

# 複素射影空間のケーラー一部分多様体の スペクトル幾何について

都立大理学部 宇田川 誠一 (Seiichi Udagawa)

## §0. 概略

$\psi: M^n \rightarrow E^N$  を  $n$  次元 compact リーマン多様体から,  
 $N$  次元ユークリッド空間への等長はめ込みとする.  $\Delta$ ,  
 $\text{spec}(M) = \{0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots\}$  によって, それぞれ,  $M$   
のラプラシアン,  $M$  のスペクトラムを表わすことにする.  
このとき,  $\psi = \psi_0 + \sum_{k \in \mathbb{N}} \psi_k$ ,  $\Delta \psi_k = \lambda_k \psi_k$ , と分解され,  
和は,  $C^\infty(M)$  上  $L^2$ -位相で, 成分ごとに収束する. ここで,  
 $\psi_0$  は, 定値写像であり,  $M$  の 重力の中心 といわれる.

定義 1.  $\psi$  が,  $\psi = \psi_0 + \psi_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\psi_k \neq 0$  となると  
き,  $\psi$  は, order $\{k\}$  であると言い,  $\psi = \psi_0 + \psi_k + \psi_l$ ,  
 $l > k > 0$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $\psi_k, \psi_l \neq 0$  のとき, order $\{k, l\}$  である  
と言い, 以下同様に,  $\psi = \psi_0 + \psi_{k_1} + \psi_{k_2} + \dots + \psi_{k_s}$ ,  $k_s > k_{s-1} > \dots > k_1 > 0$ ,  
 $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N}$ ,  $\psi_{k_1}, \dots, \psi_{k_s} \neq 0$ , のとき, order $\{k_1, k_2, \dots, k_s\}$  である  
ということにする.

よく知られた Takahashi の定理から,  $\psi$  が  $\text{order}\{k\}$  であるための必要十分条件は,  $M$  が,  $E^N$  の hypersphere  $S^{N-1}$  の中で minimal であることである. したがって, 一般に,

$\text{order}\{k_1, \dots, k_s\}$  ( $s \geq 2$ ) であるための必要十分条件は何かという問題が生じるが, これは, 非常に困難な問題であると思われるので, 特に, 我々は,  $i: M^n \rightarrow \mathbb{C}P^m$  を,  $n$  次元 compact Kähler 部分多様体から, 正則断面曲率 1 の  $m$  次元複素射影空間への Kähler immersion (holomorphic isometric immersion) とし,  $F: \mathbb{C}P^m \rightarrow E^N$  を first standard imbedding とし, 合成写像  $\psi = F \circ i$  について, 上記述べた事を考えたいと思う. 以下, 特にことわらない限り,  $\psi$  が  $\text{order}\{k_1, \dots, k_s\}$  と言うかわりに,  $M$  が  $\text{order}\{k_1, \dots, k_s\}$  ということにする

まず, A. Ros [8,9] によって, 以下の事実が得られている

定理 A.  $M$  を  $\mathbb{C}P^m$  の compact Kähler 部分多様体とする. このとき,  $M$  が  $\text{order}\{k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (i.e.,  $S^{N-1}$  で minimal) であるための必要十分条件は,  $M$  が  $\mathbb{C}P^m$  で, totally geodesic であることである.

定理 B.  $M$  を  $\mathbb{C}P^m$  の compact Kähler 部分多様体で,  $\psi$  は full とする (i.e.,  $\mathbb{C}P^m$  のいかなる totally geodesic Kähler 部分多様体にもはいらない). このとき,  $M$  が  $\text{order}\{k, 0\}$  であるための必要十分条件は,  $M$  が Einstein

で、かつ、 $T = k g|_{NM \times NM}$ ,  $k (\neq 0) \in \mathbb{R}$ , が成り立つことである。ここで、 $NM$  は、 $M$  の normal bundle で、 $g$  は、 $\mathbb{C}P^m$  の Kähler metric,  $T = (T_{\lambda\mu})$  は、 $T_{\lambda\mu} = \text{trace } A_{\xi_\lambda} A_{\xi_\mu}$ ,  $\xi_\lambda, \xi_\mu \in NM$  であり、 $A_{\xi_\lambda}$  は、 $\xi_\lambda$  方向の second fundamental tensor である。

注意 1. Totally geodesic Kähler 部分多様体は、order  $\{1\}$  であることが、確かめられる。したがって、order  $\{k\}$  ( $k \geq 2$ ) の Kähler 部分多様体は、存在しない。また、Einstein 平行部分多様体 ( $M$  の  $\mathbb{C}P^m$  における second fundamental form が平行) で、totally geodesic のもの以外は、order  $\{1, 2\}$  であることが、確かめられる。

定理 B に関連して、次を得た

定理 1. [13]  $M$  を  $\mathbb{C}P^m$  の compact Kähler 部分多様体で、かつ、immersion は full で、totally geodesic ではないとする

このとき、以下の条件は、互いに同値である。

- i)  $M$  は、Einstein 平行部分多様体,
- ii)  $M$  は、order  $\{1, 2\}$ ,
- iii)  $M$  は、order  $\{k, l\}$ ,  $l > k > 0$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ ,
- iv)  $M$  は、Einstein で、かつ、 $T = k g|_{NM \times NM}$ .
- v)  $M$  は、Einstein で、かつ、 $NM$  は、(induced metric に関して) Einstein Kähler metric を許容する。

注意 2. ii) と iii) の同値性により,  $\text{order}\{1, 2\}$  以外に,  $\text{order}\{k, l\}$  である Kaehler 部分多様体は, 存在しないことがわかる. 条件 V) は, §4 で説明される. また,  $\text{order}\{k, l, m\}$  については, first-canonical に imbedded された rank 3 の compact irreducible Hermitian symmetric spaces  $K$ ,  $\mathbb{C}P^n$  の third-canonical Veronese imbedding と  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$  の first-canonical imbedding は,  $\text{order}\{1, 2, 3\}$  であることが確かめられる.  $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n$  ( $n \geq 2$ ) の first-canonical imbedding は,  $\text{order}\{1, 2, 4\}$  であることが確かめられる.

定義 2.  $M_i$  を rank  $r_i$  の compact irreducible Hermitian symmetric space とし,  $f_{P_i}: M_i \rightarrow \mathbb{C}P^{m(i)}$  を  $P_i$ -th full Kaehler imbedding とする.  $f$  を  $f_{P_i}$  ( $i=1, \dots, s$ ) のテンソル積とすると,  $\sum_{i=1}^s r_i P_i$  を  $f$  の degree ということにする.

スペクトラル幾何について, まず, 次の結果が得られている:

定理 C. (N. Ejiri, A. Ros [9])

$M$  を,  $\mathbb{C}P^m$  の  $n$ -次元 compact Kaehler 部分多様体とすると,

$$(0.1) \quad \lambda_1 \leq n+1$$

である. 等号成立の必要十分条件は,  $M$  が, totally geodesic (i.e., degree 1) であることである.

定理 1 と [9] の定理 5.2 を合わせると次が得られる.

定理 2. (A. Ros, S. Udagawa)

$M$  を  $\mathbb{C}P^n$  の  $n$  次元 compact Kähler 部分多様体とし,  $\tau \in M$  の scalar curvature とする. このとき,

$$(0.2) \quad n[n+1+(n+1-\lambda_1)(n+1-\lambda_2)] \text{Vol}(M) \geq \int_M \tau,$$

が成り立つ. Immersion が full であれば, 等号成立の必要十分条件は,  $M$  が Einstein 平行部分多様体であることである.

定理 2 の系として, 以下の結果が得られる.

定理 3.

$M$  を  $\mathbb{C}P^n$  の  $n$  次元 compact Kähler 部分多様体とする  
 且,  $\lambda_1 \leq \int_M \tau / [n \text{Vol}(M)]$  で,  $M$  が totally geodesic でなければ,

$$(0.3) \quad \lambda_2 \leq n+2$$

である. 等号成立の必要十分条件は, (Immersion が full ならば)  
 $M$  が Einstein 平行部分多様体であることである.

定理 4.

$M$  を  $\mathbb{C}P^n$  の compact Kähler 部分多様体とし, Immersion は full とする.  $\tilde{M}$  を Einstein 平行部分多様体とする.  
 且,  $\text{Spec}(M) = \text{Spec}(\tilde{M})$  なら,  $M = \tilde{M}$  である.

注意 3. [6] より,  $E$  の scalar curvature をもつ,  $n=2k$  元 compact Einstein Kaehler 多様体  $n$  枚して,  $\lambda_1 \geq \frac{c}{n}$  が成り立つ. 等号成立の必要十分条件は,  $M$  が, a one-parameter group of isometries を許容することである.

注意 4. 定理 2 は, A. Ros [9] が, 不等式 及び, 等号 が成り立てば,  $M$  は Einstein で,  $T = \text{Ric}|_{NM \times NM}$  である ことを証明している. 定理 3, 4 は, 例外型の Einstein 平行 部分多様体  $E_6/\text{Spin}(10) \times T$  以外の Einstein 平行部分多様体  $n$  つい ては, A. Ros [9] が 得ている. つまり, 定理 2 とは, 独立に, 定理 3 の等号の必要十分条件が, " $M$  が Einstein 平行部分多 様体" ということと, [9] に おいて, 示していたが,  $E_6/\text{Spin}(10) \times T$  の  $\lambda_2$  が求められていなかった のである. classical type  $n$  ついては, Nagano [4] が求めている.

### 定理 5.

$M$  を  $\mathbb{C}P^m$  の compact Einstein Kaehler 部分多様体とし, Immersion は full とする.  $\tilde{M}$  を degree 3 の Einstein compact Hermitian symmetric 部分多様体 とする.

もし,  $\text{Spec}(M) = \text{Spec}(\tilde{M})$  なら,  $M = \tilde{M}$  である.

### § 1. 準備.

$\chi: M^n \rightarrow E^N$  を  $n$  次元 compact Riemann 多様体から,

$N$  次元ユークリッド空間への isometric immersion  $\psi$  と,  $H$  を  $M$  の  $E^N$  における mean curvature vector とする.

このとき, 次のを得る.

$$(1.1) \quad \Delta \chi = -nH = \sum_{k \in N} \lambda_k \chi_k,$$

$$(1.2) \quad \Delta^2 \chi = -n \Delta H = \sum_{k \in N} \lambda_k^2 \chi_k,$$

$$(1.3) \quad \Delta^3 \chi = -n \Delta^2 H = \sum_{k \in N} \lambda_k^3 \chi_k.$$

ここで,  $g$  を ユークリッド metric とするとき,

$$\int_M g(\chi_k, \chi_l) = 0 \quad \text{for } k \neq l,$$

であるから,

$$\int_M g(\chi_k, \chi_k) = a_k$$

とおく. このとき,

$$-n \int_M g(\chi, H) = \sum_{k \in N} \lambda_k a_k, \quad n^2 \int_M g(H, H) = \sum_{k \in N} \lambda_k^2 a_k,$$

$$n^2 \int_M g(H, \Delta H) = \sum_{k \in N} \lambda_k^3 a_k, \quad n^2 \int_M g(\Delta H, \Delta H) = \sum_{k \in N} \lambda_k^4 a_k,$$

である.

ここで, また,

$$\Phi_1 = n^2 \int_M g(H, H) + n \lambda_1 \int_M g(\chi, H),$$

$$\Phi_2 = n^2 \int_M g(H, \Delta H) - n^2 \lambda_1 \int_M g(H, H), \quad \Phi_3 = n^2 \int_M g(\Delta H, \Delta H) - n^2 \lambda_1 \int_M g(H, \Delta H),$$

とおけば, 次のを得る.

$$(1.4) \quad \Phi_1 = \sum_{k \in N} \lambda_k (\lambda_k - \lambda_1) a_k \geq 0,$$

$$(1.5) \quad \Phi_2 = \sum_{k \in N} \lambda_k^2 (\lambda_k - \lambda_1) a_k \geq 0,$$

$$(1.6) \quad \Phi_3 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k^3 (\lambda_k - \lambda_1) a_k \geq 0,$$

$$(1.7) \quad \Phi_4 := \Phi_2 - \lambda_2 \Phi_1 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k (\lambda_k - \lambda_2)(\lambda_k - \lambda_1) a_k \geq 0,$$

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \Phi_5 &:= \Phi_3 - \lambda_2 \Phi_2 - \lambda_3 \Phi_4 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k (\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)(\lambda_k - \lambda_3) a_k \geq 0. \end{aligned}$$

(1.4) ~ (1.6) において, 等号は,  $\text{order}\{1\}$  のときに限って成り立つ. (1.7) においては,  $\text{order}\{1\}$ ,  $\text{order}\{2\}$ ,  $\text{order}\{1, 2\}$  のいずれかのときに限って, また, (1.8) においては,  $\text{order}\{1\}$ ,  $\text{order}\{2\}$ ,  $\text{order}\{3\}$ ,  $\text{order}\{1, 2\}$ ,  $\text{order}\{1, 3\}$ ,  $\text{order}\{2, 3\}$ ,  $\text{order}\{1, 2, 3\}$  のいずれかのときに限って, 等号が成り立つ.

## § 2. Kaehler 部分多様体 I.

$HM(m+1) = \{P \in gl(m+1, \mathbb{C}) \mid \bar{P} = P^t\}$  とし, metric  $g$  を

$$g(P, Q) = 2 \operatorname{trace}(PQ) \quad \text{for } P, Q \in HM(m+1)$$

で定義する.  $\mathbb{C}P^m$  を正則断面曲率 1 の複素射影空間とすると,  $\mathbb{C}P^m$  の  $HM(m+1)$  への imbedding  $F$  は, 次で定義される:

$$F(\mathbb{C}P^m) = \{P \in HM(m+1) \mid P^2 = P, \operatorname{trace} P = 1\}$$

$F$  は,  $\mathbb{C}P^m$  の  $HM(m+1) := \{P \in HM(m+1) \mid \operatorname{trace} P = 1\}$  への full isometric imbedding を定義する. 以下, 特にならぬ限り,  $\mathbb{C}P^m$  と  $F(\mathbb{C}P^m)$  を同一視するこゝとする.

$M^n$  を  $\mathbb{C}P^m$  の  $n$  次元 compact Kaehler 部分多様体とする.

$\sigma, A, H$  において, それぞれ,  $M$  の  $\mathbb{C}P^m$  における second fundamental form, 対応する shape operator,  $M$  の  $(H, M/(m+1))$  における mean curvature vector を表わすことにする.  $M$  が  $\mathbb{C}P^m$  で minimal であるとき,  $F$  の second fundamental form が平行であるとき等を用いて,  $\Delta H$  を計算することにより, A. Ros [9] は, 次を得た.

Lemma 2.1  $P: M \rightarrow \mathbb{C}P^m$  を isometric immersion とする.

$$(2.1) \quad g(P, P) = 2,$$

$$(2.2) \quad g(P, H) = -1,$$

$$(2.3) \quad g(P, \Delta H) = -(n+1),$$

$$(2.4) \quad g(H, H) = (n+1)/2n,$$

$$(2.5) \quad g(H, \Delta H) = (n+1)^2/2n + (1/2n^2)\|\sigma\|^2,$$

$$(2.6) \quad g(\Delta H, \Delta H) = (n+1)^3/2n + [(n+1)/n^2]\|\sigma\|^2 + (1/n^2)\sum_{\lambda, \mu=1}^{m-n} (\text{trace } A_\lambda A_\mu)^2 + (1/n^2)\text{trace} \left( \sum_{\lambda=1}^{m-n} A_\lambda^2 \right)^2,$$

が成り立つ. ここで,  $A_\lambda = A_{\xi_\lambda}$ , であり,  $\xi_1, \dots, \xi_{m-n}$  は,  $M$  の orthonormal normal basis である.

$R, S, \tau$  において, それぞれ,  $M$  の curvature tensor, Ricci tensor, scalar curvature を表わすことにすると,

$$(2.7) \quad \tau = n(n+1) - \|\sigma\|^2,$$

$$(2.8) \quad \|S\|^2 = \frac{1}{2}n(n+1)^2 - (n+1)\|\sigma\|^2 + \text{trace} \left( \sum_{\lambda} A_\lambda^2 \right)^2,$$

$$(2,9) \quad \|R\|^2 = 2n(n+1) - 4\|\sigma\|^2 + 2\sum_{\lambda,\mu} (\text{trace } A_\lambda A_\mu)^2,$$

$$(2,10) \quad -\frac{1}{2}\Delta\|\sigma\|^2 = \|\nabla\sigma\|^2 + \frac{(n+2)}{2}\|\sigma\|^2 - 2\text{trace}\left(\sum_\lambda A_\lambda^2\right)^2 - \sum_{\lambda,\mu} (\text{trace } A_\lambda A_\mu)^2,$$

が成り立つことが知られている.

さらに,

$$(2,11) \quad \frac{1}{2}n(n+1)\|R\|^2 \geq 2n\|\sigma\|^2 \geq \tau^2,$$

が成り立ち, 最初の等号は,  $M$  が const. holomorphic sectional curvature をもつときに限って成り立ち, 2番目の等号は,  $M$  が Einstein のときに限って成り立つ.

### §3. Kähler 部分多様体 II.

$M$  を  $\mathbb{C}P^m$  の  $n$  次元 Kähler 部分多様体とする.  $TM^{\mathbb{C}}$  を  $M$  の tangent bundle  $TM$  の複素化とする. このとき,

$TM^{\mathbb{C}} = TM^+ + TM^-$  (orthogonal sum), であり, 各  $TM^{\pm}$  の fibre  $T_p M^{\pm}$  at  $p \in M$  は,  $T_p M^{\mathbb{C}}$  の complex structure tensor  $J$  の  $\pm\sqrt{-1}$ -eigenspace である. 同様にして, normal bundle  $NM$  の複素化  $NM^{\mathbb{C}}$  に対して,  $NM^{\mathbb{C}} = NM^+ + NM^-$  (orthogonal sum).

さらに,  $\overline{T_p M^{\pm}} = T_p M^{\mp}$ ,  $\overline{N_p M^{\pm}} = N_p M^{\mp}$  が成り立つ.

$\mathbb{C}P^m$  上に, local field of unitary frames  $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m\}$  を選んで,  $M$  に制限して,  $e_1, \dots, e_n$  は,  $M$  に接しているとする. この frame field に関して, dual frame field を,  $\{\omega^1, \dots, \omega^n, \omega^{n+1}, \dots, \omega^m\}$  とする.  $\mathbb{C}P^m$  の Kähler metric は,

$\sum_{A=1}^m \omega^A \bar{\omega}^A$  によって与えられる.  $M$  の induced Kähler metric  $g$  は,  $g = \sum_{a=1}^n \omega^a \bar{\omega}^a$  によって与えられる.

以下,  $\alpha, \beta, \gamma, \dots = 1, \dots, n$ ;  $\alpha, \beta, \gamma, \dots = n+1, \dots, m$  とする.

$\omega^\alpha$  を  $M$  に制限して,

$$(3.1) \quad \omega^\alpha = 0, \quad \text{を得る.}$$

これを, 外微分して, Cartan の Lemma から,

$$(3.2) \quad \omega_\alpha^\alpha = \sum_\beta K_{\alpha\bar{\beta}}^\alpha \omega^\beta, \quad K_{\alpha\bar{\beta}}^\alpha = K_{\bar{\beta}\alpha}^\alpha,$$

が得られる.  $K_{\alpha\bar{\beta}}^\alpha$  は, second fundamental tensor と呼ばれる.

$M$  の構造方程式は,

$$(3.3) \quad d\omega^\alpha + \sum_\beta \omega_\beta^\alpha \wedge \omega^\beta = 0, \quad \omega_\beta^\alpha + \bar{\omega}_\alpha^\beta = 0,$$

$$(3.4) \quad d\omega_\beta^\alpha + \sum_c \omega_c^\alpha \wedge \omega_\beta^c = \Omega_\beta^\alpha, \quad \Omega_\beta^\alpha = \sum_{c,d} R_{\beta c d}^\alpha \omega^c \wedge \bar{\omega}^d,$$

$$(3.5) \quad d\omega_\beta^\alpha + \sum_\gamma \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma = \Omega_\beta^\alpha, \quad \Omega_\beta^\alpha = \sum_{c,d} R_{\beta c d}^\alpha \omega^c \wedge \bar{\omega}^d,$$

によって与えられる. このとき, 次の基本公式が得られる

$$(3.6) \quad R_{\beta c d}^\alpha = \frac{1}{4} (\delta_\beta^\alpha \delta_{cd} + \delta_c^\alpha \delta_{\beta d}) - \sum_\alpha K_{\beta c}^\alpha \bar{K}_{\alpha d}^\alpha,$$

$$(3.7) \quad S_{c\bar{d}} = \frac{n+1}{2} \delta_{cd} - 2 \sum_{\alpha, a} K_{ac}^\alpha \bar{K}_{\alpha d}^\alpha,$$

$$(3.8) \quad \tau = n(n+1) - 4 \sum_{\alpha, c, d} K_{cd}^\alpha \bar{K}_{\alpha c}^\alpha,$$

$$(3.9) \quad R_{\beta c d}^\alpha = \frac{1}{4} \delta_\beta^\alpha \delta_{cd} + \sum_\alpha K_{ac}^\beta \bar{K}_{\alpha d}^\alpha.$$

(2.7) ~ (2.9) は, (3.6) ~ (3.8) によって, 求められる.

さて,  $K_{\alpha\bar{\beta}}^\alpha$  の高階の共変微分を定義する.

まず,

$$\sum_c K_{abc}^\alpha \omega^c + \sum_c K_{a\bar{b}\bar{c}}^\alpha \bar{\omega}^c = \alpha K_{aa}^\alpha - \sum_c K_{ca}^\alpha \omega_a^c - \sum_c K_{ac}^\alpha \omega_{\bar{a}}^c + \sum_{\beta} K_{a\bar{b}}^\beta \omega_{\beta}^\alpha,$$

このとき,

$$(3,10) \quad K_{abc}^\alpha = K_{acb}^\alpha = K_{bac}^\alpha, \quad K_{a\bar{b}\bar{c}}^\alpha = 0 \quad \text{である.}$$

$$K_{a_1 \dots a_m}^\alpha \quad (m \geq 2) \quad \text{の共変微分} \quad K_{a_1 \dots a_m a_{m+1}}^\alpha, \quad K_{a_1 \dots a_m \bar{a}_{m+1}}^\alpha \quad \text{と,}$$

inductive に定義できる. 22で,

$$\overline{(K_{a_1 \dots a_m}^\alpha)}_{\bar{b}} = \overline{K_{a_1 \dots a_m \bar{b}}^\alpha}, \quad \overline{(K_{a_1 \dots a_m}^\alpha)}_{\bar{b}} = \overline{K_{a_1 \dots a_m b}^\alpha},$$

が, 成り立つ.

Lemma 3.1. [5]

$$(3,11) \quad K_{a_1 \dots a_m}^\alpha \quad \text{は, } a_1, \dots, a_m \quad \text{に関して symmetric.}$$

$$(3,12) \quad K_{a_1 \dots a_m \bar{b}}^\alpha$$

$$= \frac{(m-2)}{4} \sum_{r=1}^m K_{a_1 \dots \hat{a}_r \dots a_m}^\alpha \delta_{a_r \bar{b}}$$

$$- \sum_{r=1}^{m-2} \frac{1}{r!(m-r)!} \sum_{\sigma, \beta, c} K_{ca_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(r)}}^\alpha K_{a_{\sigma(r+1)} \dots a_{\sigma(m)}}^\beta \bar{K}_{c\bar{b}}^\beta, \quad m \geq 3$$

22で,  $\sigma$  に関する和は,  $(1, \dots, m)$  のすべての permutations に関してとっている.

§4. 定理の証明.

Lemma 2.1 と (1.4) から (いま,  $M$  は実 2n 次元),

$$\lambda_1 \leq n+1 \quad \text{を得る. 等号が成り立てば, } M \text{ は}$$

order{1} であるから, (1.5) においても等号が成り立つ.

再び, Lemma 2.1 より,

$$\begin{aligned} 0 = \Xi_2 &= 2n(n+1)^2 \text{vol}(M) + 2 \int_M \|\sigma\|^2 - 2n(n+1)\lambda_1 \text{vol}(M) \\ &= 2 \int_M \|\sigma\|^2. \end{aligned}$$

したがって,  $\sigma = 0$ , 即ち,  $M$  は, totally geodesic.

逆に,  $\mathbb{C}P^n$  に対して,  $\lambda_1 = n+1$  であることは, よく知られてゐる. — 定理 C の証明終り.

定理 A と B の証明は省略する.

また, (1.7) に Lemma 2.1 より,

$$\begin{aligned} 0 \leq \Xi_4 &= 4n^2 \int_M g(H, \Delta H) - 4n^2(\lambda_1 + \lambda_2) \int_M g(H, H) \\ &\quad - 2n\lambda_1\lambda_2 \int_M g(P, H) \\ &= 2n(n+1)^2 \text{vol}(M) + 2 \int_M \|\sigma\|^2 - 2n(n+1)(\lambda_1 + \lambda_2) \text{vol}(M) \\ &\quad + 2n\lambda_1\lambda_2 \text{vol}(M). \end{aligned}$$

これに, (2.7) とから, (0.2) を得る. 等号成立の必要十分条件は,  $M$  が order{1} または, order{2} または, order{1,2} であるか, 定理 A と 注意 1 より, order{1} の case は,  $M$  が totally geodesic で, order{2} の case は 起こり得ない. order{1,2} の case は, immersion が full であれば, 定理 B により,

$M$  は Einstein で,  $T = \kappa g|_{NM \times NM}$  が成り立つ.

$T(\xi, \eta) = \text{trace } A_\xi A_\eta$ ,  $\xi, \eta \in NM$  であつた.

$A_{J\xi} = JA_\xi$ ,  $A_\xi \circ J = -J \circ A_\xi$  for any  $\xi \in NM$

であるから,  $T(J\xi, J\eta) = T(\xi, \eta)$  for any  $\xi, \eta \in NM$   
 が成り立つ

次に,  $T$  を  $NM^c \times NM^c$  から  $\mathbb{C}$  への complex bilinear mapping  
 に拡張すれば,

$$T(N_p M^+, N_p M^+) = 0, \quad T(N_p M^-, N_p M^-) = 0 \quad \text{for any } p \in M$$

を得る. したがって,

$$(4.1) \quad T = \text{Rg}|_{NM \times NM} \xLeftrightarrow{\text{同値}} \sum_{\alpha, \beta} K_{\alpha\beta}^{\alpha} \overline{K_{\alpha\beta}^{\beta}} = \frac{\text{Rg}}{2} \delta_{\alpha\beta}$$

を得る. このとき, 次のを得る.

Proposition 1. [13]  $M$  は,  $\mathbb{C}P^m$  の  $n$  次元 Einstein  
 Kähler 部分多様体とする. もし,  $T = \text{Rg}|_{NM \times NM}$  なら,  $M$   
 は, 平行部分多様体である

Proposition 1 の証明).

$M$  が Einstein なら, (3, 7), (3, 8), (2, 7) より,

$$\sum_{\alpha, \beta} K_{\alpha\beta}^{\alpha} \overline{K_{\alpha\beta}^{\beta}} = \frac{\|\sigma\|^2}{4n} \delta_{\alpha\beta} \quad \text{が成り立つ}$$

したがって, (3, 10) より,

$$(4.2) \quad \sum_{\alpha, \beta} K_{\alpha\beta}^{\alpha} \overline{K_{\alpha\beta}^{\beta}} = 0.$$

Lemma 3, 1 を用いて,

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}^{\alpha} \overline{K_{\alpha\beta}^{\beta}} &= \frac{1}{4} \{ K_{\alpha\beta}^{\alpha} \delta_{\alpha\beta} + K_{\alpha\beta}^{\alpha} \delta_{\beta\alpha} + K_{\alpha\beta}^{\alpha} \delta_{\alpha\alpha} \} \\ &\quad - \sum_{\beta, \gamma} \{ K_{\alpha\beta}^{\alpha} K_{\beta\gamma}^{\beta} + K_{\alpha\beta}^{\alpha} K_{\gamma\alpha}^{\gamma} + K_{\alpha\beta}^{\alpha} K_{\alpha\gamma}^{\gamma} \} \overline{K_{\beta\gamma}^{\beta}} \end{aligned}$$

を得るので, これと, (3, 10), (4.2) より,

$$(4.3) \quad \sum_{a,b,c} K_{abc}^{\alpha} (\overline{K_{abc}^{\alpha}}) = 0. \quad \text{を得る.}$$

したがって,

$$\begin{aligned} (4.4) \quad 0 &= \sum K_{abc\bar{d}}^{\alpha} (\overline{K_{abc\bar{d}}^{\alpha}}) + \sum K_{abc}^{\alpha} (\overline{K_{abc\bar{d}}^{\alpha}}) \\ &= \sum K_{abc\bar{d}}^{\alpha} (\overline{K_{abc\bar{d}}^{\alpha}}) + \frac{3}{4} \sum K_{abc}^{\alpha} \overline{K_{abc}^{\alpha}} \\ &\quad - 3 \sum K_{abc}^{\alpha} \overline{K_{bc}^{\beta}} K_{ed}^{\beta} \overline{K_{eda}^{\alpha}}, \end{aligned}$$

を得る.  $T = \kappa g|_{NM \times NM}$  なら, (4.1) より,  $\sum_{a,b} K_{ab}^{\alpha} \overline{K_{ab}^{\beta}} = \frac{\kappa}{2} \delta_{\alpha\beta}$

であり, Einstein なら,  $\kappa = \text{const.}$  したがって,

$$\sum_{a,b,c} K_{abc}^{\alpha} \overline{K_{bc}^{\beta}} = 0 \quad \text{であり, (4.4) の右辺の等 1, 2 項は}$$

共に, non-negative であるから, 結局,  $K_{abc}^{\alpha} = 0$ , i.e.,  $M$  は平行部分多様体である. — Proposition 1 の証明終り.

注意 5. Proposition 1 は, 証明からわかるように, 実際は,

$T$  が normal connection に関して平行で, かつ, Ricci tensor が平行であれば, 成り立つ. Proposition 1 により,

order  $\{1, 2\}$  ならば,  $M$  は, Einstein 平行部分多様体 (totally geodesic は除く) であることがわかる. 逆にいうては, Nagano

[4] により, classical type の compact Hermitian symmetric spaces

については, その rank 番目までの eigenvalues が求められて

いて, しかも, exceptional type  $E_6 / \text{Spin}(10) \times T$  については, §6

で計算されるので, ここで, その値を表 1 に示しておく.

表 1 により, 定理 2 の証明は, 完結し, しかも, Einstein の

平行部分多様体 (totally geodesic は除く) は, order  $\{1, 2\}$  であることがわかる. 以上で, 定理 1 の  $\text{ii}) \iff \text{iv})$  (定理 B),  $\text{iv}) \Rightarrow \text{i})$  (Prop. 1),  $\text{i}) \iff \text{ii})$ ,  $\text{ii}) \Rightarrow \text{iii})$  (定義が明らか) が既にわかってゐる. 後は,  $\text{iv})$  と  $\text{v})$  の同値性を示せばよい. そのために,

定義 3.  $R^\alpha_\beta = \sum_c R^\alpha_{\beta c \bar{c}}$  とおく.  $\Sigma$  の NM の tensor  $R^\alpha_\beta \in$  normal Ricci tensor と呼ぶことにする.

もし,  $R^\alpha_\beta = \lambda \delta_{\alpha\beta}$  for some real function  $\lambda$  on  $M$  ならば, NM は Einstein-Kähler metric を許容することになる.

(3.9), (2.7), (3.8), (4.1) より,

$$T = Rg|_{NM \times NM} \xleftrightarrow{\text{同値}} R^\alpha_\beta = \left\{ \frac{n}{4} + \frac{\| \sigma \|^2}{4(m-n)} \right\} \delta_{\alpha\beta}.$$

従って, 定義 3 から,

$\text{iv}) \iff \text{v})$  は, 示された. 定理 1 の証明終了.

定理 3 については,  $\lambda_1 \leq \int_M \tau / [n \text{Vol}(M)]$  ならば, (0, 2) より,

$$(n+1-\lambda_1)/(n+2-\lambda_2) \geq 0 \quad \text{が成り立つ.}$$

従って,  $M$  が totally geodesic でなければ, 定理 C より,

$$\lambda_2 \leq n+2 \quad \text{を得る.}$$

等号が成り立てば, (0, 2) で等号が成り立つから,  $M$  は, Einstein 平行部分多様体である. 逆に, 表 1 から従う.

表 1. Einstein 平行 部分多様体 (totally geodesic は除く)

| 部分多様体                                   | $\dim_{\mathbb{C}}$ | $\tau$     | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
|-----------------------------------------|---------------------|------------|-------------|-------------|
| $\mathbb{C}P^n(1/2)$                    | $n$                 | $n(n+1)/2$ | $(n+1)/2$   | $n+2$       |
| $\mathbb{Q}^n$                          | $n$                 | $n^2$      | $n$         | $n+2$       |
| $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n$    | $2n$                | $2n(n+1)$  | $n+1$       | $2n+2$      |
| $U(5+2)/U(2) \times U(5)$<br>$5 \geq 3$ | $2S$                | $2S(S+2)$  | $S+2$       | $2S+2$      |
| $SO(10)/U(5)$                           | $10$                | $80$       | $8$         | $12$        |
| $E_6/Spin(10) \times T$                 | $16$                | $192$      | $12$        | $18$        |

また, 次元,  $\text{vol}(M)$ ,  $\int_M \tau$  は, spectral invariants [1]  
であるから, 定理 4 は, 定理 3 から従う.

proposition 2.

$M$  を,  $\mathbb{C}P^n$  の  $n$ -次元 compact Kähler 部分多様体とし,

次の 3 つの 条件をみたすとする:

$$i) \quad \lambda_1 = \int_M \tau / [n \text{vol}(M)],$$

$$ii) \quad \int_M [\|R\|^2 + 2\|S\|^2] \leq n[(\lambda_1 - \lambda_2)(n+1 - \lambda_1) + (n+3)\lambda_1] \text{vol}(M),$$

iii) 平行部分多様体でない,

このとき,  $\lambda_3 \leq n+3$  である.

等号成立の必要十分条件は, (i), ii), iii) の仮定のもとで)

$M$  が  $\text{order}\{1, 2, 3\}$  であることである。

(proposition 2 の証明)  $(1, 8)$ , Lemma 2.1,  $(2, 7) \sim (2, 9)$  より,

$$\begin{aligned} 0 \leq \Phi_5 &= 4n^2 \int_M g(\Delta H, \Delta H) - 4n^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \int_M g(H, \Delta H) \\ &\quad + 4n^2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) \int_M g(H, H) + 2n \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \int_M g(P, H) \\ &= 2n \text{vol}(M) \left[ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - (n+1)(n+2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \right. \\ &\quad \left. + (n+1)(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \right] \\ &\quad + 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 4n - 8) \int_M \tau \\ &\quad + 2 \int_M [\|R\|^2 + 2\|S\|^2] \end{aligned}$$

従って, 仮定 i), ii) により,

$$(n+1-\lambda_1)(n+2-\lambda_2)(n+3-\lambda_3) \geq 0 \quad \text{を得る.}$$

仮定 iii) と, 定理 3 により,  $\lambda_3 \leq n+3$  を得る.

等号成立の必要十分条件は, 注意 1 と 2 を考慮すれば, 定理 A, 定理 1, 仮定 iii) により,  $M$  が  $\text{order}\{1, 2, 3\}$  であることがわかる. — proposition 2. の証明終り,

proposition 2 と, 表 2, 3 から, 次を得る.

### proposition 3.

Degree 3 の compact irreducible Hermitian symmetric 部分多様体  
と  $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$  (first-canonical imbedding) は,  $\text{order}\{1, 2, 3\}$   
である.

表 2. Degree 3 の compact irreducible Hermitian symmetric submanifolds

| 部分多様体                                       | $\dim_{\mathbb{C}}$ | $\tau$     | $\ S\ ^2$     | $\ R\ ^2$   | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ |
|---------------------------------------------|---------------------|------------|---------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\mathbb{C}P^n(1/3)$                        | $n$                 | $n(n+1)/3$ | $n(n+1)^2/18$ | $2n(n+1)/9$ | $(n+1)/3$   | $2(n+2)/3$  | $n+3$       |
| $SU(r+3)/S(U(n) \times U(3))$<br>$r \geq 3$ | $3r$                | $3r(r+3)$  | $3r(r+3)^2/2$ | $6r(3r+1)$  | $r+3$       | $2r+4$      | $3r+3$      |
| $Sp(3)/U(3)$                                | 6                   | 24         | 48            | 66          | 4           | 7           | 9           |
| $SO(12)/U(6)$                               | 15                  | 150        | 750           | 660         | 10          | 16          | 18          |
| $SO(14)/U(7)$                               | 21                  | 252        | 1512          | 1344        | 12          | 20          | 24          |
| $E_7/E_6 \times T$                          | 27                  | 486        | 4374          | 3132        | 18          | 28          | 30          |

表 3. Degree 3 の compact reducible Einstein Hermitian symmetric submanifolds

| 部分多様体                                                                | $\dim_{\mathbb{C}}$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ |
|----------------------------------------------------------------------|---------------------|-------------|-------------|-------------|
| $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^n$            | $3n$                | $n+1$       | $2n+2$      | $2n+4$      |
| $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^{2n+1}(1/2)$                       | $3n+1$              | $n+1$       | $2n+2$      | $2n+3$      |
| $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{Q}^{n+1} (n \geq 2)$                   | $2n+1$              | $n+1$       | $n+3$       | $2n+2$      |
| $\mathbb{C}P^n \times [SU(n+1)/S(U(n) \times U(n-1))]$<br>$n \geq 4$ | $3n-2$              | $n+1$       | $2n$        | $2n+2$      |
| $\mathbb{C}P^n \times [SO(10)/U(5)]$                                 | 17                  | 8           | 12          | 16          |
| $\mathbb{C}P^n \times [E_6/spin(10) \times T]$                       | 27                  | 12          | 18          | 24          |

§ 5. 定理 5 の証明.

 $\hat{R}, \hat{S}, \hat{C}, \hat{T}, \hat{G}$  12.5, 2,  $\hat{M}$  の curvature tensor,

Ricci tensor, scalar curvature, 定理 B で定義されている tensor, second fundamental form を表わすことにする. まず,

$$\dim(M) = \dim(\tilde{M}), \quad \text{vol}(M) = \text{vol}(\tilde{M}), \quad \int_M \tau = \int_{\tilde{M}} \tilde{\tau},$$

$$\int_M [2\|R\|^2 - 2\|S\|^2 + 5\tau^2] = \int_{\tilde{M}} [2\|\tilde{R}\|^2 - 2\|\tilde{S}\|^2 + 5\tilde{\tau}^2]$$

が成り立つ [1].  $M, \tilde{M}$  は, Einstein であるから,

$$\tau = \tilde{\tau}, \quad \|S\|^2 = \|\tilde{S}\|^2, \quad \int_M \|R\|^2 = \int_{\tilde{M}} \|\tilde{R}\|^2 \quad \text{である.}$$

従って, (2.7) ~ (2.11) を用いると,

$$(5.1) \quad \|\sigma\|^2 = \|\tilde{\sigma}\|^2, \quad \int_M \|T\|^2 = \int_{\tilde{M}} \|\tilde{T}\|^2, \quad \int_M \|\nabla\sigma\|^2 = \int_{\tilde{M}} \|\tilde{\nabla}\tilde{\sigma}\|^2$$

が成り立つ.

さらに,  $M$  が Einstein なりは, 次の量は spectral invariants であることが知られている [10],

$$(5.2) \quad \int_M \left[ -\frac{1}{9} \|\nabla R\|^2 + \frac{8}{21} \sum R_{ijk\ell}^* R_{\ell mn}^* R_{mnij}^* \right].$$

ここで,  $R_{ijk\ell}^*$  は, curvature tensor  $R$  の real/ local orthonormal frames に関する成分を示す. 次に,

$$(5.3) \quad \sum R_{ijk\ell}^* R_{\ell mn}^* R_{mnij}^* = 64 \sum R_{ac\bar{d}}^a R_{de\bar{f}}^c R_{fa\bar{e}}^e$$

$$= n(n+1)(n+3) - 2(n+3)\|\sigma\|^2 + \frac{2}{n}\|\sigma\|^4 + 4\|T\|^2$$

$$- 64 \sum K_{a\bar{b}}^a \bar{K}_{bc}^b K_{cd}^c \bar{K}_{de}^d K_{ef}^e \bar{K}_{fa}^f.$$

(5.1) ~ (5.3) より,

$$(5.4) \int_M \left[ -\frac{1}{9} \|\nabla R\|^2 - \frac{5/2}{21} \sum K_{0a}^\alpha \bar{K}_{bc}^\beta K_{cd}^\gamma \bar{K}_{de}^\delta K_{ef}^\epsilon \bar{K}_{fa}^\zeta \right]$$

は, Spectral Invariant である.

$$そこで, A_m = \sum_{a_1, a_2, \dots, a_m} K_{a_1 \dots a_m}^\alpha \bar{K}_{a_1 \dots a_m}^\alpha \quad \text{とおく. } (m \geq 2).$$

このとき,

$$\int_M A_4 = - \int_M \sum K_{abcd}^\alpha \bar{K}_{abc}^\alpha$$

であるから, Lemma 3.1 を用いて, この量を計算し, (5.1) と

(5.4) を考慮すると,

$$\int_M \left[ -\frac{1}{9} \|\nabla R\|^2 + \frac{256}{63} \sum K_{abc}^\alpha \bar{K}_{de}^\alpha K_{de}^\beta \bar{K}_{abc}^\beta - \frac{256}{63} A_4 \right]$$

という量は, Spectral Invariant であることがわかる.

次に,  $\|\nabla R\|^2 = 64 \sum K_{abc}^\alpha \bar{K}_{de}^\alpha K_{de}^\beta \bar{K}_{abc}^\beta$  であることが確かめら

れるので,  $\int_M [3\|\nabla R\|^2 + 256 A_4]$  という量は, Spectral

Invariant であることがわかる. ところで,

Lemma 5.1. [11]

$\tilde{M}$  を  $\mathbb{C}P^m$  の degree  $r$  の compact Hermitian symmetric

部分多様体で, Imbedding は full とする. このとき,

$$A_r \neq 0, A_{r+1} = 0 \quad \text{が成り立つ.}$$

Lemma 5.1 と定理 5 の仮定により,

$$\int_M [3\|\nabla R\|^2 + 256 A_4] = 0 \quad \text{が得られる.}$$

$\|\nabla R\|^2 \geq 0, A_4 \geq 0$  であるから, 結局,  $\nabla R = 0, A_4 = 0,$

が得られ,  $M$  は, compact Hermitian symmetric 部分多様体で,  $\text{degree} \leq 3$  となる. ここで, 表1~3と, 対称空間の埋めこみの分類 [5] により, 定理の結論は得られる.

### §6. 固有値の計算. ([3], [12], [14] を参照)

$(\mathfrak{G}, \mathfrak{K})$  を Riemann symmetric pair とし,  $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$  において, それぞれ,  $\mathfrak{G}, \mathfrak{K}$  の Lie algebra を表わすことにする. このとき, 標準分解  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$  を得る.  $\Pi(\mathfrak{G}) := \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$  を fundamental root system とし,  $N_1, \dots, N_s$  を  $2(N_i, \alpha_j) / (\alpha_j, \alpha_j) = \delta_{ij}$  for  $N_i \in \mathfrak{t}$  で定義される  $\mathfrak{g}$  の fundamental weights とする. ここで,  $\mathfrak{t}$  は,  $\mathfrak{m}$  を含める  $\mathfrak{g}$  の maximal Abelian subalgebra を含む  $\mathfrak{g}$  の maximal Abelian subalgebra であり,  $(\cdot, \cdot)$  は,  $\mathfrak{t}$  上の内積である. また,  $l = \text{rank}(\mathfrak{G})$ . 次に,  $M_i$  を  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$  の fundamental weights とする. (これを定義するには, いろいろと準備が必要なので省略するが, これは, 左竹-図形から定められる). 次の事実が知られている.

Fact 1.  $(\mathfrak{G}, \mathfrak{K})$  を compact symmetric pair とし,  $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$  は, 単連結であるとする. ここで,

$$D(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}) := \left\{ \sum_{i=1}^s m_i M_i \mid m_i \in \mathbb{Z}, m_i \geq 0, 1 \leq i \leq s \right\}$$

とおく.  $\rho$  を,  $\mathfrak{k}$  に関する  $\mathfrak{G}$  の球表現とすると,  $\mathfrak{t}$  に関する  $\rho$  の highest weight  $\lambda(\rho)$  は,  $D(\mathfrak{G}, \mathfrak{K})$  に属する.

Fact 2. 写像:  $\rho \longrightarrow \lambda(\rho)$  は bijective である.

±て,  $E_6/\text{Spin}(10) \times T$  の  $\Delta$  の eigenvalues を計算する.

まず, [2] により,

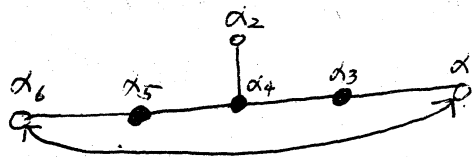
$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_8) - \frac{1}{2}(e_2 + \dots + e_7), \quad \alpha_2 = e_1 + e_2, \quad \alpha_3 = e_2 - e_1, \\ \alpha_4 = e_3 - e_2, \quad \alpha_5 = e_4 - e_3, \quad \alpha_6 = e_5 - e_4,$$

$$2 \leq i, \quad e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^8 \quad \text{for } i=1, \dots, 8.$$

$$N_1 = \frac{2}{3}(e_8 - e_7 - e_6), \quad N_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8), \\ N_3 = \frac{5}{6}(e_8 - e_7 - e_6) + \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5), \quad N_4 = e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8, \\ N_5 = \frac{2}{3}(e_8 - e_7 - e_6) + e_4 + e_5, \quad N_6 = \frac{1}{3}(e_8 - e_7 - e_6) + e_5.$$

$$2 \leq i, \quad \delta(G) := \sum_i N_i = e_2 + 2e_3 + 3e_4 + 4e_5 + 4(e_8 - e_7 - e_6).$$

左の図形により,  $M_i$  は



次で与えられる.

$$M_1 = N_1 + N_6 = e_8 - e_7 - e_6 + e_5,$$

$$M_2 = N_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - e_6 - e_7 + e_8).$$

Fact 1, 2 から,  $\lambda(\rho) = m_1 M_1 + m_2 M_2$ . 従って, Freudenthal

の公式により, 既約表現  $P$  の Casimir operator の eigenvalue

$A_P$  は, 次で与えられる.

$$A_P = \frac{1}{2}(\lambda(\rho) + 2\delta(G), \lambda(\rho)) = 2m_1(m_1 + m_2 + 8) + m_2(m_2 + 11).$$

$\Delta$  の eigenvalues  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  は,  $A_P$  で与えられるので,

$$\lambda_1 = 12(m_1=0, m_2=1), \quad \lambda_2 = 18(m_1=1, m_2=0), \dots$$

を得る.  $E_7/E_6 \times T$  についても, 同様にして,

$$A_p = m_1^2 + 2m_2^2 + 3m_3^2 + 2m_1m_2 + 4m_2m_3 + 2m_3m_1 + 17m_1 + 26m_2 + 27m_3,$$

$$\lambda_1 = 18 \ (m_1=1, m_2=m_3=0), \quad \lambda_2 = 28 \ (m_1=m_3=0, m_2=1),$$

$$\lambda_3 = 30 \ (m_1=m_2=0, m_3=1), \quad \text{-----}.$$

### References.

- [1] M. Berger, P. Gauduchon and E. Mazet, le spectre d'une variété Riemannienne, Lecture Notes in Math, no. 194, Springer-Verlag, Berlin 1971.
- [2] N. Bourbaki, Elements de Mathematique, Groupes et Algebres de Lie, Herman, Paris, (1968).
- [3] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, New-York-London, 1978.
- [4] T. Nagano, On the minimum eigenvalues of the Laplacians in Riemannian manifolds, Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo, 11 (1961), 177-182.
- [5] H. Nakagawa and R. Takagi, On locally symmetric Kaehler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc. Japan, 28 (1976), 638-667.
- [6] M. Obata, Riemannian manifolds admitting a solution of a certain system of differential equations, Proc. U.S.-Japan Semi. Diff. Geom., Kyoto Japan 1965, Nihon Hyoronsha, Tokyo, 1966.
- [7] K. Ogue, Differential geometry of Kaehler submanifolds, Advances in Math., 13 (1974), 73-114.

- [8] A. Ros, Spectral geometry of CR-minimal submanifolds in the complex projective space, Kodai Math. J., 6(1983), 88-99.
- [9] A. Ros, On spectral geometry of Kähler submanifolds, J. Math. Soc. Japan, 36(1984), 433-448.
- [10] T. Sakai, On eigenvalues of Laplacian and curvature of Riemannian manifold, Tohoku Math. J., 23(1971), 589-603.
- [11] R. Takagi and M. Takeuchi, Degree of symmetric Kählerian submanifolds of a complex projective space, Osaka J. Math., 14(1977), 501-518.
- [12] M. Takeuchi, Polynomial representations associated with symmetric bounded domains, Osaka J. Math., 10(1973), 441-475.
- [13] S. Udagawa, Einstein parallel Kähler submanifolds in a complex projective space, to appear in Tokyo J. Math.
- [14] S. Udagawa, Spectral geometry of Kähler submanifolds of a complex projective space, to appear in J. Math. Soc. Japan.