

Extremal length の応用

東大・養 及川廣太郎

§1. 定義 このでは, "曲線" とは, 区間 $I = [0, 1]$,
または $(0, 1)$, または $[0, 1)$, または $(0, 1]$ あり, 複素
平面の中への連続写像のこととする. そのようなものが
"局所的に rectifiable" であるとは, I の任意の閉部分
区間に制限したものが rectifiable なることとする.

いま, 局所的に rectifiable な曲線 C あり或る, 或る
族 Γ が与えられたとする. 下半連続 (つまり $\forall \varepsilon$ に対し
 $\rho(z) \leq \liminf_{z \rightarrow \zeta} \rho(\zeta)$ をみたす) 非負な関数 ρ に対し

$$L(\Gamma; \rho) = \inf \left\{ \int_C \rho |dz| : C \in \Gamma \right\}$$

とおき, このような ρ すべてにわたっての上界

$$\lambda(\Gamma) = \sup \frac{L(\Gamma; \rho)^2}{\iint \rho^2 dx dy}, \quad \text{ただし } \frac{0}{0} = \frac{\infty}{\infty} = 0,$$

のことに曲線族 Γ の extremal length, また
 $m(\Gamma) = 1/\lambda(\Gamma)$ のことを Γ の module とする.

Ahlfors - Beurling [1] によって導入された概念である。

$$\text{いま } P(\Gamma) = \{ p : \geq 0, \text{ 下半連続}, L(\Gamma; p) \geq 1 \}$$

とおくとき

$$\lambda(\Gamma) = \begin{cases} 0 & \text{if } P = \emptyset \\ \left(\inf \{ \iint p^2 dx dy : p \in P(\Gamma) \} \right)^{-1} & \text{if } P \neq \emptyset \end{cases}$$

が成り立つことがすぐわかる。 $P \neq \emptyset$ で、しかも $\lambda > 0$ のとき、この "inf" を実現する p は、あらかは唯一に決ることが知られており、そのような p を extremal metric といい、必ずしも存在するとは限らない。 $P(\Gamma)$ の L^2 での閉包の中に在り、つねに、しかも唯一に存在することがいえる。これを generalized extremal metric といい。(これについては、例えば、文献 [16] の Appendix を参照。)

Extremal length の応用に際しては、下記の五つの性質、およびそれらの適当な変形・拡張、が現在までのところ、基本である：

(I) 等角写像で不変である；

また、矩形の両縦辺をつなぐ曲線のうち最も短い Γ について、

(II) $\lambda(\Gamma) = (\text{矩形の横長}) / (\text{矩形の高さ})$

(III) Extremal metric は $\rho(z) = \text{const}$

(IV) 矩形の両横辺をつなぐ曲線すべてから成る Γ^* について $\lambda(\Gamma^*) = 1 / \lambda(\Gamma)$

(V) 有限個の水平截線が加っても影響なし.

そして, これらのことが種々の形に拡張されて論じられているのである; [7], [11], [23] などにはほんの例にすぎない.

Extremal length に関連する量として, 次のものも重要である. 領域 Ω と, その閉包に含まれる集合 E_1, E_2 を与えたとき, Ω 内を E_1 と E_2 を結ぶ曲線全体から成る族の extremal length を, Ω に関する E_1 と E_2 の extremal distance とする. 以下, $\lambda_\Omega(E_1, E_2)$ とあらわすことにする.

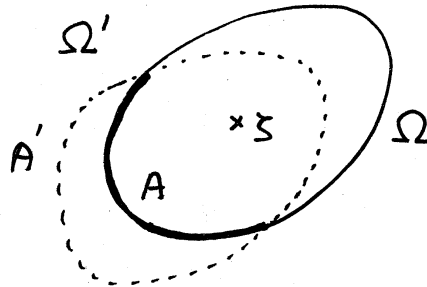
調和測度との関係 は, Ahlfors が 1947 年春に Harvard の講義で述べたことであるが, 文献にあらわしたのは Hersch の学位論文 (1955) である (大津賀 [7] も参照). Ω を双曲型の単連結領域とし, 点 $z \in \Omega$ および Ω 上の弧 (意味は明瞭であろう) を与えたとき, $u(z) = u(z; A, \Omega)$ は $A \neq 1$, $\partial\Omega - A \neq \emptyset$ とする調和測度 u の z における値とする. 一対, A に始点・終点をもつ γ と $\partial\Omega - A$ から分離する Ω 内の曲線全体 Γ の extremal

length は

$$\lambda(\Gamma) = \frac{2}{\pi} \Psi \left(\left(\tan \frac{\pi}{2} \cdot u(z; A, \Omega) \right)^2 \right)$$

であることが計算の結果わかる。こゝに Ψ は Teichmüller の極値領域の module をあらわす関数である。この結果、とくに、対応 $u \mapsto 1/\lambda$ は $(0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ の単調増加関数であることがわかる。

たとえば、右図の、実線であらわされた Ω , z , A と、実線の領域 Ω' , はみ出した部分 A' とに對して



$$u(z; A, \Omega) \geq u(z; A', \Omega')$$

が成り立つことはよく知られてゐるが、これは上記の關係から λ を用いて "別証明" することができ、そのみならず、實用に際しては λ を用いた方がし易いことがある (すなわち、調和関数の境界値を比べるより、次の性質 (1) を用いた方が簡単な場合がある)。

(向 1) Ω の単連結性を仮定から除くとき、どのようなこととなるだろうか。

§2. 性質 以下に列挙するもののうち (1) - (4) は著名であり, 多くの本に含まれている. [16] の Appendix にも, (1) - (4) と (6), (7) の証がある.

(1) Γ, Γ' において, もし $\forall c \in \Gamma$ に $\exists c' \in \Gamma'$ なら (たとえば $\Gamma \subset \Gamma'$ なら),

$$\lambda(\Gamma) \geq \lambda(\Gamma').$$

(2) $\Gamma \subset \bigcup_n \Gamma_n$ なら

$$\frac{1}{\lambda(\Gamma)} \leq \sum_n \frac{1}{\lambda(\Gamma_n)}$$

(これは Hersch (1955) による. それ以前に Strelbel [17] は $1/\sqrt{\lambda(\Gamma)} \leq \sum_n 1/\sqrt{\lambda(\Gamma_n)}$ を得た.)

(3) $\Gamma \supset \bigcup_n \Gamma_n$ であり, さらに, 互に素な Borel 集合 B_n があって, $\forall c_n \in \Gamma_n$ は B_n に含まれるなら,

$$\frac{1}{\lambda(\Gamma)} \geq \sum_n \frac{1}{\lambda(\Gamma_n)}.$$

(4) Γ, Γ_n において, $\forall c \in \Gamma$ に $\exists c_1 + c_2 + \dots \in c$ をみたす $c_n \in \Gamma_n$ があって, さらに, 互に素な Borel 集合 B_n なら $\forall c_n \in \Gamma_n$ は B_n に含まれるならば

$$\lambda(\Gamma) \geq \sum_n \lambda(\Gamma_n).$$

(5) (吹田 [10] による) Γ, Γ_n において, $\forall c_n \in \Gamma_n$ ($n=1, 2, \dots$) に対して $c_1 + c_2 + \dots \supset \exists c \in \Gamma$ ならば

$$\sqrt{\lambda(\Gamma)} \leq \sum_n \sqrt{\lambda(\Gamma_n)}.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{より一般に, } k_n \in \mathbb{Z} \text{ あり, } \forall c_n \in \Gamma_n \text{ に対して } k_1 c_1 + k_2 c_2 + \dots \supset \exists c \in \Gamma \text{ ならば} \\ \sqrt{\lambda(\Gamma)} \leq \sum_n |k_n| \sqrt{\lambda(\Gamma_n)}. \end{array} \right)$$

(6) Γ は上半平面の曲線であり, 少くも一方の端点が実軸の上にあるものから成る, あるいは, c の実軸に関する対称 (開曲線又は閉曲線) の全体を $\hat{\Gamma}$ とすると,

$$\lambda(\hat{\Gamma}) = 2\lambda(\Gamma).$$

(7) Extremal distance $\lambda_\Omega(E_1, E_2)$ について, もし Ω が上半平面に含まれ, しかも $\partial\Omega$ が実軸上の開区間を含むとき, 実軸に関する対称 $\hat{\Gamma}$ について

$$\lambda_\Omega(E_1, E_2) = 2\lambda_{\hat{\Omega}}(\hat{E}_1, \hat{E}_2).$$

(以上 (6) と (7) は, 実軸以外の直線・円弧に属する反転に属しても成り立つ)

(8) (吹田 [10] による) Ω と E_1, E_2, E_3 を考えたとき, extremal distance に関する三角不等式は成立しないが,

$$\lambda_{\Omega}(E_1, E_2) < \infty, \quad \lambda_{\Omega}(E_2, E_3) < \infty$$

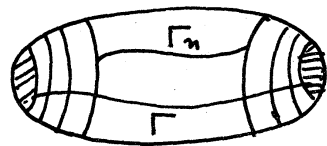
$$\text{ならば } \lambda_{\Omega}(E_1, E_3) < \infty.$$

(9) (吹田 [19], Ziemer [26] による).

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \cdots, \quad \Gamma = \bigcup_n \Gamma_n \text{ なら}$$

$$\lambda(\Gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\Gamma_n).$$

(10) 右図のような場合, 適当な
条件の下に



$$\lambda(\Gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\Gamma_n)$$

が成り立つというもので, exhaustion の場合は
Strebel [18], Marden-Rodin [12] による. 一般
の場合は Wolontis の学位論文にあるが不完全である.
吹田 [21] は, かなり弱い条件の下に証明している.
くわしくは, これらの原論文をみて頂きたい.

§3. 応用. きわめて多岐に亘るので, すべてを扱う
わけにはいかない. 以下は, 筆者の経験したもののうちの話題
である.

(1) 単連結領域の字像半径を extremal length に
よってあらわすことができる. この際 extremal metric
は Riemann 字像関数と密接な関係がある. このことは,
1930 年代の Teichmüller の仕事にまでさかのぼること

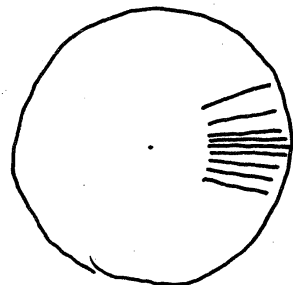
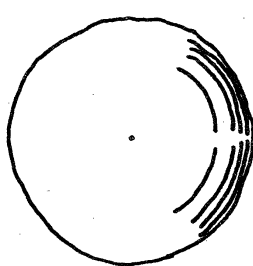
がわかる。その後、これらのことは、一般の連結度の領域や Riemann 面に、種々の方向に大幅に拡張されて論ぜられてゐる。また "空像半径が ∞ " ということを一般化したものか、種々の "null class" であるか、その一部は extremal length を用いて議論できる。[7], [23], [16] などは一例である。つぎのものは、未解決の問題である：

(問題 2) 平面領域 Ω の境界成分 γ に着目する。 $\bar{\Delta} \subset \Omega$ であるような円板 Δ をとり extremal distance $\lambda_{\Omega}(\Delta, \gamma)$ と考えよ。このとき、もし $\lambda_{\Omega}(\Delta, \gamma) = \infty$ ならば、 Ω を適宜な等角写像で γ が 1 点に写るものようにすることができようか？ ([16] の 342 頁の #2)。

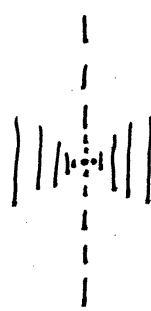
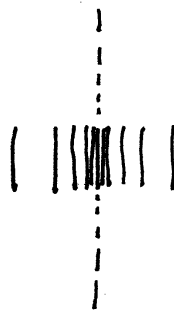
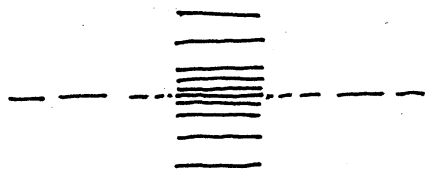
(2) 等角写像の境界対応。単連結領域の場合、prime end などに因る Carathéodory の理論を extremal length を利用して論ずることが出来る。Ahlfors や、Schlesinger のしごとがあり、例えは [7], [23] などにでてゐる。これらのことを一般の領域に議論することも、少しできる ([10], [22] など)。けれども、一般の領域の境界対応は未だにわかってゐないことが多くい。例えは、下記の 2 つの問題は、あるいは extremal length を用いてしうべきことが出来るかもしれない (できるかもしれない)。

い加) ものである。

(内題 3) 下左図のような, 無限個の円弧截線の入った円板を, 放射截線入りの円板に等角写像しようとするとき, 下右図のように切り込み (incision) が生じる場合とある ([16], p. 166). 円弧截線入りのような条件をみたすと, 切り込みが生じるか, 判定条件を述べよ。



(内題 4) 下左図のような, 実軸と虚軸に関して対称な水平截線領域を垂直截線領域に等角写像する。像領域は, 下中図のように中央の線分が線分に射影するとき, 下右図のように点に射影するとき, 双方ありうが, どのような条件のとき, どちらになるか, 判定条件を述べよ (下中図の場合の例は, [10'] の 9° に与えられている)。



(3) 等角写像の境界における等角性 は次のように定式化して論ずる。 $z = x + iy$ 平面の帯状領域 $\{z \mid |y| < \frac{\pi}{2}\}$ を記号 S とする。 D は $w = u + iv$ 平面の双曲型等角連結領域で、 $\forall \varepsilon > 0$ に對し $\{w \mid a < u, |v| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\} \subset D$ をみたす a が存在するものとする。 S から D への等角写像 $w = f(z) = u(z) + iv(z)$ で、 $z \rightarrow +\infty$ と $w \rightarrow +\infty$ に對し $z_n \pm \infty$ のようにして、有限な極限値

$$(i) \lim (y - v(z)), \quad (ii) \lim (z - f(z)),$$

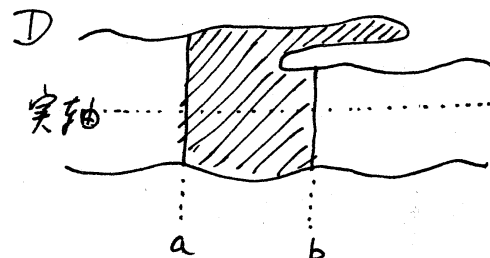
たいてい $z = x + iy$ は $|y| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ として $x \rightarrow +\infty$ とする、の存在を論ずる。

このうち、(i) については、Painlevé (1891), Lichtenstein (1911) を経て Carathéodory (1914) に於いて扱われる。Carathéodory の結果は、今日、調和測度の知識からみれば、殆ど自明と云つてよい (何れにせよ、小松勇佐氏の、等角写像論, (上), p.384 をみればよい)。Ostrowski (1937) はつぎの結果を示す：上記の (i) の有限な極限値が存在するための必要十分条件は、 $\forall \varepsilon > 0$ に對し、 $\{w \mid |w - (b + i\frac{\pi}{2})| < \varepsilon\} \not\subset D$, $\{w \mid |w - (b - i\frac{\pi}{2})| < \varepsilon\} \not\subset D$ なる $b > a$ が成り立つような a が存在することである。この証明は、4つの4角は極めて複雑であるが、調和測度と extremal length

の定理(§1)を用いると比較的に簡単に証明することが出来る([4]).

つぎに(ii)は, Carathéodory (1929), Wolff (1926), Ahlfors (1930) で述べられて来たが, 有限な極限値の存在するための必要十分条件をつぎのように与えることが出来る

([4]): 十分大きい任意の $a < b$ に対し, 図のように D の2つの cross-cuts γ と η をとり, それらで囲まれた部分(図の斜線の部分)に関する両 cross-cuts の extremal-distance



を $\lambda(a, b)$ とおくとき, 問題の必要十分条件は

$$\lambda(a, b) = \frac{b-a}{\pi} + o(1), \quad b > a \rightarrow \infty$$

が成り立つことである。

この条件から, 与えられた領域でいかなる種類の必要条件や十分条件を導くことが出来るであろうか? たとえば [2], [25] で与えられている条件 (Warschawski と Eke によつて) などには, いくつかのテストケースがある。

なお, (ii) の極限値は角微係数とよばれており, 微係数の一種の一般化なのであるが, Warschawski [24] は, 高次微係数に相当するものを考えている。このようなもの

も extremal length を利用して論ずることが出来るのではあるか？

(4) Problem of conformal pasting ([8], [9]). 本質的な部分は、つぎのような単純な場合を考えただけで十分である。 $y = f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ に定義された狭義単調増加な連続関数で、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ (複号同順) とする。帯状領域 $S = \{x + iy \mid 0 < y < 1\}$ を考える。いま $\bar{S}$ において

点 x と点 $f(x) + i$ を identify する

ならば、位相的には 2 重連結領域と同位相な面 X が得られるが、これに解析構造を入れてリーマン面とし、その際 S の複素平面 $\mathbb{C}$ の部分領域としての解析構造を保つ (つまり S から X への自然な射影が正則写像となるようにする) ことは、常に出来る限り限らる。もし出来るならば f は 解析的な接合を許す ということになる。

この問題には、擬等角写像の境界対応を利用して、解析的な接合を許すための十分条件を与えることが出来る。Lehto [6] はこれを拡張してつぎのような十分条件を与える：
 $-\infty < x < \infty$ なる $\forall x$ に對して

$$(*) \quad p(t) = \begin{cases} O(\log \frac{1}{t}) & t \rightarrow 0 \\ O(\log t) & t \rightarrow \infty \end{cases}$$

をみたす実数 $p(t)$ が存在して,

$$\frac{1}{p(t)} \leq \frac{f(x+t) - f(x)}{f(x) - f(x-t)} \leq p(t)$$

が $\forall x, \forall t$ で成り立てば, f は解析的な接合を許す.
 なお, 条件 (*) をゆきめて, $\log t$ の代りに $\log t \cdot \log \log t$
 や, もっと沢山 iterate (たものも同様な十分条件を
 与える.

— 5, extremal length を利用することによってつぎ
 のような例を得ることからわかるのである ([8]):

$$f_1(x) = \begin{cases} x^\alpha & x \geq 0, \\ x & x \leq 0 \end{cases}, \quad \alpha > 1$$

は解析的接合を許さぬ;

$$f_2(x) = \begin{cases} x / \exp(\log \frac{1}{x})^\gamma, & x > 0, \\ x & , \quad x \leq 0 \end{cases}, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2}$$

は解析的接合を許す.

(例 5) Lehto の条件において, (*) は $t \rightarrow 0$ に対して
 $p(t) = O(\exp(\log 1/t)^\gamma)$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, $t \rightarrow \infty$
 に対してもこれに準ずるもの, にまづゆき得るものがある;
 か?

なお $\frac{1}{2} \leq \gamma$ に対しては, くわしいことはわかってゐる

いか、 γ を大きくとり f_1 に似て来て、解析的接合を許さなくなるようにある。

文 献

- [1] Ahlfors, L. V. and Beurling, A. Conformal invariants and function-theoretic null-sets. Acta Math. 83 (1950), 101-129.
- [2] Eke, B. G. Comparison domains for the problem of the angular derivative. Comment. Math. Helv. 46 (1971), 98-112.
- [3] Jenkins, J. A. and Oikawa, K. On results of Ahlfors and Hayman. Ill. J. Math. 15 (1971), 664-671.
- [4] ----- Conformality and semi-conformality at the boundary. J. n. u. a. Math. 291 (1977), 92-117.
- [5] ----- On Ahlfors' second fundamental inequality. Proc. A. M. S. 62 (1977), 266-270.
- [6] Lehto, O. Homeomorphisms with a given dilatation. Proc. 15th Scand. Congr. 1968. Springer Lec. Note. 118.
- [7] Ohtsuka, M. Dirichlet problem, extremal length, and prime ends. Van Nostrand, 1970.
- [8] Oikawa, K. Welding of polygons and the type of Riemann surfaces. Kōdai Math. Sem. Rep. 13 (1961), 37-52.
- [9] ----- A remark to the construction of Riemann surfaces by welding. J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I 27 (1963), 213-216.
- [10] Oikawa, K. and Suita N. On conformal mappings onto incised radial slit disks. Kōdai Math. Sem. Rep. 22 (1970), 45-52.
- [10'] ----- On parallel slit mappings. Ibid. 16 (1964), 249-254.
- [11] Rodin, B. The method of extremal length. Bull. A.M.S. 80 (1974), 589-606.
- [12] Marden, A. and Rodin, B. Extremal and conjugate extremal distance on open Riemann surfaces with applications to

- circular-radial slit mappings. Acta Math. 115 (1966), 237-269.
- [13] Rodin, B. and Warschawski, S. E. Extremal length and the boundary behavior of conformal mappings. Ann. Acad. Sci. Fenn. A-I, 2 (1976), 469-500.
 - [14] ----- Extremal length and univalent functions. I. The angular derivative. Math. Z. 153 (1977), 1-17.
 - [15] ----- Extremal length and univalent functions. II. Integral estimates of strip mappings. To appear in J. Math. Soc. Japan.
 - [16] Sario, L. and Oikawa, K. Capacity functions. Springer-Verlag, 1969.
 - [17] Strebel, K. Eine Ungleichung für extremale Längen. Ann. Acad. Sci. Fenn. A-I 90 (1951), 8 pp.
 - [18] ----- Die extremale Distanz zweier Enden einer Riemannschen Fläche. Ibid. 179 (1955), 22pp.
 - [19] Suita, N. On a continuity lemma of extremal length and its applications to conformal mapping. Kōdai Math. Sem. Rep. 19 (1967), 129-137.
 - [20] ----- On slit rectangle mappings and continuity of extremal length. Ibid. 425-438.
 - [21] ----- On continuity of extremal distance and its applications to conformal mappings. Ibid. 21 (1969), 236-251.
 - [22] ----- Carathéodory's theorem on boundary elements of an arbitrary plane region. Ibid. 413-417.
 - [23] ----- Kindai Kansuron II. 1977, Morikita. In Japanese.
 - [24] Warschawski, S. E. On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping. Trans. Amer. Math. Soc. 51 (1935), 310-340.
 - [25] ----- Remarks on the angular derivative. Nagoya Math. J. 41 (1971), 19-32.
 - [26] Ziemer, W. Extremal length and conformal capacity. Trans. A. M. S. 126 (1967), 460-473.