

The uniqueness of the integrated density of states for the Schrödinger operators with magnetic fields

京都大・理 峯 拓矢 (Takuya Mine)

岩塚 明 (Akira Iwatsuka)

土居 伸一 (Shin-ichi Doi)

1 Introduction

次の様な磁場の付いた Schrödinger operator を考える.

$$\begin{aligned} H &= \left(\frac{1}{i} \nabla - \mathbf{a} \right)^2 + V \text{ on } L^2(\mathbf{R}^d), \\ \mathbf{a} &\in L^2_{loc}(\mathbf{R}^d), \text{ real-valued function,} \\ V &\in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d), V \geq 0. \end{aligned}$$

ここで V は electric potential, $\mathbf{a}$ は磁場 $B = \text{curl } \mathbf{a}$ を表す vector potential である. H は $L^2(\mathbf{R})$ 上の self-adjoint operator として実現される事が知られている ([I-K], [L-S] 参照).

Integrated density of states (以下 IDS) は物理的要請から考案された量であるが, 数学的にも様々な興味深い性質を持っており, 既に多くの数学者により研究されている. IDS は $\mathbf{R}$ 上の単調非減少関数であり, 次の 2 通りの方法で定義される ([C-L] 参照). なお定義中の Ω は $\mathbf{R}^d$ 内の有界開集合を表すものとし, $\Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ は開集合 Ω をある程度の regularity を保ちつつ $\mathbf{R}^d$ 全体に拡げていく極限を表すものとする.

定義 1) H を $L^2(\Omega)$ に制限して何らかの境界条件 X を付けて self-adjoint operator として実現したものを H^X_Ω と書く. $\lambda \in \mathbf{R}$ とし, H^X_Ω の λ 以下の固有値の数を $N^X_\Omega(\lambda)$ と書く. この時, 次の極限

$$\rho^X(\lambda) = \lim_{\Omega \rightarrow \mathbf{R}^d} \frac{N^X_\Omega(\lambda)}{\text{vol}(\Omega)}$$

が存在するならば, この $\rho^X(\lambda)$ を境界条件 X に対応する IDS と呼ぶ.

定義 2) $C_0(\mathbf{R}) := \{f : \text{continuous function on } \mathbf{R} \text{ with compact support}\}$ とする. 次の linear functional

$$C_0(\mathbf{R}) \ni f \rightarrow \frac{\text{tr}(\chi_\Omega f(H) \chi_\Omega)}{\text{vol}(\Omega)} =: \rho_\Omega(f)$$

は positive functional である. 但し, χ_Ω は Ω の特性関数である. Riesz's representation theorem ([Ru] 参照) により, ある Borel measure $d\rho_\Omega$ を用いて

$$\rho_\Omega(f) = \int_{\mathbf{R}} f(\lambda) d\rho_\Omega(\lambda)$$

と表せる. $\Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ とした時, $d\rho_\Omega$ の weak limit $d\rho$ が存在するならば, IDS $\rho(\lambda)$ を次で定義する.

$$\rho(\lambda) := \int_{\mathbf{R}} \chi_{(-\infty, \lambda]} d\rho.$$

I D S $\rho(\lambda)$ の本来の物理的意味は λ 以下のエネルギーを持つエネルギー準位の単位体積当りの平均個数であり、定義 1 はその物理的意味からの定義であるといえる。しかし定義 1 では開集合 Ω を取り替える毎に異なる operator H_{Ω}^X を扱わねばならず、また R^d 全体で定義された operator H との対応も明らかではない。一方で定義 2 は表面的には定義 1 とは異なる形式を取っており I D S の本来の物理的意味との関わりもさほど明確でないが、数学的な取り扱いが比較的容易で、例えば [H-S] ではこの定義を採用している。また定義 2 により良く知られた H の spectrum $\sigma(H)$ と I D S との関係

$$\text{supp}(d\rho) = \sigma(H)$$

が得られる ([C-L] 参照)。ここで $\text{supp}(d\rho)$ は measure $d\rho$ の measure としての support を表している。

上の定義において自然に生じる問題として存在と一意性の問題が挙げられる。存在については既に様々な研究がなされており、開集合の拡張方及びポテンシャルに何らかの条件を課す事により肯定的な結論が得られている ([B-P], [C-L], [K-M] 参照)。ここでは一意性、すなわち次の 2 つの主張を問題にする。

A) 定義 1 と 定義 2 は同一の極限を与える。

B) 定義 1 での極限 $\rho^X(\lambda)$ は境界条件 X の取り方に依存しない。

A), B) に関して、磁場 $B = 0$ の時には既に多くの研究がなされており、開集合の拡張方及びポテンシャルに何らかの条件を課す事により肯定的な結論が得られている。A) については、[C-L] で multi-dimensional random Schrödinger operator の場合に Dirichlet 境界条件での定義 1 と、定義 2 が一致する事を示している。B) については、[B-P] では 1-dimensional の、[K-M] では multi-dimensional の、それぞれ random Schrödinger operator の場合に Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件での定義 1 が一致する事を示している。また [Sh] では almost-periodic coefficient を持つ elliptic differential operator の I D S を同様に定義し、ある parabolic uniformly condition を満たす開集合の拡張方と境界条件について I D S の一意性を示している。

しかし磁場 $B \neq 0$ の時には A), B) に関する結果は著者の調べた範囲では無いと思われるため、ここではこの場合について考える事にする。我々の主結果を述べる前にいくつかの準備をしておく。

開集合の拡張方について次の仮定をおく。

仮定) $\mathcal{O}$ を R^d の有界な開集合の族とし、次の条件を満たすものとする。

(A 1) $\forall K \subset R^d$, compact set, $\exists \Omega \in \mathcal{O}$ such that $K \subset \Omega$.

(A 2) $\forall \epsilon > 0 \exists K \subset R^d$, compact set, such that

$$\frac{\text{vol}(\{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) < 1\})}{\text{vol}(\Omega)} < \epsilon$$

for $\forall \Omega \supset K, \Omega \in \mathcal{O}$.

以下、開集合 Ω を $\Omega \in \mathcal{O}$ を満たしながら R^d 全体に拡張していく極限を考える。仮定 (A 1) は $\mathcal{O}$ の元 Ω が任意に大きく取れる事を保証しており、仮定 (A 2) は Ω が $\mathcal{O}$ 内で大

きくなるに従って Ω の体積に対する Ω の境界の体積の比が任意に小さくなる事を表している。

Operator H の有界開集合 Ω への制限を次の様に定義する。

定義) Ω を $\mathbf{R}^d$ の開集合とする. $L^2(\Omega)$ 上の境界条件 X の付いた Schrödinger operator を次の quadratic form に付随する self-adjoint operator として定義する。

$$(H_\Omega^X u, u)_\Omega = \left\| \left(\frac{1}{i} \nabla - \mathbf{a} \right) u \right\|_\Omega^2 + \|V^{1/2} u\|_\Omega^2, \text{ for } \forall u \in Q(H_\Omega^X).$$

但し, $Q(H_\Omega^X)$ は form domain である. $Q(H_\Omega^X) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ の時 (但し $\overline{}$ は form closure を表す) $X = D$ と書き, $Q(H_\Omega^X) = \{u \in L^2(\Omega) | (\frac{1}{i} \nabla - \mathbf{a})u \in (L^2(\Omega))^d, V^{1/2}u \in L^2(\Omega)\}$ の時 $X = N$ と書く。

H_Ω^D は Dirichlet 境界条件の付いた operator である. また, $B = 0$ の時は H_Ω^N は Neumann 境界条件の付いた operator である。

主結果の主張を簡潔にするため, 定義 1 での収束を定義 2 の場合と同様に measure の収束に言い換えておく事にする. 定義 1 における $N_\Omega^X(\lambda)/\text{vol}(\Omega)$ は $\lambda \in \mathbf{R}$ の単調非減少関数であり, その微分を考える事により $\mathbf{R}$ 上の measure $d\rho_\Omega^X$ と同一視できる. $\mathbf{R}$ 上の measure の $\Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$ とした時の収束を $C_0(\mathbf{R})$ の functional としての weak topology での収束として定義する. すなわち,

定義) $d\rho_\Omega \rightarrow d\rho \Leftrightarrow_{\text{def}} \forall f \in C_0(\mathbf{R}) \forall \epsilon > 0 \exists K \subset \mathbf{R}^d, \text{ compact set, s.t.}$

$$|\int_{\mathbf{R}} f(\lambda) d\rho_\Omega(\lambda) - \int_{\mathbf{R}} f(\lambda) d\rho(\lambda)| < \epsilon, \text{ for } \forall \Omega \in \mathcal{O}, \Omega \supset K.$$

I D S の一意性は次の 3 つの主張の同値性, 及びそれらの極限の一致に言い換える事ができる。

- (W) measure $d\rho_\Omega$ の weak limit $d\rho$ が存在する.
- (D) measure $d\rho_\Omega^D$ の weak limit $d\rho^D$ が存在する.
- (N) measure $d\rho_\Omega^N$ の weak limit $d\rho^N$ が存在する.

(W) と (D) に関して我々は次の結果を得た。

Theorem 1 $\mathcal{O}$ を (A 1), (A 2) を満たす $\mathbf{R}^d$ の開集合の族とする. この時上の (W) と (D) は同値であり, さらに一方が成り立つ時, 極限 $d\rho$ と $d\rho^D$ は measure として等しい。

次に, (N) について考える. Operator H_Ω^N の固有値の個数は, ($B = 0$ の時は Neumann 境界条件付きの operator である事を考えると) Dirichlet 境界条件の場合と比較して境界の形により強く依存すると思われるため, 境界の regularity に関して適当な仮定を置く必要があると思われる. このために開集合族 $LM(r, A, B)$ を導入する. $LM(r, A, B)$ の定義は後で述べるが, 球や長方形の内部といった境界がさほど複雑でない図形の相似拡大からなる開集合族はある $r, A, B > 0$ について $LM(r, A, B)$ に含まれる事が容易に示される. (W), (D), (N) の同値性及び極限の一致について我々は次の結果を得た。

Theorem 2 $\mathcal{O}$ を (A 1), (A 2) を満たす $\mathbf{R}^d$ の開集合の族とし, さらにある $r, A, B > 0$ に対し $\mathcal{O} \subset LM(r, A, B)$ が成り立つとする. この時上の (W), (D), (N) は全て同値であり, どれか 1 つが成り立つ時, 極限 $d\rho, d\rho^D, d\rho^N$ は全て measure として等しい。

注) Ω が Theorem 2 の仮定を満たす時, form sense で $H_\Omega^D \geq H_\Omega^X \geq H_\Omega^N$ を満たすような境界条件 X についても同様の主張が成り立つ. periodic 境界条件, Dirichlet と Neumann の mix 境界条件, Bloch 境界条件等はこの条件を満たしている.

2 Manifolds with Lipschitz boundary

次に $LM(r, A, B)$ (Manifolds with Lipschitz Boundary) の定義を述べておく. $r, A, B > 0$ とする. Ω を $\mathbf{R}^d$ 内の有界開集合とする. 以下の i)-v) を満たす $\{U_k, \chi_k, S_k, \phi_k\}_{k=1}^K$ が存在する時 $\Omega \in LM(r, A, B)$ と定義する.

i) U_k は $\mathbf{R}^d$ 内の有界開集合, χ_k は Affine transformation であり, $\chi_k(x) = A_k(x) + a_k$ と表せる. 但し A_k は orthogonal matrix, a_k は constant vector である. S_k は $\mathbf{R}^{d-1}$ 内の rectangle である. $t > 0$ に対し,

$$S_k(t) := \{x' \in \mathbf{R}^{d-1} \mid \text{dist}(x', S_k) < t\}$$

と定義すると ϕ_k は $\overline{S_k(r)}$ 上 Lipschitz continuous である.

ii) $x \in \mathbf{R}^d$ に対し $x = (x', x_d), x' \in \mathbf{R}^{d-1}, x_d \in \mathbf{R}$ と書く. この時,

$$\begin{aligned}\chi_k(U_k) &= \{(x', x_d) \in \mathbf{R}^d \mid x' \in S_k(r), \phi_k(x') - r < x_d < \phi_k(x') + r\} \\ \chi_k(U_k \cap \Omega) &= \{(x', x_d) \in \mathbf{R}^d \mid x' \in S_k(r), \phi_k(x') - r < x_d < \phi_k(x')\} \\ \chi_k(U_k \cap \partial\Omega) &= \{(x', x_d) \in \mathbf{R}^d \mid x' \in S_k(r), x_d = \phi_k(x')\}\end{aligned}$$

が成り立つ.

iii) $\partial\Omega \subset \bigcup_{k=1}^K \chi_k^{-1}(\{(x', x_d) \in \mathbf{R}^d \mid x' \in S_k, x_d = \phi_k(x')\})$ である. 特に $\{U_k\}_{k=1}^K$ は $\partial\Omega$ の open covering である.

iv) ϕ_k の Lipschitz constant は A 以下である. すなわち

$$\|\nabla \phi_k\|_{L^\infty(\overline{S_k(r)})} \leq A, \text{ for } 1 \leq k \leq K.$$

v) U_k の重なり方は高々 B 重である. すなわち

$$\#\{k \mid x \in U_k\} \leq B, \text{ for } \forall x \in \mathbf{R}^d.$$

参考文献

- [B-P] M. M. Benderskii and L. A. Pastur, On the spectrum of the one-dimensional Schrödinger equation with a random potential, *Mat. Sbornik* 82(124)(1970).
- [C-L] R. Carmona and J. Lacroix, *Spectral theory of random Schrödinger operators*, Birkhäuser, 1990.

- [H-S] B. Helffer and J. Sjöstrand, Equation de Schrödinger avec champ magnétique et équation de Harper, *Lec. Note in Phys.* 345(1989), 118-197.
- [I-K] T. Ikebe and T. Kato, Uniqueness of the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators, *Arch. Rational Mech. Anal.* 9(1962), 77-92.
- [K-M] W. Kirsch and F. Martinelli, On the density of states of the Schrödinger operators with a random potential, *J. Phys. A. Gen.* 15(1982), 2139-2156.
- [Ru] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [Sh] M. A. Shubin, The density of states of selfadjoint elliptic operators with almost periodic coefficients, *Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol.* 118(1982), 307-339.