

RCS-iteration の一つの定義

神戸大・自然科学研究科 古田 泰之

(Yasuyuki Koda)

定義其壱. $\varepsilon \in \mathcal{O}_n$ とする. $\langle P_\alpha \mid \alpha \leq \varepsilon \rangle, \langle \dot{Q}_\alpha \mid \alpha < \varepsilon \rangle$ が, RCS-iteration であるとは, 次の条件 (i)-(iii) をみたすことである.

(i) $\forall \alpha < \varepsilon (\dot{Q}_\alpha \text{ は } P_\alpha\text{-name for a p.c.} \wedge \dot{Q}_\alpha \text{ は full})$

(ii) $\alpha \leq \varepsilon$ に対し,

$$P_\alpha = \{ p \leq \text{Cond}^\alpha \mid \phi \in p \wedge p \text{ は可算} \\ \wedge \forall \beta < \alpha [p \restriction \beta \in P_\beta \wedge p \restriction \beta \Vdash \exists \dot{q} \in \dot{Q}_\beta (\dot{q} \text{ は } p \restriction \beta \text{ の下界)}] \}$$

ただし, $p \restriction \beta \equiv \{ \tau \restriction \beta \mid \tau \in p \}$, $p \restriction \beta \Vdash \langle \tau \restriction \beta, \dot{q} \rangle \mid \tau \in p \}$ と定める. また, Cond^α , $\tau \restriction \beta$, $\tau \restriction \beta \Vdash$ は後で定義する.

(iii) $\alpha \leq \varepsilon$, $p_1, p_2 \in P_\alpha$ に対し,

$$p_1 \leq p_2 \text{ in } P_\alpha \text{ iff } \forall \beta < \alpha (p_1 \restriction \beta \leq p_2 \restriction \beta \text{ in } P_\beta)$$

$$\wedge \forall \beta < \alpha [p_1 \restriction \beta \Vdash \forall \dot{q} \in \dot{Q}_\beta (\dot{q} \text{ は } p_1 \restriction \beta \text{ の下界} \\ \rightarrow \dot{q} \text{ は } p_2 \restriction \beta \text{ の下界})]$$

$\alpha \leq \varepsilon$ についての帰納法により, $\leq$ が擬順序であることがわかる.

定義其弐. $\alpha \leq \varepsilon$ に対し, $P_{<\alpha} = \bigcup_{\beta < \alpha} P_\beta$ とし, $K_\alpha = |P_{<\alpha}|$ とする. $\gamma < K_\alpha^+$

についての帰納法で, $\text{Cond}^\alpha(\gamma)$, $\text{Cond}^\alpha_\eta(\gamma)$ ($0 < \eta < \alpha$) と定める.

(a) $\gamma = 0$ の場合.

$$\text{Cond}^\alpha(0) = \{\emptyset\} \cup \{\langle 0, \langle \beta, \dot{\beta} \rangle \rangle \mid \beta < \alpha \wedge \dot{\beta} \in \text{dom}(\dot{Q}_\beta)\}$$

$$\text{Cond}_\eta^\alpha(0) = \{\langle 0, \langle \beta, \dot{\beta} \rangle \rangle \mid \eta \leq \beta < \alpha \wedge \dot{\beta} \in \text{dom}(\dot{Q}_\beta)\} \quad (0 < \eta < \alpha)$$

$\leq$ である. $\text{Cond}_\eta^\alpha(0) = \{\langle 0, \langle \beta, \dot{\beta} \rangle \rangle \in \text{Cond}^\alpha(0) \mid \eta \leq \beta\}$ である.

(b) $\gamma > 0$ の場合.

$$\text{Cond}^\alpha(\gamma) = \{\langle \beta, f \rangle \mid 0 < \beta < \alpha \wedge f \text{ は関数} \wedge \text{dom}(f) \subseteq P_\beta$$

$\wedge \text{dom}(f) \text{ は } P_\beta \text{ の antichain (= } \emptyset \text{ でない) } \wedge$

$\wedge \forall p \in \text{dom}(f) \exists \gamma' < \gamma (f(p) \in \text{Cond}_{\gamma'}^\alpha(\gamma'))\}$

$$\text{Cond}_\eta^\alpha(\gamma) = \{\langle \beta, f \rangle \in \text{Cond}^\alpha(\gamma) \mid \eta \leq \beta\} \quad (0 < \eta < \alpha)$$

$\leq$ である.

このようにして, $\text{Cond}^\alpha(\gamma)$, $\text{Cond}_\eta^\alpha(\gamma)$ ($0 < \eta < \alpha$), $\gamma < \kappa_\alpha^+$ が定まった.

また, ここで,

$$\text{Cond}^\alpha = \bigcup_{\gamma < \kappa_\alpha^+} \text{Cond}^\alpha(\gamma)$$

$$\text{Cond}_\eta^\alpha = \bigcup_{\gamma < \kappa_\alpha^+} \text{Cond}_\eta^\alpha(\gamma) \quad (0 < \eta < \alpha)$$

$\leq$ である. さらに, $\tau \in \text{Cond}^\alpha$ に対して,

$$\text{depth}(\tau) = \text{the least } \gamma < \kappa_\alpha^+ \text{ s.t. } \tau \in \text{Cond}^\alpha(\gamma)$$

$\leq$ 定まる.

補題. $\beta < \alpha \leq \varepsilon$ である. 明らかに $\kappa_\beta \leq \kappa_\alpha$ である. $\gamma < \kappa_\beta^+$ に対して,

$$\text{Cond}^\beta(\gamma) \subseteq \text{Cond}^\alpha(\gamma) \wedge \forall \eta < \beta (\eta \neq 0 \rightarrow \text{Cond}_\eta^\beta(\gamma) \subseteq \text{Cond}_\eta^\alpha(\gamma))$$

従って, $\text{Cond}^\beta \subseteq \text{Cond}^\alpha \wedge \forall \eta < \beta (\eta \neq 0 \rightarrow \text{Cond}_\eta^\beta \subseteq \text{Cond}_\eta^\alpha)$ である.

定義其参. $\alpha \leq \varepsilon$, $\tau \in \text{Cond}^\alpha$, $\gamma = \text{depth}(\tau) \leq \alpha$ である.

(1) $\eta \leq \varepsilon$ に対して $\tau \restriction \eta$ を定める. まず, $\gamma = 0$ のとき.

$$\phi \restriction \eta = \phi$$

$$\langle 0, \langle 3, \overset{\circ}{b} \rangle \rangle \restriction \eta = \begin{cases} \phi & \text{if } \eta \leq 3 \\ \langle 0, \langle 3, \overset{\circ}{b} \rangle \rangle & \text{if } 3 < \eta \leq \varepsilon \end{cases}$$

とす. $\gamma > 0$ のとき.

$$\langle 3, f \rangle \restriction \eta = \begin{cases} \phi & \text{if } \eta \leq 3 \\ \langle 3, g \rangle & \text{if } 3 < \eta \leq \varepsilon \end{cases}$$

とす. ここで g は, $\text{dom}(g) = \{p \in \text{dom}(f) \mid f(p) \restriction \eta \neq \phi\}$ なる関数で,

$p \in \text{dom}(g)$ に対しては, $g(p) = f(p) \restriction \eta$ である.

(2) $\eta < \varepsilon$ に対して $\tau \restriction \eta$ を定める. まず, $\gamma = 0$ のとき.

$$\phi \restriction \eta = \overset{\circ}{1}_\eta$$

$$\langle 0, \langle 3, \overset{\circ}{b} \rangle \rangle \restriction \eta = \begin{cases} \overset{\circ}{b} & \text{if } \eta = 3 \\ \overset{\circ}{1}_\eta & \text{if } \eta \neq 3 \end{cases}$$

とす. $\gamma > 0$ のとき. まず, $\tau = \langle 3, f \rangle$ とし, $\eta < 3$ に対しては,

$$\langle 3, f \rangle \restriction \eta = \overset{\circ}{1}_\eta$$

とす. $3 \leq \eta < \varepsilon$ のとき.

$$\begin{aligned} \langle 3, f \rangle \restriction \eta &= \bigcup_{p \in X} \{ \langle \sigma, r \rangle \in \text{dom}(f(p) \restriction \eta) \times P_\eta \mid r \leq p \wedge r \Vdash_\eta " \sigma \in f(p) \restriction \eta " \} \\ &\quad \cup \{ \langle \sigma, r \rangle \in \text{dom}(\overset{\circ}{1}_\eta) \times P_\eta \mid \forall p \in X (r \perp p) \wedge r \Vdash_\eta " \sigma \in \overset{\circ}{1}_\eta " \} \end{aligned}$$

と定める. ここで, $X = \text{dom}(f) \cap P_\eta$ である.

$\tau \restriction \eta$ や $\tau \restriction \eta \restriction \eta$ の性質を列挙する。証明はしるゝ。

補題. $\alpha \leq \eta \leq \varepsilon \wedge \tau \in \text{Cond}^\alpha \rightarrow \tau \restriction \eta = \tau$

補題. $\eta \leq \beta < \alpha \leq \varepsilon \wedge \beta \neq 0 \wedge \tau \in \text{Cond}_\beta^\alpha \rightarrow \tau \restriction \eta = \phi$

補題. $0 < \beta < \alpha \leq \varepsilon \wedge \exists \gamma \geq \beta. \gamma < \kappa_\alpha^+$ に於て,

$$\forall \eta < \alpha \forall \tau [\eta \neq 0 \wedge \tau \in \text{Cond}_\eta^\alpha(\gamma) \rightarrow \tau \restriction \beta = \phi \vee \exists \delta < \kappa_\beta^+ (\delta \leq \gamma \wedge \tau \restriction \beta \in \text{Cond}_\eta^\beta(\delta))]$$

補題. $\beta < \alpha \leq \varepsilon \wedge \exists \gamma \geq \beta. \tau \in \text{Cond}^\alpha$ に於て,

$$\tau \restriction \beta \in \text{Cond}^\beta \wedge \text{depth}(\tau \restriction \beta) \leq \text{depth}(\tau)$$

補題. $\alpha \leq \varepsilon \wedge \tau \in \text{Cond}^\alpha \wedge \eta \leq \xi \leq \varepsilon \rightarrow \tau \restriction \eta = (\tau \restriction \xi) \restriction \eta$

補題. $\alpha \leq \varepsilon \wedge \eta < \varepsilon \wedge \tau \in \text{Cond}^\alpha \rightarrow \tau \restriction \eta \restriction \eta$ は P_η -name

補題. $\eta < \beta \leq \alpha \leq \varepsilon \wedge \tau \in \text{Cond}^\alpha \wedge \tau \restriction \beta = \phi \rightarrow \tau \restriction \eta \restriction \eta = \dot{1}_\eta$

補題. $\alpha \leq \eta < \varepsilon \wedge \tau \in \text{Cond}^\alpha \rightarrow \forall s \in P_\eta (s \Vdash_\eta \tau \restriction \eta \restriction \eta = \dot{1}_\eta)$

P_α ($\alpha \leq \varepsilon$) の性質を列挙する. 証明はしるゝ.

補題 $\alpha \leq \varepsilon$ とする. 1 は P_α の最大元である. また, $P_0 = \{1\}$ 的.

補題 $\beta \leq \alpha \leq \varepsilon \rightarrow P_\beta \subseteq P_\alpha$

補題 $\beta \leq \alpha \leq \varepsilon$, $p_1, p_2 \in P_\beta$ とする.

$$(1) \quad p_1 \leq p_2 \text{ in } P_\beta \quad \text{iff} \quad p_1 \leq p_2 \text{ in } P_\alpha$$

$$(2) \quad p_1 \perp p_2 \text{ in } P_\beta \quad \text{iff} \quad p_1 \perp p_2 \text{ in } P_\alpha$$

補題 $\alpha \leq \varepsilon$ $p_1, p_2 \in P_\alpha$. $p_1 \leq p_2$ とする.

$$p_1 \cup p_2 \in P_\alpha \wedge p_1 \cup p_2 \leq p_1 \leq p_1 \cup p_2$$

補題 $\beta \leq \alpha \leq \varepsilon$, $p_1 \in P_\beta$, $p_2 \in P_\alpha$. $p_1 \leq p_1 \beta$ in P_β とする. このとき,

$$p_1 \cup p_2 \in P_\alpha \wedge p_1 \cup p_2 \leq p_1, p_2 \text{ in } P_\alpha$$

補題 $\beta \leq \alpha \leq \varepsilon$ とする. $p_1 \in P_\beta$, $p_2 \in P_\alpha$ とする.

$$p_1 \perp p_2 \beta \text{ in } P_\beta \quad \text{iff} \quad p_1 \perp p_2 \text{ in } P_\alpha$$

補題 $\beta \leq \alpha \leq \varepsilon \rightarrow P_\beta \leq P_\alpha$, i.e., $\text{id}: P_\beta \rightarrow P_\alpha$ is complete embedding

以上のことから、 $\tau \restriction \eta$ について、次のことがわかる。

補題 $\alpha \leq \varepsilon$, $\tau \in \text{Cond}^\alpha$, $\text{depth}(\tau) > 0$, $\tau = \langle \zeta, f \rangle$ $0 < \zeta \leq \eta < \varepsilon$, $\zeta < \alpha$ かつ $\exists \gamma$.

$$(1) \quad \tau \restriction \eta = \bigcup_{p \in \text{dom}(f)} \{ \langle \sigma, r \rangle \in \text{dom}(f(p) \restriction \eta) \times P_\eta \mid r \leq p \wedge r \Vdash_\eta " \sigma \in f(p) \restriction \eta " \} \\ \cup \{ \langle \sigma, r \rangle \in \text{dom}(\dot{1}_\eta) \times P_\eta \mid \forall p \in \text{dom}(f) (r \perp p) \wedge r \Vdash_\eta " \sigma \in \dot{1}_\eta " \}$$

$$(2) \quad p \in \text{dom}(f) \rightarrow p \Vdash_\eta " \tau \restriction \eta = f(p) \restriction \eta "$$

$$(3) \quad r \in P_\eta \wedge \forall p \in \text{dom}(f) (r \perp p) \rightarrow r \Vdash_\eta " \tau \restriction \eta = \dot{1}_\eta "$$

補題 $\alpha \leq \varepsilon \wedge \tau \in \text{Cond}^\alpha \rightarrow \forall \eta < \varepsilon (1 \Vdash_\eta " \tau \restriction \eta \in \dot{Q}_\eta ")$. $\tau \restriction \tau = \tau$. $1 = \{ \phi \}$.

補題 $\eta < \beta \leq \alpha \leq \varepsilon \wedge \tau \in \text{Cond}^\alpha \rightarrow 1 \Vdash_\eta " \tau \restriction \eta = (\tau \restriction \beta) \restriction \eta "$

P_α ($\alpha \leq \varepsilon$) に対しては、さらに、次のこともいえる。

補題 $\alpha \leq \varepsilon \wedge \tau \in \text{Cond}^\alpha \rightarrow \{ \phi, \tau \} \in P_\alpha$

補題 $0 < \beta \leq \eta \leq \alpha \leq \varepsilon \wedge \tau \in \text{Cond}^\alpha \wedge p \in P_\beta \rightarrow p \cup \{ \tau \restriction \eta \} \in P_\eta$

補題 $\beta < \varepsilon$ に対し、

$$P_{\beta+1} = \{ p \in \text{Cond}^{\beta+1} \mid \phi \in p \wedge p \text{ は可算} \wedge p \restriction \beta \in P_\beta \wedge p \restriction \beta \Vdash_\beta " \exists \zeta \in \dot{Q}_\beta (\zeta \text{ は } p \restriction \beta \text{ の下界}) " \}$$

であり、さらに、 $p_1, p_2 \in P_{\beta+1}$ に対して、

$$p_1 \leq p_2 \text{ in } P_{\beta+1} \quad \text{iff} \quad p_1 \upharpoonright \beta \leq p_2 \upharpoonright \beta \text{ in } P_\beta$$

$$\wedge p_1 \upharpoonright \beta \Vdash_\beta " \forall \dot{q} \in \dot{Q}_\beta (\dot{q} \text{ is } p_1 \upharpoonright \beta \text{ 's lower bound} \rightarrow \dot{q} \text{ is } p_2 \upharpoonright \beta \text{ 's lower bound}) "$$

補題 $\beta < \varepsilon$ のとき, $\{p \cup \{<0, <\beta, \dot{q}>>\} \mid p \in P_\beta \wedge \dot{q} \in \text{dom}(\dot{Q}) \wedge p \Vdash_\beta "\dot{q} \in \dot{Q}"\}$ は $P_{\beta+1}$

の dense subset τ がある. 従って τ , $i: P_\beta * \dot{Q}_\beta \rightarrow P_{\beta+1}$ は

$$i(p, \dot{q}) = p \cup \{<0, <\beta, \dot{q}>>\}$$

τ 定められる. これは dense embedding τ がある.

定義 $\alpha \leq \varepsilon$, $p_1, p_2 \in P_\alpha$, $\tau_1, \tau_2 \in \text{Cond}^\alpha$ とする.

$$(1) \quad p_1 \sim p_2 \text{ in } P_\alpha \quad \text{iff} \quad p_1 \leq p_2 \leq p_1 \text{ in } P_\alpha$$

$$(2) \quad \tau_1 \sim \tau_2 \text{ in } \text{Cond}^\alpha \quad \text{iff} \quad \forall \eta < \alpha (1 \Vdash_\eta "\tau_1 \restriction \eta = \tau_2 \restriction \eta")$$

これらは同値関係である.

定義 $\alpha \leq \varepsilon$, $x, y \in P_\alpha$ とする.

$$x \sim y \text{ in } P(P_\alpha)$$

$$\text{iff} \quad \forall p \in x \exists p' \in y (p \sim p') \wedge \forall p' \in y \exists p \in x (p' \sim p)$$

これも同値関係である.

次のことが容易にわかる.

補題 $\beta \leq \alpha \leq \varepsilon$, $\tau_1, \tau_2 \in \text{Cond}^\alpha$ とする.

$$\tau_1 \sim \tau_2 \text{ in } \text{Cond}^\alpha \rightarrow \tau_1/\beta \sim \tau_2/\beta \text{ in } \text{Cond}^\beta$$

補題 $\alpha \leq \varepsilon$, $p_1, p_2 \in P_\alpha$ とする. $\forall \tau_1 \in p_1, \exists \tau_2 \in p_2 (\tau_1 \sim \tau_2)$ ならい.

$p_2 \leq p_1$ である. 故に, $\forall \tau_1 \in p_1, \exists \tau_2 \in p_2 (\tau_1 \sim \tau_2) \wedge \forall \tau_2 \in p_2 \exists \tau_1 \in p_1 (\tau_2 \sim \tau_1)$ なるから, $p_1 \sim p_2$ である.

補題. $0 < \beta < \alpha \leq \varepsilon$, $\tau, \sigma \in \text{Cond}^\alpha$, $\tau = \langle \beta, f \rangle$, $\sigma = \langle \beta, g \rangle$ とする.

$$\text{dom}(f) \sim \text{dom}(g) \wedge \forall p \in \text{dom}(f) \forall p' \in \text{dom}(g) (p \sim p' \rightarrow f(p) \sim g(p')) \rightarrow \tau \sim \sigma$$

補題 $0 < \eta < \alpha$, $\tau \in \text{Cond}^\alpha$ とし, 関数 $f \in$, $\text{dom}(f) = \{\phi\}$, $f(\phi) \sim \tau$, $f(\phi) \in \text{Cond}^\eta$ なるものとする. このとき, $\langle \eta, f \rangle \in \text{Cond}^\alpha$ であるが, $\tau \sim \langle \eta, f \rangle \text{ in } \text{Cond}^\alpha$ が成り立つ.

補題 $\alpha \leq \varepsilon$, $p = \{\tau_n \mid n < \omega\} \in P_\alpha$ とし, 各 $n < \omega$ に対し, $\sigma_n \in \text{Cond}^\alpha$ が $\tau_n \sim \sigma_n$ であるものとする. $p' = \{\phi\} \cup \{\sigma_n \mid n < \omega\} \in P_\alpha$, $p \sim p'$ である.

ここに, Schwarz を定義する.

定義. $\delta \leq \varepsilon$, $\alpha \leq \varepsilon - \delta$ とする. $\langle \|\delta, \delta + \beta\| \mid \beta \leq \alpha \rangle$, $\langle e_\beta^\delta \mid \beta \leq \alpha \rangle$,

$\langle \dot{R}_\beta^\delta \mid \beta \leq \alpha \rangle$, $\langle \dot{S}_\beta^\delta \mid \beta < \alpha \rangle$ が次の条件を満たすこと。これは、RCS-iteration の (α または τ) Schwanz という。

(1) $\| \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle : \text{Cond}^{\delta+\beta} \rightarrow V_{P_\delta}^\beta$ τ あり、 $\tau \in \text{Cond}^{\delta+\beta}$ に対し、

$\| \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle(\tau) \in \tau \parallel \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle \neq \emptyset$ かつ $\tau \neq \emptyset$ 。

(a) $\phi \parallel \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle = \check{\phi}$

(b) $\tau = \langle 0, \langle \zeta, \dot{i} \rangle \rangle$, $\zeta < \delta$, $\dot{i} \in \text{dom}(\dot{Q}_\zeta)$ のとき、

$$\tau \parallel \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle = \check{\phi}$$

(c) $\tau = \langle 0, \langle \delta + \zeta, \dot{i} \rangle \rangle$, $\zeta < \beta$, $\dot{i} \in \text{dom}(\dot{Q}_{\delta+\zeta})$ のとき、

$$\tau \parallel \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle = \text{op}(\check{0}, \text{op}(\check{\zeta}, (e_\zeta^\delta(\dot{i}))_{P_\zeta}))$$

(d) $\tau = \langle \zeta, f \rangle$, $0 < \zeta < \delta + \beta$ かつ $\zeta \leq \delta$ のとき、

$$\tau \parallel \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle = \bigcup_{p \in \text{dom}(f)} \{ \langle \sigma, r \rangle \in \text{dom}(f(p) \parallel \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle) \times P_\delta \mid r \leq p \}$$

$$\wedge r \Vdash_{\dot{S}_\delta} " \sigma \in f(p) \parallel \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle "$$

(e) $\tau = \langle \delta + \zeta, f \rangle$, $0 < \zeta < \beta$ のとき、

$$\tau \parallel \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle = \text{op}(\check{\zeta}, \dot{t}_f)$$

$$\tau \neq \emptyset$$

$$\dot{t}_f = \{ \langle \text{op}(p \parallel \dot{S}_\delta, \delta + \zeta), f(p) \parallel \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle, p \parallel \dot{S}_\delta \rangle \mid p \in \text{dom}(f) \}$$

(2) $\dot{R}_\beta^\delta$ は P_δ -name for a p.o.

(3) $\{ \langle p \parallel \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle \mid p \in P_{\delta+\beta} \} \subseteq \dot{R}_\beta^\delta$

$$\tau \neq \emptyset, \quad p \parallel \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle = \{ \langle \tau \parallel \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle, p \parallel \dot{S}_\delta \rangle \mid \tau \in p \}$$

(4) $e_\beta^\delta : P_{\delta+\beta} \rightarrow P_\delta * \dot{R}_\beta^\delta$, $e_\beta^\delta(p) = \langle p \parallel \dot{S}_\delta, p \parallel \dot{S}_\delta, \delta + \beta \rangle$ τ あり、かつ、

$$\forall p_1, p_2 \in P_{\delta+\beta} (p_1 \leq p_2 \iff e_\beta^\delta(p_1) \leq e_\beta^\delta(p_2))$$

$$(5) \quad \forall r \in P_\delta \quad \forall \dot{\alpha} \in V^{P_\delta} [(r \Vdash_\delta " \dot{\alpha} \in \dot{R}_\beta^\delta)$$

$$\rightarrow \exists p \in P_{\delta+\beta} (p \Vdash_\delta r \wedge r \Vdash_\delta " p \Vdash_{\delta+\beta} \dot{\alpha} \text{ in } \dot{R}_\beta^\delta ")]$$

$$(6) \quad \dot{S}_\beta^\delta = (e_\beta^\delta(\dot{Q}_{\delta+\beta}))_{P_\delta}$$

$$(7) \quad 1 \Vdash_\delta " \langle \dot{R}_\beta^\delta \mid \beta \leq \alpha \rangle, \langle \dot{S}_\beta^\delta \mid \beta < \alpha \rangle \text{ は RCS-iteration} "$$

(1)-(5) は全ての $\beta \leq \alpha$ についての主張であり、(6) は全ての $\beta < \alpha$ についての主張である。また、

$$\langle \dot{R}_\beta^\delta \mid \beta \leq \alpha \rangle = \{ \text{op}(\dot{p}, \dot{R}_\beta^\delta) \mid \beta \leq \alpha, \dot{p} \in V^{P_\delta} \}$$

と表える。 $\langle \dot{S}_\beta^\delta \mid \beta < \alpha \rangle$ についても同様である。

注意. (1), 上の定義の (1)-(6) において、 $e_\beta^\delta(\dot{q})$ は $P_\delta * \dot{R}_\beta^\delta$ -name である。

また、(d) においては、 $P_\delta \leq P_\varepsilon$ なるので、 $\text{dom}(f)$ は P_δ の antichain である。

(2). 定義の (4), (5) により、 e_β^δ は dense embedding である。

(3). $e_\beta^\delta, \dot{R}_\beta^\delta, \dot{S}_\beta^\delta$ は単に、 $e_\beta, \dot{R}_\beta, \dot{S}_\beta$ と書くことも出来る。

定理. $\delta \leq \varepsilon$ とする。 $\alpha \leq \varepsilon - \delta$ に対し、 α までの Schwarz

$$\langle \Vdash_{\delta+\beta} \mid \beta \leq \alpha \rangle, \langle e_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle, \langle \dot{R}_\beta \mid \beta \leq \alpha \rangle, \langle \dot{S}_\beta \mid \beta < \alpha \rangle$$

が存在する。特に $\alpha = \varepsilon - \delta$ とすると、

$$e_{\varepsilon-\delta} : P_\varepsilon \xrightarrow{\text{dense}} P_\delta * \dot{R}_{\varepsilon-\delta}$$

$$1 \Vdash_\delta " \langle \dot{R}_\beta \mid \beta \leq \varepsilon - \delta \rangle, \langle \dot{S}_\beta \mid \beta < \varepsilon - \delta \rangle \text{ は RCS-iteration} "$$

証明は、 $\alpha \leq \varepsilon - \delta$ についての帰納法による。

参考文献

S. Shelah, Iterated forcing and changing cofinalities, Israel J. of Math. 40

(1981) pp. 1-32.

“ Proper Forcing. Lecture Notes in Mathematics, 940.

Springer (1982) pp. 304-353