下, [6] の方針で進む. $0 < s_n \rightarrow \infty$ となる列 $\{s_n\}$ を任意に固定し, $L_n = s_n(I - F(s_n^{-1}))$ と定めると, $L_n \geq 0$. このとき, 補題 3.3 は $\|(L - L_n)\xi\| \rightarrow 0$ がすべての $\xi \in \mathcal{D}$ について成立することを主張している.

補題 3.4 $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (F(s_n^{-1})^{s_n} - e^{-L_n}) = 0$.

証明 任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{aligned} \|F(s_n^{-1})^{s_n} \xi - e^{-L_n} \xi\| &= \left\| F(s_n^{-1})^{s_n} \xi - e^{-s_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_n^k}{k!} F(s_n^{-1})^k \xi \right\| \\ &\leq e^{-s_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_n^k}{k!} \|(F(s_n^{-1})^{s_n} - F(s_n^{-1})^k) \xi\| \\ &\leq e^{-s_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_n^k}{k!} \|(I - F(s_n^{-1})^{|k-s_n|}) \xi\|. \end{aligned}$$

ここで

$$0 \leq I - F(s_n^{-1})^r \leq \begin{cases} r(I - F(s_n^{-1})), & r \geq 1 \\ I - F(s_n^{-1}), & 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

に注意すれば

$$\begin{aligned} \|F(s_n^{-1})^{s_n}\xi - e^{-L_n}\xi\| &\leq e^{-s_n}\|(I - F(s_n^{-1}))\xi\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_n^k}{k!} |k - s_n| \\ &\quad + \|(I - F(s_n^{-1}))\xi\|. \end{aligned}$$

Schwarz 不等式を使うと

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_n^k}{k!} |k - s_n| &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_n^k}{k!} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_n^k}{k!} (k - s_n)^2 \right)^{1/2} \\ &= e^{s_n/2} (s_n e^{s_n})^{1/2} = s_n^{1/2} e^{s_n}. \end{aligned}$$

ゆえに, 任意の $\xi \in \mathcal{D}$ に対して

$$\begin{aligned} \|F(s_n^{-1})^{s_n}\xi - e^{-L_n}\xi\| &\leq (s_n^{1/2} + 1) \|(I - F(s_n^{-1}))\xi\| \\ &= \frac{s_n^{1/2} + 1}{s_n} \|L_n \xi\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$F(s_n^{-1})^{s_n}$ および e^{-L_n} が縮小作用素だから, 結論を得る. ■

Banach 空間上で議論している [6] と違って, ここでは functional calculus が使えるので, 次のステップは [6] よりずっと簡単である.

補題 3.5 $s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-L_n} = e^{-L}$.

証明 まず $0 \leq (I + L_n)^{-1} \leq I$, $0 \leq (I + L)^{-1} \leq I$ に注意する. $\xi \in \mathcal{D}$ に対して $\eta = (I + L)\xi$ とすると

$$\begin{aligned} &\|(I + L_n)^{-1}\eta - (I + L)^{-1}\eta\| \\ &= \|(I + L_n)^{-1}\{(I + L_n)\xi + (L - L_n)\xi\} - \xi\| \\ &= \|(I + L_n)^{-1}(L - L_n)\xi\| \leq \|(L - L_n)\xi\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

これより $(I + L_n)^{-1} \rightarrow (I + L)^{-1}$ (SOT). したがって, 補題 2.7(1) の証明と同様にして functional calculus を適用すればよい. ■

定理 3.1 の証明 補題 3.4 と補題 3.5 より, $0 < s_n \rightarrow \infty$ のとき $F(s_n^{-1})^{s_n} \rightarrow e^{-L}$. つまり

$$0 < r_n \rightarrow 0 \text{ のとき } s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} F(r_n)^{1/r_n} = e^{-L}. \quad (3.4)$$

$t > 0$ に対して, H, K を tH, tK で置き換えて, 次が得られる:

$$s\text{-}\lim_{r \downarrow 0} (e^{-rtH} \sigma e^{-rtK})^{1/r} = e^{-tL}, \quad t > 0.$$

最後に, 一様収束の主張は簡単に示せる. 実際, $0 < a < b$ とし, 上の収束が $t \in [a, b]$ で一様でないとする, $\xi \in \mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$, $r_n \downarrow 0$, および $t_n \in [a, b]$ が存在して

$$\|F(r_n t_n)^{1/r_n} \xi - e^{-t_n L} \xi\| \geq \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.5)$$

部分列を選んで, $t_n \rightarrow t$ としてよい. このとき, $\lambda \in [0, 1]$ について一様に $\lambda^{t_n} \rightarrow \lambda^t$ だから, (3.4) より $F(r_n t_n)^{1/r_n} = (F(r_n t_n)^{1/r_n t_n})^{t_n} \rightarrow e^{-tL}$ (SOT). また $\|e^{-t_n L} - e^{-tL}\|_\infty \rightarrow 0$. したがって (3.5) と矛盾する. ■

定理 2.8 が定理 2.1 と定理 3.1 から示せそうであるが, 必ずしもそうではない. $A \mapsto \prod_{i=1}^n \mu_i(A)$ が SOT で下半連続であっても, 連続ではないからである.

上述の結果を行列の場合に制限すると

系 3.6 任意のエルミート行列 H, K について

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tH} \sigma e^{tK} \Big|_{t=0} &= (1-\alpha)H + \alpha K, \\ \lim_{t \rightarrow 0} (e^{tH} \sigma e^{tK})^{1/t} &= e^{(1-\alpha)H + \alpha K}, \\ \frac{d}{dt} \log(e^{tH} \sigma e^{tK}) \Big|_{t=0} &= (1-\alpha)H + \alpha K. \end{aligned}$$

4 作用素平均の指数積に対するノルム不等式とノルム収束

次は定理 2.8 と定理 3.1 の系である.

系 4.1 作用素平均 σ が $\sigma \leq \#_\alpha$ を満たすとする. つまり, 対応する作用素単調関数 f が $f(x) \leq x^\alpha$, $x \geq 0$, を満たすとする. H, K が定理 3.1 と同じとすると, 任意のユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ について

$$\|(e^{-rH} \sigma e^{-rK})^{1/r}\| \leq \|e^{-((1-\alpha)H + \alpha K)}\|, \quad r > 0 \quad (4.1)$$

が成立する. さらに

$$\lim_{r \downarrow 0} \|(e^{-rH} \sigma e^{-rK})^{1/r}\| = \|e^{-((1-\alpha)H + \alpha K)}\|. \quad (4.2)$$

特に $\sigma = \#_\alpha$ とすると, (4.1) の左辺は $r \downarrow 0$ のとき $\|e^{-((1-\alpha)H + \alpha K)}\|$ に単調増加する.

証明 仮定より $e^{-rH} \sigma e^{-rK} \leq e^{-rH} \#_\alpha e^{-rK}$ だから, 定理 2.8 より, 任意の $r > 0$ に対して

$$\|(e^{-rH} \sigma e^{-rK})^{1/r}\| \leq \|(e^{-rH} \#_\alpha e^{-rK})^{1/r}\| \leq \|e^{-((1-\alpha)H + \alpha K)}\|.$$

他方, 定理 3.1 とユニタリー不変ノルムの WOT での下半連続性から

$$\|e^{-((1-\alpha)H + \alpha K)}\| \leq \liminf_{r \downarrow 0} \|(e^{-rH} \sigma e^{-rK})^{1/r}\|.$$

ゆえに (4.1) および (4.2) が示された. 最後の主張は (2.2) より明らか. ■

特に, σ が対称な作用素平均で $\sigma \leq \#$ ならば, 上のような H, K に対して

$$\|(e^{-2rH} \sigma e^{-2rK})^{1/r}\| \leq \|e^{-(H+K)}\|, \quad r > 0 \quad (4.3)$$

が成立し, 左辺は $r \downarrow 0$ のとき $\|e^{-(H+K)}\|$ に収束する. 例えば, σ が調和平均あるいは幾何平均のときは, (4.3) の左辺は $r \downarrow 0$ のとき単調増加する. (4.1) あるいは (4.3) のようなノルム不等式は, Golden-Thompson 型不等式の補完型とみなせる ([4, 16] 参照).

注意 4.2 (1) $H = 0, K = xI$ ($x \in \mathbb{R}$) とおき, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ とすると, (4.1) は $r > 0$ に対して $f(e^{-rx}) \leq e^{-\alpha rx}$ を意味する. つまり $\sigma \leq \#_\alpha$. ゆえに, $\sigma \leq \#_\alpha$ の仮定は系 4.1 で不可欠である.

(2) 不等式 (4.3) は一般の対称作用素平均に対しては成立しない. 実際, $0 < p < \infty$ で $e^{-K} \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ とし, H が有界ならば, $e^{-(H+K)} \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ であるが, すべての $r > 0$ に対して $\|(e^{-2rH} \nabla e^{-2rK})^{1/r}\|_p = \infty$ となる.

(擬)ノルム $\|\cdot\|_p$ については, 次が成立する.

命題 4.3 σ は系 4.1 と同じとし, $0 < \alpha < 1$ とする. H, K が下に半有界な自己共役作用素で $H + K$ が本質的自己共役とする ($H + K$ の閉包を同じ $H + K$ で表す). $0 < p < \infty$ で $e^{-K} \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ ならば

$$\|(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/r}\|_p \leq \|e^{-(H+K)}\|_p, \quad r > 0.$$

証明 任意の $0 < p < \infty$ に対して

$$\|(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/r}\|_p = \|(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{p/r}\|_1^{1/p}$$

かつ $\|e^{-(H+K)}\|_p = \|e^{-p(H+K)}\|_1^{1/p}$ だから, $p = 1$ の場合を示せば十分である (H, K を pH, pK で置き換えればよい). そこで $e^{-K} \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ とする. [14, Corollary 2.4] より $e^{-(H+K)} \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$. いま $H_n = \int_a^n \lambda dE_H(\lambda)$ とすると, 任意の $r > 0$ に対して, $e^{-rH/(1-\alpha)} \leq e^{-rH_n/(1-\alpha)}$ と (4.1) より

$$\begin{aligned} \|(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/r}\|_1 &\leq \|(e^{-rH_n/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/r}\|_1 \\ &\leq \|e^{-(H_n+K)}\|_1 \end{aligned}$$

ところで [14, Theorem 3.1] の証明の中で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{-(H_n+K)} - e^{-(H+K)}\|_1$$

が示されている. ゆえに結論が得られる. ■

以下, ノルム $\|\cdot\|$ が一様凸の場合, あるいは $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$ ($0 < p < \infty$) の場合に, $r \downarrow 0$ のときの $(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/r}$ のノルム収束を議論しよう.

Banach 空間論では, ノルムに関する幾何学的な概念が重要である. 例えば, Banach 空間 $\mathcal{X}$ が一様凸であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して, $x, y \in \mathcal{X}$ が $\|x\| = \|y\| = 1$ かつ $\|x - y\| \geq \varepsilon$ ならば $\|(x + y)/2\| \leq 1 - \delta$ となるときをいう. Hilbert 空間が一様凸 Banach 空間の典型的な例である. よく知られているように, 一様凸 Banach 空間は回帰的であり, 次の重要な性質をもつ: $\{x_j\} \subset \mathcal{X}$ が $x \in \mathcal{X}$ に弱収束し, かつ $\|x_j\| \rightarrow \|x\|$ ならば, $\|x_j - x\| \rightarrow 0$ と強収束する.

$1 < p < \infty$ のとき, $\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ の一様凸性は, Clarkson-McCarthy 不等式から導かれる.

いま Φ を対称ゲージ関数とし, その双対を Φ' とする. $\|\cdot\|$ が Φ に対応するユニタリー不変ノルムとする. $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ (すなわち $\|\cdot\|$) が一様凸と仮定しよう. $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ の回帰性から, Φ および Φ' が共に正規となり, $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})^* \cong \mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H})$ がいえる:

補題 4.4 $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ が一様凸とする. $\{A_j\} \subset \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ が $\sup_j \|A_j\| < \infty$ かつ $A_j \rightarrow A$ (WOT) ならば, $\{A_j\}$ は A に $w(\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}), \mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H}))$ の意味で弱収束する.

証明 まず, $\|\cdot\|$ の WOT での下半連続性より $A \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ がいえる. 上で注意したように Φ' が正規だから, $\mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ が $\mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H})$ で稠密である. $\{A_j\}$ の WOT-収束から, 任意の $B \in \mathcal{C}_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ に対して $\text{tr}((A_j - A)B) \rightarrow 0$. $\{A_j\}$ が $\|\cdot\|$ -有界だから, 定理 1.5 より結論が得られる. ■

系 4.5 σ は系 4.1 と同じとし $0 < \alpha < 1$ とする. また H, K は定理 3.1 と同じとする. ユニタリー不変ノルム $\|\cdot\|$ が一様凸であるとき, $e^{-K} \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ならば

$$\lim_{r \downarrow 0} \|(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/r} - e^{-(H+K)}\| = 0.$$

証明 (4.1) と [14, Corollary 2.4] より, $\{e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/r} : r > 0\}$ は $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ の $\|\cdot\|$ -有界な部分集合である. よって定理 3.1 と補題 4.4 より, $r \downarrow 0$ のとき $(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/r}$ は $e^{-(H+K)}$ に $w(\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}), \mathcal{C}_{\Phi'}(\mathcal{H}))$ で収束する. ゆえに, 一様凸性と (4.2) から結論が従う. ■

$\|\cdot\|_p, 0 < p < \infty$, については, 次が成立.

系 4.6 σ および H, K は上の系と同じとする. $0 < p < \infty$ で $e^{-K} \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ ならば

$$\lim_{r \downarrow 0} \|(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/r} - e^{-(H+K)}\|_p = 0.$$

証明 $1 < p < \infty$ の場合は系 4.5 に含まれている. $0 < p \leq 1$ のとき, $2^k > 1/p$ となる $k \in \mathbb{N}$ を選ぶ. 系 4.5 を $\|\cdot\|_{2^k p}$ と $2^{-k}H, 2^{-k}K$ に適用して

$$\lim_{r \downarrow 0} \|(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/2^k r} - e^{-(H+K)/2^k}\|_{2^k p} = 0. \quad (4.4)$$

任意の $q > 0$ について $\|X + Y\|_q \leq 2^{1/q}(\|X\|_q + \|Y\|_q)$ (擬ノルム性) が成立することに注意して, Hölder 不等式を使うと

$$\begin{aligned} & \|(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/2^{k-1}r} - e^{-(H+K)/2^{k-1}}\|_{2^{k-1}p} \\ & \leq 2^{1/2^{k-1}p} \{ \|(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/2^k r} \\ & \quad \times [(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/2^k r} - e^{-(H+K)/2^k}]\|_{2^{k-1}p} \\ & \quad + \|[(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/2^k r} - e^{-(H+K)/2^k}]e^{-(H+K)/2^k}\|_{2^{k-1}p} \} \\ & \leq 2^{1/2^{k-1}p} \|(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/2^k r} - e^{-(H+K)/2^k}\|_{2^k p} \\ & \quad \times \{ \|(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/2^k r}\|_{2^k p} + \|e^{-(H+K)/2^k}\|_{2^k p} \}. \end{aligned}$$

したがって, (4.4) と命題 4.3 より

$$\lim_{r \downarrow 0} \|(e^{-rH/(1-\alpha)} \sigma e^{-rK/\alpha})^{1/2^{k-1}r} - e^{-(H+K)/2^{k-1}}\|_{2^{k-1}p} = 0.$$

この議論をくり返すと, 求める結論に至る. ■

参考文献

- [1] T. Ando, On some operator inequalities, *Math. Ann.* **279** (1987), 157–159.
- [2] T. Ando, Majorization, doubly stochastic matrices and comparison of eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* **118** (1989), 163–248.
- [3] T. Ando, Majorizations and inequalities in matrix theory, *Linear Algebra Appl.* **199** (1994), 17–67.
- [4] T. Ando and F. Hiai, Log-majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities, *Linear Algebra Appl.* **197/198** (1994), 113–131.
- [5] H. Araki, On an inequality of Lieb and Thirring, *Lett. Math. Phys.* **19** (1990), 167–170.
- [6] P. R. Chernoff, Note on product formulas for operator semigroups, *J. Funct. Anal.* **2** (1968), 238–242.
- [7] T. Fack, Sur la notion de valeur caractéristique, *J. Operator Theory* **7** (1982), 307–333.
- [8] T. Fack and H. Kosaki, Generalized s -numbers of τ -measurable operators, *Pacific J. Math.* **123** (1986), 269–300.
- [9] M. Fujii, T. Furuta, and E. Kamei, Furuta's inequality and its application to Ando's theorem, *Linear Algebra Appl.* **179** (1993), 161–169.
- [10] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987), 85–88.
- [11] T. Furuta, Applications of order preserving operator inequalities, *Operator Theory: Advances and Applications*, Vol. 59, Birkhäuser, Basel, 1992, pp. 180–190.
- [12] T. Furuta, Extension of the Furuta inequality and log-majorization by Ando-Hiai, *Linear Algebra Appl.*, to appear.
- [13] I. C. Gohberg and M. G. Krein, *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*, Trnansl. Math. Monographs, Vol. 18, Amer. Math. Soc., 1969.
- [14] F. Hiai, Trace norm convergence of exponential product formula, *Lett. Math. Phys.*, to appear.
- [15] F. Hiai, Log-majorizations and norm inequalities for exponential operators, preprint.
- [16] F. Hiai and D. Petz, The Golden-Thompson trace inequality is complemented, *Linear Algebra Appl.* **181** (1993), 153–185.

- [17] F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators, *Math. Ann.* **246** (1980), 205–224.
- [18] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Press, New York, 1979.
- [19] R. Schatten, *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
- [20] B. Simon, *Trace Ideals and Their Applications*, Cambridge U.P., Cambridge, 1979.