

例外リー群のループ空間の $\mathbb{Z}_2$ 係数 homology

京大 理学部 小島 一元

G が compact, connected simple Lie 群であるとき、そのループ空間 ΩG の homology の計算については R. Bott が generating variety と呼ばれる homogeneous space を用いる方法を示し [4] $Sp(n)$ を除く古典群について $H_*(\Omega G)$ を Hopf algebra として完全に決定した。最近 T. Watanabe はこの方法を例外 Lie 群 G_2, F_4 について用い、 $H_*(\Omega G)$, $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_p)$ ($p=2, 3$) の Steenrod operation の dual operation を込めた意味での Hopf algebra structure を決定した。

一方、 $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_p)$ については Eilenberg-Moore spectral sequence を用いることによって、その ring structure を比較的容易に決定することができる。[7], [8]。そこで

問題 $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ を operational structure を込めた Hopf algebra として決定せよ。(G は E_6, E_7, E_8 の type を持つ simple Lie 群.)

ϕ が diagonal であるとき、 $\bar{\phi}(x) = \phi(x) - 1 \otimes x - x \otimes 1$ とおき $\mathbb{Z}_2^{i_*}$ を

$$\langle S_2^i \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, S_2^i \beta \rangle \quad (\alpha \in H^*(X; \mathbb{Z}_2), \beta \in H_*(X; \mathbb{Z}_2), \langle, \rangle \text{ は Kronecker})$$

で定義される operation とするとき,

結果 適当な生成元を選べば.

$$(i) \quad H_*(\Omega E_6; \mathbb{Z}_2) = \Lambda(\chi_2) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_4, \chi_8, \chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{16}, \chi_{22}],$$

$$\overline{\phi}(\chi_i) = 0 \text{ for } i = 2, 10, 14, 22. \quad \overline{\phi}(\chi_4) = \chi_2 \otimes \chi_2,$$

$$\overline{\phi}(\chi_8) = \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 + \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 + \chi_4 \otimes \chi_4,$$

$$\overline{\phi}(\chi_{16}) = \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 + \chi_4 \otimes \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_4$$

$$+ \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 + \chi_8 \otimes \chi_8,$$

$$S_2^2 \chi_4 = \chi_2, S_2^2 \chi_8 = \chi_2 \cdot \chi_4, S_2^4 \chi_8 = \chi_4, S_2^2 \chi_{10} = \chi_4^2, S_2^4 \chi_{14} = \chi_{10}, S_2^2 \chi_{16} = \chi_{14} + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8$$

$$S_2^4 \chi_{16} = \chi_4 \cdot \chi_8, S_2^8 \chi_{16} = \chi_8, S_2^2 \chi_{22} = \chi_{10}^2, S_2^8 \chi_{22} = \chi_{14}.$$

$$(ii) \quad H_*(\Omega E_7; \mathbb{Z}_2) = \Lambda(\chi_2, \chi_4, \chi_8) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{16}, \chi_{18}, \chi_{22}, \chi_{26}, \chi_{34}],$$

$$\overline{\phi}(\chi_i) = 0 \text{ for } i = 2, 10, 14, 18, 22, 26, 34. \quad \overline{\phi}(\chi_4) = \chi_2 \otimes \chi_2,$$

$$\overline{\phi}(\chi_8) = \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 + \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 + \chi_4 \otimes \chi_4,$$

$$\overline{\phi}(\chi_{16}) = \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 + \chi_4 \otimes \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_4$$

$$+ \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 + \chi_8 \otimes \chi_8,$$

$$S_2^2 \chi_4 = \chi_2, S_2^2 \chi_8 = \chi_2 \cdot \chi_4, S_2^4 \chi_8 = \chi_4, S_2^4 \chi_{14} = \chi_{10}, S_2^2 \chi_{16} = \chi_{14} + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8,$$

$$S_2^4 \chi_{16} = \chi_4 \cdot \chi_8, S_2^8 \chi_{16} = \chi_8, S_2^2 \chi_{22} = \chi_{10}^2, S_2^8 \chi_{22} = \chi_{14}, S_2^4 \chi_{26} = \chi_{22}, S_2^2 \chi_{34} = \chi_{16}^2,$$

$$S_2^{16} \chi_{34} = \chi_{18}.$$

$$(iii) \quad H_*(\Omega E_8; \mathbb{Z}_2) = \Lambda(\chi_2, \chi_4, \chi_8, \chi_{14}) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_{16}, \chi_{22}, \chi_{26}, \chi_{28}, \chi_{34}, \chi_{38}, \chi_{46}, \chi_{58}],$$

$$\overline{\phi}(\chi_i) = 0 \text{ for } i = 2, 14, 22, 34, 38, 46, 58. \quad \overline{\phi}(\chi_4) = \chi_2 \otimes \chi_2,$$

$$\overline{\phi}(\chi_8) = \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 + \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 + \chi_4 \otimes \chi_4,$$

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(\chi_{16}) &= \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 + \chi_4 \otimes \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_4 \\ &\quad + \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 + \chi_8 \otimes \chi_8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_2^2 \chi_4 &= \chi_2, S_2^2 \chi_8 = \chi_2 \cdot \chi_4, S_2^4 \chi_8 = \chi_4, S_2^2 \chi_{16} = \chi_4 + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8, S_2^4 \chi_{16} = \chi_4 \cdot \chi_8, \\ S_2^8 \chi_{16} &= \chi_8, S_2^8 \chi_{22} = \chi_{14}, S_2^4 \chi_{26} = \chi_{22}, S_2^2 \chi_{28} = \chi_{26}, S_2^2 \chi_{34} = \chi_{16}^2, S_2^4 \chi_{38} = \chi_{34}, \\ S_2^2 \chi_{46} &= \chi_{22}^2, S_2^8 \chi_{46} = \chi_{38}, S_2^2 \chi_{58} = \chi_{28}^2,\end{aligned}$$

但し、 χ_i は degree i の生成元を表わし、他の $S_2^{2^i}$ (生成元) はすべて 0。
 計算は G の 3-connective fibre space $\widehat{G}$ および $\Omega \widehat{G}$ の loop space $\Omega \widehat{G}$ を考えるとき、まず $H^*(\widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ は operation 付き Hopf algebra として完全に決定でき、 $H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ から求めた $H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ と Eilenberg-Moore spectral sequence を用いて比較すると $H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ の operational structure がかなりわかりこれをもとにして $H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ の diagonal structure をほとんど決めることができる。さらに $\Omega \widehat{G} \rightarrow \Omega G \rightarrow K(\mathbb{Z}_2)$ なる fibration を考えると $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ を operation 付き Hopf algebra として大略決定することができる。これだけではわからない operation についてはさらに別の killing を考えることにより決定可能である。ここで unstable homotopy theory を必要とする relation $S_2^2 \chi_2 = \chi_{10}^2$ は次の Watanabe の結果から示される。

$H_*(\Omega F_4; \mathbb{Z}_2)$ (Watanabe) 適当に生成元を選べば

$$H_*(\Omega F_4; \mathbb{Z}_2) \cong \wedge(\chi_2) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_4, \chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{22}]$$

$$\bar{\phi}(\chi_i) = 0 \text{ for } i=2, 10, 14, 22, \quad \bar{\phi}(\chi_4) = \chi_2 \otimes \chi_2$$

$$S_2^3 \chi_4 = \chi_2, S_2^2 \chi_{10} = \chi_4^2, S_2^4 \chi_{14} = \chi_{10}, S_2^8 \chi_{22} = \chi_{14}.$$

§ 1. 3-connective fibre space

G を compact connected simple Lie 群とすると次の結果はよく知られている。

Prop. 1.1 $\pi_0(G) = \pi_1(G) = \pi_2(G) = 0$ $\pi_3(G) \cong \mathbb{Z}$ よう また.

Prop. 1.2 $\chi_3 \in H^3(G) \cong \mathbb{Z}$ を generator とするとき $\chi_3: G \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$ の homotopy fibre $\widetilde{G}$ は associative H-space で $i: \widetilde{G} \rightarrow G$ なる inclusion および $i^* \chi_3$ は H-map.

$H^*(\widetilde{G}; \mathbb{Z}_2)$ ($G = F_4, E_6, E_7, E_8$) は Kachi に よって計算されているがその基本となるのは $H^*(G; \mathbb{Z}_2)$ に関する Anaki および Shikata の結果である。[1], [2].

Theorem 1.3 $H^*(F_4; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha_3]/(\alpha_3^4) \otimes \Lambda(S_2^2 \alpha_3, \alpha_{15}, S_2^8 \alpha_{15}),$

$$H^*(E_6; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha_3]/(\alpha_3^4) \otimes \Lambda(S_2^2 \alpha_3, S_2^4 S_2^2 \alpha_3, \alpha_{15}, S_2^8 S_2^4 S_2^2 \alpha_3, S_2^8 \alpha_{15}),$$

$$H^*(E_7; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha_3, S_2^2 \alpha_3, S_2^4 S_2^2 \alpha_3]/(\alpha_3^4, (S_2^2 \alpha_3)^4, (S_2^4 S_2^2 \alpha_3)^4)$$

$$\otimes \Lambda(\alpha_{15}, S_2^8 S_2^4 S_2^2 \alpha_3, S_2^8 \alpha_{15}, S_2^4 S_2^8 \alpha_{15}),$$

$$H^*(E_8; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha_3, S_2^2 \alpha_3, S_2^4 S_2^2 \alpha_3, \alpha_{15}]/(\alpha_3^{16}, (S_2^2 \alpha_3)^8, (S_2^4 S_2^2 \alpha_3)^4, \alpha_{15}^8)$$

$$\otimes \Lambda(S_2^8 S_2^4 S_2^2 \alpha_3, S_2^8 \alpha_{15}, S_2^4 S_2^8 \alpha_{15}, S_2^2 S_2^4 S_2^8 \alpha_{15})$$

α_i は degree i の generator. しかもよく知られた inclusion

$F_4 \hookrightarrow E_6 \hookrightarrow E_7 \hookrightarrow E_8$ に対しそれぞれ最大な群の中で i は totally non-homologous to zero になっている。以下では $S_2^j \alpha_k = \alpha_{j+k}$ と略記して表すことにする。

Theorem 1.4 (Thomas) $H^*(G; \mathbb{Z}_2)$ ($G = E_6 F_7, E_8$) $\cong S_2^2 \alpha_{15} = S_2^8 S_2^4 S_2^2 \alpha_3$.

$i: \tilde{G} \rightarrow G$ を fibre の inclusion とし $j: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ を group の inclusion $G \rightarrow G'$ から induce される Hopf-map とする。

Theorem 1.5 $H^*(F_4; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\partial_8] \otimes \Delta(\partial_9, \partial_{11}, \partial_{15}, \partial_{23})$

$$H^*(\tilde{E}_6; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\partial_{32}] \otimes \Delta(\partial_9, \partial_{11}, \partial_{15}, \partial_{17}, \partial_{23}, \partial_{33})$$

$$H^*(\tilde{E}_7; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\partial_{32}] \otimes \Delta(\partial_{11}, \partial_{15}, \partial_{19}, \partial_{23}, \partial_{27}, \partial_{33}, \partial_{35})$$

$$H^*(\tilde{E}_8; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\partial_{15}, \partial_{32}] / (\partial_{15}^4) \otimes \Delta(\partial_{23}, \partial_{27}, \partial_{29}, \partial_{31}, \partial_{35}, \partial_{39}, \partial_{47})$$

∂_i は degree i の generator, Δ は simple system を表わす。さらに $i^*(\alpha_{15}) = \partial_{15}$, $i^*(\alpha_{23}) = \partial_{23}$ (G が F_4, E_6, E_7, E_8) $i^*(\alpha_{27}) = \partial_{27}$ ($G = E_7, E_8$) $i^*(\alpha_{29}) = \partial_{29}$ ($G = E_8$) でありさらに同じ degree をもつ ∂_i は j^* で対応している。

Theorem 1.6 $S_2^4 \partial_{11} = \partial_{15}$. これは H. Kachi [5] の中で示された。

Prop. 1.7 Theorem 1.5 の ∂_i はすべて primitive にとれる。

(*) 1511 には " $G = E_8$ のとき $\overline{\phi}(\partial_i) = 0$, $i \neq 47$ は次元の関係より明らか。次元の理由により $\overline{\phi}(\partial_{47}) = a \partial_{15} \otimes \partial_{32} + b \partial_{32} \otimes \partial_{15}$ である。 $(S_2 \otimes S_2) \overline{\phi} = \overline{\phi} \circ S_2$ 存のて $\overline{\phi}(S_2^8 \partial_{47}) = a \partial_{23} \otimes \partial_{32} + b \partial_{32} \otimes \partial_{23}$ とこの次元の理由により $S_2^8 \partial_{47} = C \partial_{23} \cdot \partial_{32}$ だから $a = b = C$ によって ∂_{47} とし $\partial_{47} + C \partial_{15} \cdot \partial_{32}$ ととればこれは primitive. 他の場合にも同様にして決めることができる。■

Prop. 1.8 Theorem 1.5 で Δ は $\wedge$ とかきなおせる。

これは前 Prop. より容易にわかる。

Prop. 1.9 Theorem 1.5 の $\tilde{F}_i$ は universally transgressive.

$$\textcircled{1} \text{ 実際 } H^*(B\tilde{F}_4; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\beta_9, \beta_{10}, \beta_{12}, \beta_{16}, S_2^8 \beta_9, \beta_{24}, S_2^{16} S_2^8 \beta_9, \dots],$$

$$H^*(B\tilde{E}_6; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\beta_{10}, \beta_{12}, \beta_{16}, \beta_{24}, \beta_{32}, \beta_{34}, S_2^{32} \beta_{33}, S_2^{64} S_2^{32} \beta_{33}, \dots],$$

$$H^*(B\tilde{E}_7; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\beta_{12}, \beta_{16}, \beta_{20}, \beta_{24}, \beta_{28}, \beta_{32}, \beta_{34}, \beta_{36}, S_2^{32} \beta_{33}, \dots],$$

$$H^*(B\tilde{E}_9; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\beta_{16}, \beta_{24}, \beta_{28}, \beta_{30}, \beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{34}, \beta_{36}, \beta_{40}, \beta_{48}, S_2^{32} \beta_{33}, \dots],$$

よって Comparison theorem を用いて 1) を 明かす。

Prop 1.10 Theorem 1.5 に おいて

$$(i) H^*(\tilde{F}_4; \mathbb{Z}_2) \tau(S_2^1 \partial_8 = \partial_9, S_2^2 \partial_9 = \partial_{11}, S_2^1 \partial_{15} = 0,$$

$$(ii) H^*(\tilde{E}_6; \mathbb{Z}_2) \tau(S_2^2 \partial_9 = \partial_{11}, S_2^8 \partial_9 = \partial_{17}, S_2^2 \partial_{15} = 0, S_2^{16} \partial_{17} = \partial_{33}, S_2^1 \partial_{32} = \partial_{33},$$

$$(iii) H^*(\tilde{E}_7; \mathbb{Z}_2) \tau(S_2^8 \partial_{11} = \partial_{19}, S_2^4 \partial_{15} = 0, S_2^4 \partial_{19} = 0, S_2^{16} \partial_{19} = \partial_{35}, S_2^8 \partial_{27} = 0,$$

$$S_2^1 \partial_{32} = \partial_{33}, S_2^2 \partial_{33} = \partial_{35}.$$

$$(iv) H^*(\tilde{E}_9; \mathbb{Z}_2) \tau(S_2^{16} \partial_{23} = 0, S_2^8 \partial_{27} = 0, S_2^1 \partial_{29} = \partial_{15}^2, S_2^4 \partial_{29} = 0, S_2^1 \partial_{32} = \partial_{33}$$

$$S_2^2 \partial_{33} = \partial_{35}, S_2^4 \partial_{35} = \partial_{39}, S_2^8 \partial_{39} = \partial_{47}.$$

\textcircled{1} 証明の方針を次のようにする。まず $\tilde{E}_8$ において fibration

$\tilde{E}_8 \rightarrow E_8 \xrightarrow{p} K(\mathbb{Z}, 3)$ の $\mathbb{Z}_2$ -cohomology Serre spectral sequence を考える。

Theorem 1.5 と Prop. 1.9 より 明らかに $\tau(\partial_i) = 0$ for $i = 15, 23, 27, 29, \tau(\partial_{15}^2) = 0$

同様に $\tau(\partial_i) \neq 0$ for $i = 32, 33, 35, 39, 47$ 。一方 $H^*(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[v_3, S_2^2 v_3,$

$S_2^4 S_2^2 v_3, S_2^8 S_2^4 S_2^2 v_3, \dots]$ だから 明らかに $p^* v_3 = d_3 \tau$ あり transgression τ

kill する元は $H^*(E_8; \mathbb{Z}_2)$ の relation に 対応する $v_3^{16}, (S_2^2 v_3)^8,$

$(S_2^4 S_2^2 v_3)^4, (S_2^8 S_2^4 S_2^2 v_3)^2$, と $S_2^{16} S_2^8 S_2^4 S_2^2 v_3$ 。よって $\tau(\partial_{32}) = S_2^{16} S_2^8 S_2^4 S_2^2 v_3,$

$\tau(\partial_{33}) = (S_2^8 S_2^4 S_2^2 v_3)^2, \tau(\partial_{35}) = (S_2^4 S_2^2 v_3)^4, \tau(\partial_{39}) = (S_2^2 v_3)^8, \tau(\partial_{47}) = v_3^{16}$

あとは Adem relation と $\tau \circ S_2^i = S_2^i \circ \tau$ により結果をうる。 $\widehat{G} = E_7$ のときはこの結果と naturality により $S_2^1 \partial_{32} = \partial_{33}, S_2^2 \partial_{33} = \partial_{35}, S_2^4 \partial_5 = 0, S_2^8 \partial_{27} = 0$ などが得られ他のものについて $\widehat{E}_8$ のときと同様にすればよい。 $\widehat{E}_6, \widehat{F}_4$ のときも同様。 ■

$H^*(\widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ ($G = F_4, E_6, E_7, E_8$) は Prop. 1.7 により primitively generated. S_2^i は primitivity を保つかさ Steenrod algebra の構造より $H^*(\widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ の operational structure を完全に決めるためには S_2^i (generator) を決めればよいので Theorem 1.6 と Prop. 1.10 をすべてつかうことができる。

§ 2. $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2), H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$

ΩG は homotopy commutative H-space であり従って $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ は可換環であるが Bott によりさらに $H_*(\Omega G)$ が even で free しか成り立っていない有限生成であることが示されている。 Borel の定理により $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2) \cong (\bigotimes_{i \in I} A_i) \otimes (\bigotimes_{j \in J} B_j) \otimes (\bigotimes_{k \in K} C_k)$, $A_i \cong \Lambda(x_i)$, $B_j \cong \mathbb{Z}_2[\partial_j]/(\partial_j^{2^j})$, $C_k \cong \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_k]$ I, J, K は finite set. すると $\text{Ext}_{H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong (\bigotimes_{i \in I} \mathbb{Z}_2[sx_i]) \otimes (\bigotimes_{j \in J} (\Lambda(s\partial_j) \otimes \mathbb{Z}_2[\partial_j])) \otimes (\bigotimes_{k \in K} \Lambda(s\mathbb{Z}_k))$ ここで $s\alpha$ は bideg $= (1, \deg \alpha)$, ∂_j は bideg $= (2, 2^j \deg \partial_j)$ なる元。

さて ΩG の Eilenberg-Moore spectral sequence は Hopf algebra spectral sequence になっている。 すなわち各 E_n term は bigraded, bi-commutative, bi-associative Hopf algebra であり d_n は derivative か coderivative. また各 $s\alpha, \partial\beta$ は primitive (E_2 -term) であり E_2 -term, E_∞ -term の Hopf algebra structure は geometric に定義されたものと compatible.

Theorem 2.1 $H_*(\Omega F_4; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\chi_2) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_4, \chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{22}]$,

$$H_*(\Omega E_6; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\chi_2) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_4, \chi_8, \chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{16}, \chi_{22}],$$

$$H_*(\Omega E_7; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\chi_2, \chi_4, \chi_8) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{16}, \chi_{18}, \chi_{22}, \chi_{26}, \chi_{34}]$$

$$H_*(\Omega E_8; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\chi_2, \chi_4, \chi_8, \chi_{14}) \otimes \mathbb{Z}_2[\chi_{16}, \chi_{22}, \chi_{26}, \chi_{28}, \chi_{34}, \chi_{38}, \chi_{46}, \chi_{58}]$$

χ_i は degree i の generator.

① 証明の大略のみ述べる。 $H_*(\Omega G; \mathbb{Q})$ を考えよと、

$$H_*(\Omega F_4; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\chi_2, \chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{22}]$$

$$H_*(\Omega E_6; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\chi_2, \chi_8, \chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{16}, \chi_{22}]$$

$$H_*(\Omega E_7; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\chi_2, \chi_{10}, \chi_{14}, \chi_{18}, \chi_{22}, \chi_{26}, \chi_{34}]$$

$$H_*(\Omega E_8; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\chi_2, \chi_{14}, \chi_{22}, \chi_{26}, \chi_{34}, \chi_{38}, \chi_{46}, \chi_{58}] \text{ が知られてい$$

る。今 $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ に $\chi^2=0$ なる type の relation があると $H_*(\Omega G; \mathbb{Q})$ が polynomial ならば $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ に $2^h \cdot \deg \chi$ の degree を持つ indecomposable element があるはず。ところが $b_1 \deg S\beta = (1, 4k)$ differential が co-derivative であることから、 $dn(S\beta)=0$ を次元の関係から示せる。よって $H^*(G; \mathbb{Z}_2)$ に degree $4k+1$ の indecomposable element を得る。逆に $H^*(G; \mathbb{Z}_2)$ に $4k+1$ の indecomposable element があつたとすると再び spectral sequence 中の Hopf algebra structure を用いることによりこれは filtration degree 1 の元に対応して $H_*(\Omega G; \mathbb{Q})$ をみると $G=E_6$ の χ_8, χ_{16} 以外は $(4k+2) \dim$ のものをのみたから $H^*(G; \mathbb{Z}_2)$ の $4k+1 \dim$ の indecomposable elem. は $H^*(E_6; \mathbb{Z}_2)$ の α_4, α_7 を除いて $H^*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ の relation に対応して α_4, α_7 が $S\chi_8, S\chi_{16}$ に対応してゐることから

易にわかる。これによって結果を得る。cf. T. Petrie [7]. ■

次に $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ を求める。Borel の定理により, χ_i の dual element を χ_i^* と書くとき,

$$H^*(\Omega G; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\chi_i^*] / (\chi_i^{2^p}) \otimes A \quad \text{の形をしているが,}$$

$H^2(\Omega G) \cong \mathbb{Z}$ の generator を表わす map を $f: \Omega G \rightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$ とし $H_*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(u_2, u_4, \dots, u_{2^k}, \dots)$ (ここで u_{2^k} は v_{2^k} が $H^*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}_2)$ の 2 次元の generator であるとき v_{2^k} の dual を表わす。) とするとき,

Lemma 2.2 Theorem 2.1 で $\chi_{2^k} \in H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ を次の式をみたすようにとれる:

$f_* \chi_{2^k} = u_{2^k} \quad \text{for } G = F_4, k=1, 2, \text{ or } G = E_6, E_7, E_8, k=1, 2, 3, 4.$

① 例えは $K(\mathbb{Z}, 2)$ の Bilenberg-Moore s.s. と ΩG のそれとを比較す本がよい。■

によれば $G = F_4$ のとき $p \geq 2$, $G = E_6, E_7, E_8$ のとき $p \geq 4$ がわかる。

とこの例えは $G = F_4$ のとき $p \geq 3$ とすると $\chi_{2^3}^{2^2} \neq 0$ この元は $H^*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ で primitive だが $\mathbb{Z} \otimes H_4(\Omega F_4; \mathbb{Z}_2)$ に 8 次元の non zero element を得るがこれは Theorem 2.1 に反す。同様にして $G = E_6, E_7, E_8$ のときは $p=4$ であることが示される。

ここで $S' \rightarrow \Omega G \rightarrow \Omega G$ なる fibration を用いれば Gysin sequence より 明らかに結果を得ることが出来る;

Prop. 2.3 $H_*(\Omega F_4; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\mathbb{Z}_7) \otimes \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{22}]$,

$H_*(\Omega \widehat{E}_6; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\mathbb{Z}_{31}) \otimes \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{16}, \mathbb{Z}_{22}, \mathbb{Z}_{32}]$,

$H_*(\Omega \widehat{E}_7; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\mathbb{Z}_{31}) \otimes \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{18}, \mathbb{Z}_{22}, \mathbb{Z}_{26}, \mathbb{Z}_{32}, \mathbb{Z}_{34}]$,

$H_*(\Omega \widehat{E}_8; \mathbb{Z}_2) \cong \Lambda(\mathbb{Z}_{14}, \mathbb{Z}_{31}) \otimes \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_{22}, \mathbb{Z}_{26}, \mathbb{Z}_{28}, \mathbb{Z}_{32}, \mathbb{Z}_{34}, \mathbb{Z}_{38}, \mathbb{Z}_{46}, \mathbb{Z}_{58}]$

⊙ 先程の Gysin sequence により Λ を Δ でかきかえた結果は明らかである。もし $\mathbb{Z}_7^2 \neq 0$ 在 $H_*(\Omega F_4; \mathbb{Z}_2)$ 存在は次元の理由で $\mathbb{Z}_7^2 = \mathbb{Z}_{14}$ $\Omega i: \Omega \widehat{G} \rightarrow \Omega G$ を考えたと $\Omega i_* \mathbb{Z}_7 = 0$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{14} = \chi_{14}$ よりこれはありえない。 $\mathbb{Z}_{31}^2 = 0$ 在 $H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ for $G = E_6, E_7, E_8$, $\mathbb{Z}_{14}^2 = 0$ 在 $H_*(\Omega \widehat{E}_8; \mathbb{Z}_2)$ も同様に naturality からわかる。■

この証明はさらに次のことを示している。

Prop. 2.4 Theorem 2.1 および Prop. 2.3 において

(i) $G = F_4$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_7 = 0$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}_4^2$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{10} = \chi_{10}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{14} = \chi_{14}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{22} = \chi_{22}$,

(ii) $G = E_6$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{31} = 0$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}_4^2$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{10} = \chi_{10}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{14} = \chi_{14}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{16} = \chi_8^2$,
 $\Omega i_* \mathbb{Z}_{22} = \chi_{22}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{32} = \chi_{16}^2$

(iii) $G = E_7$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{31} = 0$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{10} = \chi_{10}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{14} = \chi_{14}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{18} = \chi_{18}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{22} = \chi_{22}$,
 $\Omega i_* \mathbb{Z}_{26} = \chi_{26}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{32} = \chi_{16}^2$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{34} = \chi_{34}$.

(iv) $G = E_8$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{14} = \chi_{14}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{31} = 0$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{22} = \chi_{22}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{26} = \chi_{26}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{28} = \chi_{28}$,
 $\Omega i_* \mathbb{Z}_{32} = \chi_{16}^2$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{34} = \chi_{34}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{38} = \chi_{38}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{46} = \chi_{46}$, $\Omega i_* \mathbb{Z}_{58} = \chi_{58}$

と (2.1)。

次に $\Omega \widehat{G}$ に関する Eilenberg-Moore spectral sequence を考えたと
 明らかになる！

Prop 2.5 Theorem 2.1 & Prop. 2.3 に おいて σ は homology suspension χ^* を χ の dual element とする。

$$(i) \sigma(z_7) = \partial_8^*, \sigma(z_8) = \partial_9^*, \sigma(z_{10}) = \partial_{11}^*, \sigma(z_{14}) = \partial_{14}^*, \sigma(z_{22}) = \partial_{22}^* \text{ for } G = F_4.$$

$$(ii) \sigma(z_{31}) = \partial_{32}^*, \sigma(z_8) = \partial_9^*, \sigma(z_{10}) = \partial_{11}^*, \sigma(z_{14}) = \partial_{15}^*, \sigma(z_{16}) = \partial_{17}^*, \sigma(z_{22}) = \partial_{23}^*$$

$$\sigma(z_{32}) = \partial_{33}^*, \text{ for } G = E_6.$$

$$(iii) \sigma(z_{31}) = \partial_{32}^*, \sigma(z_{10}) = \partial_{11}^*, \sigma(z_{14}) = \partial_{15}^*, \sigma(z_8) = \partial_{19}^*, \sigma(z_{22}) = \partial_{23}^*, \sigma(z_{26}) = \partial_{27}^*,$$

$$\sigma(z_{32}) = \partial_{33}^*, \sigma(z_{34}) = \partial_{35}^* \text{ for } G = E_8.$$

$$(iv) \sigma(z_{14}) = \partial_{15}^*, \sigma(z_{31}) = \partial_{32}^*, \sigma(z_{22}) = \partial_{23}^*, \sigma(z_{26}) = \partial_{27}^*, \sigma(z_8) = \partial_{29}^*,$$

$$\sigma(z_{32}) = \partial_{33}^*, \sigma(z_{34}) = \partial_{35}^*, \sigma(z_{38}) = \partial_{39}^*, \sigma(z_{46}) = \partial_{47}^*$$

よく知られたように σ は Pontryagin product を annihilate する。
また $\sigma \circ S_2^i = S_2^i \circ \sigma$ であるから $H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ における S_2^i operation が mod decomposable である。よって

Lemma 2.6 Prop. 2.3, 2.4, 2.5 において

$$(i) z_{22} \in \widehat{G} = \widehat{F}_4, \widehat{E}_6, (ii) z_{26}, z_{34} \in \widehat{G} = \widehat{E}_7, (iii) z_{26}, z_{46}, z_{58} \in \widehat{G} = \widehat{E}_8$$

を primitive にとることからできる。

次元の関係により容易にわかるのでこの $z_{22}, z_{26}, z_{34}, z_{46}, z_{58}$ の選び方のもとで $H_*(\Omega \widehat{G}; \mathbb{Z}_2)$ の元を次のように定義する。

Definition. (i) $G = F_4$, $z_{14}' = S_2^8 * z_{22}$, $z_{10}' = S_2^4 * z_{14}$, $z_8' = S_2^2 * z_{10}'$, $z_7' = S_2^1 * z_8'$,

$$(ii) z_{14}' = S_2^8 * z_{22}, z_{10}' = S_2^4 * z_{14}, z_8' = S_2^2 * z_{10}', z_{16}' = S_2^{16} * z_{32},$$

$$(iii) z_{22}' = S_2^4 * z_{26}, z_{14}' = S_2^8 * z_{22}', z_{10}' = S_2^4 * z_{14}, z_{32}' = S_2^2 * z_{34}, z_{31}' = S_2^1 * z_{32}'$$

$$z_{18}' = S_2^{16} * z_{34}.$$

$$(iv) \bar{z}_{22}' = S_2^4 * \bar{z}_{26}, \bar{z}_{14}' = S_2^8 * \bar{z}_{22}, \bar{z}_{38}' = S_2^8 * \bar{z}_{46}, \bar{z}_{34}' = S_2^4 * \bar{z}_{38}, \bar{z}_{32}' = S_2^2 * \bar{z}_{34}' \\ \bar{z}_{31}' = S_2^4 * \bar{z}_{32}'. \text{ (Remark. この元は } \Omega^1 \Omega G \rightarrow \Omega^1 G' \text{ でうまく対応してゐる.)}$$

よって χ_i をうまくとれば Prop 2.3, Prop 2.4, Prop 2.5 が成立するよう
にして $\bar{z}_i'$ を $\bar{z}_i$ のかわりに使つてよいことがわかる。

Prop 2.7. Prop 2.3 での $H_*(\Omega E_7; \mathbb{Z}_2)$ の $\bar{z}_{16}, \bar{z}_{32}$ および $H_*(\Omega E_7; \mathbb{Z}_2)$ の
 $\bar{z}_{28}$ 以外は primitive. さらに $\bar{\phi}(\bar{z}_{28}) = \bar{z}_{14} \otimes \bar{z}_{14}$.

(i) 上のことから $\bar{\phi}(\bar{z}_{28})$ のみ問題であるが $S_2^2 * \bar{z}_{28} = \bar{z}_{26} + \text{decomposable}$
であり 26-元には decomposable が存在することから $S_2^2 * \bar{z}_{28} = \bar{z}_{26}$ かつ
よから $S_2^2 * S_2^4 * S_2^2 * \bar{z}_{28} = \bar{z}_{14}$ Adem relation により $S_2^{14} * \bar{z}_{28} = \bar{z}_{14}$ により $\bar{\phi}(\bar{z}_{28}) = \bar{z}_{14} \otimes \bar{z}_{14}$
は明らか。

また上のことと Prop. 2.4 を用いて naturality により

Prop 2.8 $H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ での ring の generator χ_i を適当に選ぶと、

$$(i) G = F_4, S_2^8 * \chi_{22} = \chi_{14}, S_2^4 * \chi_{14} = \chi_{10}, S_2^2 * \chi_{10} = \chi_4^2, S_2^2 * \chi_4 = \chi_2$$

$$(ii) G = E_6, S_2^8 * \chi_{22} = \chi_{14}, S_2^8 * \chi_{16} = \chi_8, S_2^4 * \chi_{14} = \chi_{10}, S_2^2 * \chi_{10} = \chi_4^2, S_2^4 * \chi_8 = \chi_4, \\ S_2^2 * \chi_4 = \chi_2.$$

$$(iii) G = E_7, S_2^2 * \chi_{34} = \chi_{16}^2, S_2^{16} * \chi_{34} = \chi_{18}, S_2^4 * \chi_{26} = \chi_{22}, S_2^8 * \chi_{22} = \chi_{14}, S_2^8 * \chi_{18} = \chi_{10}, \\ S_2^8 * \chi_{16} = \chi_8, S_2^4 * \chi_{14} = \chi_{10}, S_2^4 * \chi_8 = \chi_4, S_2^2 * \chi_4 = \chi_2.$$

$$(iv) G = E_8, S_2^8 * \chi_{46} = \chi_{38}, S_2^4 * \chi_{38} = \chi_{34}, S_2^2 * \chi_{34} = \chi_{16}^2, S_2^2 * \chi_{18} = \chi_{26}, S_2^4 * \chi_{26} = \chi_{22}, \\ S_2^8 * \chi_{22} = \chi_{14}, S_2^8 * \chi_{16} = \chi_8, S_2^4 * \chi_8 = \chi_4, S_2^2 * \chi_4 = \chi_2.$$

また Prop. 2.7, Prop. 2.4 を用いて naturality により

Prop. 2.9 $\chi_4, \chi_8, \chi_{16}, \chi_{28}$ 以外は primitive 2"

$$\bar{\phi}(\chi_4) = \chi_2 \otimes \chi_2, \bar{\phi}(\chi_8) = \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 + \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 + \chi_4 \otimes \chi_4,$$

$$\bar{\phi}(\chi_{16}) = \chi_2 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 + \chi_2 \cdot \chi_4 \otimes \chi_2 \cdot \chi_8 + \chi_2 \cdot \chi_8 \otimes \chi_2 \cdot \chi_4$$

$$+ \chi_4 \cdot \chi_8 \otimes \chi_4 + \chi_4 \otimes \chi_4 \cdot \chi_8 + \chi_8 \otimes \chi_8, \bar{\phi}(\chi_{28}) = \chi_{14} \otimes \chi_4$$

① Lemma 2.2 のあとで述べたことにより $\chi_4^* = (\chi_2^*)^2, \chi_8^* = (\chi_2^*)^4, \chi_{16}^* = (\chi_2^*)^8$ であるから最初の 3 つの formula が正しい。最後の 1 は明らか。

Prop. 2.10 $S_2^{2*} \chi_8 = \chi_2 \cdot \chi_8, S_2^{4*} \chi_{16} = \chi_4 \cdot \chi_8, S_2^{8*} \chi_{16} = \chi_{14} + \chi_2 \cdot \chi_4 \cdot \chi_8$

① Prop 2.9 より E_8 で示せば充分であることがわかる。

$H^*(\Omega E_8; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\chi_2^*] \otimes \Lambda(\chi_{14}^*)$ for $\dim \leq 16$ であり Thomas の結果と合致する結果である。■

$H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2)$ の operation をすべて決定するには

S_2^{2*} (generator) を調べておけばよい。まだ調べていないのは、

$$S_2^{2*} \chi_{22} = \chi_{10}^2 \quad \text{in } H_*(\Omega G; \mathbb{Z}_2) \text{ for } G = F_4, E_6, E_7 \text{ および}$$

$$S_2^{2*} \chi_{44} = \chi_{22}^2, S_2^{2*} \chi_{58} = \chi_{28}^2 \quad \text{in } H_*(\Omega E_8; \mathbb{Z}_2)$$

最初に述べたように最後の 2 つはとくに E_8 を $H^*(E_8; \mathbb{Z}_2)$ の元 α_{23} および α_{29} によって killing した spaces を考えることで求まることになっている。これに関し 2 次の問題がある。

問題 適当な条件下で $0 \neq \chi \in H^n(X; \mathbb{Z}_2)$ s.t. $S_2^i \chi \neq 0$ として $\chi^2 = 0$

とするとき $\exists z \in H^{2n-2}(\Omega X; \mathbb{Z}_2)$ s.t. $S_2^i z \neq 0$ (かつ $\bar{\phi}(z) = \chi \otimes \alpha$)

となるか。 Remark $\Omega \bar{X}$ が、ある 1 は $\bar{X}$ の homology の状態かわ

かっていなければこの問題はとけるが今の case には役立たず。

(ここで $\bar{X}$ は $\chi: X \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, n)$ の homotopy fibre.)

この場合すなわち $X = E_8, \chi = d_{23}$ or d_{29} のときにはこの問題はよく
 117. $S_2^1 d_{23} \neq 0, S_2^1 d_{29} \neq 0$ により 212 は Kono [6] により.

Theorem 2.11. 適当な $\alpha_{15} \in H^{15}(E_8; \mathbb{Z}_2)$ を選ぶと.

$$\bar{\phi}(\alpha_{15}) = \alpha_3 \otimes \alpha_3^4 + \alpha_5 \otimes \alpha_5^2 + \alpha_9 \otimes \alpha_3^2, \quad \bar{\phi}(\alpha_{23}) = \alpha_3 \otimes \alpha_5^4 + \alpha_5 \otimes \alpha_9^2 + \alpha_{15} \otimes \alpha_3^2$$

$$\bar{\phi}(\alpha_{29}) = \alpha_5 \otimes \alpha_3^8 + \alpha_9 \otimes \alpha_5^4 + \alpha_{17} \otimes \alpha_3^4,$$

$$\text{よって } \bar{\phi} \circ S_2 = (S_2 \otimes S_2) \circ \bar{\phi} \text{ より } \bar{\phi}(S_2^1 \alpha_{23}) = \alpha_3^2 \otimes \alpha_9^2 + \alpha_9^2 \otimes \alpha_3^2,$$

$$\bar{\phi}(S_2^1 \alpha_{29}) = \alpha_3^2 \otimes \alpha_3^8 + \alpha_5^2 \otimes \alpha_5^4 + \alpha_9^2 \otimes \alpha_3^4 \quad \text{よって } \alpha_3, \alpha_5, \alpha_9 \text{ は明らかに}$$

primitive. したがって $\bar{\phi}(S_2^1 \alpha_{23} - \alpha_3^2 \otimes \alpha_9^2) = \bar{\phi}(S_2^1 \alpha_{29} - \alpha_{15}^2) = 0$ 24, 30次元の
 primitive element はないから $S_2^1 \alpha_{23} = \alpha_3^2 \otimes \alpha_9^2, S_2^1 \alpha_{29} = \alpha_{15}^2$. すなわち先程
 の $\mathbb{Z}$ の dual $\mathbb{Z}^*$ は $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}$ の場合に $\chi_{22}^2 \neq \text{indecomposable}$ or $\chi_{28}^2 \neq \text{indecomposable}$
 よって χ_{22}^2 or χ_{28}^2 , χ_{22}, χ_{28} の dual を χ_{22}^*, χ_{28}^* とすれば、これは primitive 元
 元であるから, $S_2^2 \chi_{22}^*, S_2^2 \chi_{28}^* \neq \text{primitive}$ よって 24, 30次元の primitive
 はないので $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}$ は 0. よって $\bar{\phi}(S_2^2 \mathbb{Z}) = 0$ から $\mathbb{Z}$ の dual
 は indecomposable. よって $H_*(\Omega E_8; \mathbb{Z}_2)$ の 46, 58 次元の indecompo-
 sable elem. は $\chi_{46} + \text{dec.}, \chi_{58} + \text{dec.}$ したがって $S_{2*}^2 \chi_{58} = \chi_{22}^2$ or $S_{2*}^2 \chi_{46} = \chi_{22}^2$
 がわかる。

最後の $S_{2*}^2 \chi_{17} = \chi_{16}^2$ については essential には $S_{2*}^2 \chi_{22} = 0$ とす
 べし. $\begin{array}{ccccc} & S_2^4 & & S_2^8 & \\ \circ & \xrightarrow{\quad} & \circ & \xrightarrow{\quad} & \circ \\ e_{10} & & e_{14} & & e_{22} \end{array}$ なる complex を $\widehat{E}_6$ および $\nu \Omega E_6$ の $\mathbb{Z}_2$ 係数
 cohomology をもとにして構成することが出来るか. このよき有
 complex の存在は Toda にある球面の homotopy に矛盾するのを示す.

文中引用したreferenceの2を掲げれば、

- [1] S. Anaki. Cohomology modulo 2 of the compact exceptional groups,
J. Math. Osaka Univ. 12 (1961), 43-65.
- [2] S. Anaki - Y. Shikata, Cohomology mod 2 of the compact exceptional
group E_8 , Proc. Japan Acad, 57 (1961), 619-622.
- [3] R. Bott, An application of the Morse theory to the topology
of Lie groups., Bull. Soc. Math. France, 84 (1956), 251-281.
- [4] R. Bott, The space of loop on Lie groups, Mich. Math. J. 5 (1958)
35-61.
- [5] H. Kachi, Homotopy groups of compact Lie groups E_6, E_7 and E_8 ,
Nagoya Math. J. 32 (1968) 109-139.
- [6] A. Kono, Hopf algebra structure and cohomology operation of the
mod 2 cohomology of exceptional Lie groups, Japanese J. Math.
- [7] T. Petrie The weakly complex bordism of Lie groups, Ann of Math.
88 (1968), 371-402.
- [8] M. Rothenberg - N. Steenrod The cohomology of the classifying spaces of
H-spaces, Bull. American Math. Soc. 71 (1965) 872-875.
- [9] H. Toda. Composition methods in homotopy groups of spheres, Annals
of Math. Studies 49, Princeton Univ. Press, 1962.
- [10] E. Thomas Exceptional Lie groups and Steenrod squares, Mich. Math.
J. 11 (1964) 151-156.