

極大イデアル空間の *analytic structure*

奈良大 神保敏弥

§ 1. 序

極大イデアル空間に *analytic structure* が存在する為の十分条件は、たくさん与えられているが、ここでは 1 次元の *analytic structure* の中でも特に、H. Alexander, E. Bishop, J.-E. Björk と J. Wermer 等の結果を紹介致します。

§ 2. $\mathbb{C}^n$ に於いて

T を単位円周 $\{z \in \mathbb{C}^1 : |z| = 1\}$ とし, $f, g \in C(T)$ は以下の条件を満たすとする: (a) $\{f, g\}$ は T の点を分離する, (b) f, g は T の或る近傍で正則な関数の T へのそれぞれ制限である, (c) $g'(z) \neq 0$ on T . f と g によって生成された *function algebra* を $[f, g]$ で表わす.

定理 1. (Wermer [6]) A を上述の $[f, g]$ とし, $A \neq C(T)$

とする $\Rightarrow$ 次の条件を満たす Riemann 面 R と 単一閉曲線 Γ が存在する: $\Gamma \subset R$ は領域 D を囲み, $D \cup \Gamma$ はコンパクトであり, Γ から T の上への位相同形写像 α が存在し, 任意の $f \in A$ に対して T 上の関数 $f \circ \alpha$ は D に正則に, $D \cup \Gamma$ 上に連続に拡張できる.

この定理は次のように拡張される.

定理 2. (Alexander [1]) A を T 上の function algebra とする, かつ A は局所的に 1-1 なる関数を含むとする.

$\Rightarrow$ 次のいずれかが成立する: a) $T = M_A$, このときは $A = C(T)$, b) $M_A \setminus T \neq \emptyset$, このときは $M_A \setminus T$ は 1 次元 analytic space の構造をもつ.

この証明の b) は 次の定理 3 からわかる. 定理 3 の証明は Stolzenberg の定理 [5] を実にうまく用いている:

X を $\mathbb{C}^n$ のコンパクト polynomially convex set とし, K を smooth curves の有限和とする $\Rightarrow (X \cup K)^\wedge \setminus X \cup K$ は空か又は $\mathbb{C}^n \setminus X \cup K$ の 1 次元 analytic subset である.

定理 3. [1] $K_1, \dots, K_\lambda$ は $\mathbb{C}^n$ 内の arcs とし, 各 K_i 上で $\bar{z}_i$ は 局所的に 1-1 であるとし, $K = K_1 \cup \dots \cup K_\lambda$ とする.

$\Rightarrow \hat{K} \setminus K$ は 空又は $\mathbb{C}^n \setminus K$ の純 1 次元 analytic subset である. ここで $\hat{K}$ は K の polynomially convex hull とする.

証明. z_1 は各 K_i 上で 1-1 と仮定して良い. このとき各 $K_i \cap K_j$ の K_i 内の境界点を J_{ij} とし, K_i の端点を J_{ii} とする. さらに $\mathbb{C}^1$ 内で各 $z_1(K_i) \cap z_1(K_j)$ の $z_1(K_i)$ 内の境界点を J_{ij}' とし, $J = \bigcup z_1(J_{ij}) \cup z_1(J_{ii}) \cup J_{ij}'$, $L = \bigcup z_1(K_i)$ とおく. $\lambda \in \mathbb{C} \setminus J$ と ∞ とを結ぶ $\mathbb{C} \setminus J$ 内の曲線が L と交わる最小回数を $N(\lambda)$ で表わす. $p \in \hat{K} \setminus K$, $z_1(p) \in \mathbb{C} \setminus J$ に対して帰納法 ($N(z_1(p))$ の) で証明する.

i) $N(z_1(p)) = 0$ のとき, $p \notin \hat{K}$ となう証明すべき事はない.

ii) $N(z_1(p)) = k-1$ のとき 成立するとする. まず

① $z_1(p)$ が $\mathbb{C} \setminus L$ の 2 つの成分 Ω_1, Ω_2 の共通境界にあるとき.

$N(\lambda) \geq k-1$, $\lambda \in \Omega_1$; $N(\lambda) = k-1$, $\lambda \in \Omega_2$ としよ.

$z_1(p)$ の近傍を Jordan curve Γ で囲まれた十分小さい閉 Jordan domain D とする. Γ の一部は線分 α を含み $\alpha \in \Omega_2$ とする. 今 $X_0 = (z_1^{-1}(\Gamma - \alpha) \cap \hat{K}) \cup (z_1^{-1}(\gamma) \cap K)$ とおき $X = \widehat{X_0}$ とする. ここで $\gamma = D \cap L$. 一方 $C = z_1^{-1}(\alpha) \cap \hat{K}$ とおくと 帰納法の仮定より $\hat{K} \cap z_1^{-1}(\Omega_2)$ は $z_1^{-1}(\Omega_2)$ の純 1 次元 analytic subset であるので C は有限個の real analytic curves の和であるので Stolzenberg の定理によって $(X \cup C)^\wedge \setminus X \cup C$ は $\mathbb{C}^n \setminus X \cup C$ の 1 次元 analytic subset である. $p \notin X \cup C$ であり, $p \in z_1^{-1}(D) \cap \hat{K} = (X \cup C)^\wedge$ であるので 結果は成立する.

② $z_1(p)$ が $\mathbb{C} \setminus L$ の2つの成分の境界点でないときで、

a) $z_1(p) \in \mathbb{C} \setminus L$ のとき. $N(z_1(p)) = k$ である $z_1(p)$ と ∞ とを結ぶ曲線と L とが 最初に交わる点を λ_1 とする. $z_1(p)$ を含む成分を Ω_1 , 隣り合う成分を Ω_2 とする. $N(\lambda_1) = k$, $N(\lambda) = k-1$, $\lambda \in \Omega_2$ である. ①によって, λ を含む十分小さい subarc $\gamma \subset L \setminus J$ をとると $p' \in \hat{K} \setminus K$ ($z_1(p) \in \gamma$) で $\hat{K}$ は 局所的に1次元 analytic set であるので, z_1 の $1-1$ を用いて $z_1^{-1}(\gamma) = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ の 各 γ_i は相交わらず, 各 γ_i は z_1 で γ と位相同形となる. γ を Ω_1 に延ばして $\gamma \cup \delta$ によって囲まれた Jordan domain D を作る. 各 γ_i が $z_1^{-1}(D) \cap \hat{K}$ の異なる成分にあるようにできる. そのとき [5] の Lemma 8 を用いて, γ_i を含む $z_1^{-1}(D^\circ) \cap \hat{K}$ の成分は $z_1^{-1}(D^\circ)$ の analytic subset となる.

次に D° 内に線分 α をとり それを延ばして Jordan curve $\mathcal{P}$ が Ω_1 内で $z_1(p)$ を囲むようにする. このとき $X = z_1^{-1}(\mathcal{P} \setminus \alpha^\circ) \cap \hat{K}$, $C = z_1^{-1}(\alpha) \cap \hat{K}$ とおくと, X は polynomially convex で, C は real analytic arcs の有限和であるので, 又 Stolzenberg の定理が使え 証明される.

b) $z_1(p) \in L \setminus J$ のときは 十分小さい $z_1(p)$ を含む Jordan domain D をとる. その境界は2つの線分 α_1, α_2 を含み, 互いに $z_1(p)$ の反対側にある Jordan curve とする. このとき $X = [z_1^{-1}(\mathcal{P} \setminus (\alpha_1 \cup \alpha_2)^\circ)] \cap \hat{K} \cup (z_1^{-1}(\gamma) \cap K)^\wedge$, $C = z_1^{-1}(\alpha_1 \cup \alpha_2)$

$\hat{K}$ とすると 又 Stolzenberg の定理が使える.

最後に $p \in \hat{K} \setminus K$ で, $z_1(p) \in J$ については, $z_1(p)$ の十分小さい開近傍 D をとり $(z_1^{-1}(D) \cap K)^\wedge \ni p$ とする. J は totally disconnected であるので D に含まれる開かつ閉集合 $\tilde{J} \subset J$ がある. D 内にあり $\tilde{J}$ を囲み L と有限回交わる polygonal Jordan curve P を $J \setminus \tilde{J}$ が P の外部にあるような P をとる. $C = z_1^{-1}(P) \cap \hat{K}$ とすると, C は real analytic curves の有限和である. B を P によって囲まれた閉領域とし, $X = (z_1^{-1}(B) \cap K)^\wedge$ とおけば $p \notin X$ で $p \in (X \cup C)^\wedge \setminus X \cup C$ であるので, 又 Stolzenberg の定理により言える.

§ 3. fibre $f^{-1}(z)$ による条件.

A を X 上の function algebra とし, M_A を A の極大イデアル空間, S_A をその Silov 境界とする. $Y \subset M_A$ の位相境界を bY で表わす. Björk の [4] に述べられた M_A の X での 1 次元 analytic structure の存在の定義は 次のものである:

X の開近傍 W と或る $f \in A$ が存在して $W \setminus \{x\}$ が交わりぬ
 閉集合 $\bigcup V_1, \dots, V_n$ の和として表わされ, 各 V_i は f によって $D \setminus \{0\}$ と位相同形のときを言う. ここでは $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f(x) = \{0\}$ とする.

このとき Wermer は $g \in A$ に対して $g \circ (f|_{V_i \cup \{x\}})^{-1}$ が

正則である事を示した.

$f \in A$ に対して $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus f(S_A)$ の open component とする.
 Ω が重複度 n の f -regular 成分と呼ばれるのは $\forall z \in \Omega$ に対して $\#f^{-1}(z) \leq n$, 或る $z_0 \in \Omega$ に対して $\#f^{-1}(z_0) = n$ が成り立つときを言う, ここで $\#$ は cardinal number を示す.

定理4 (Bishop [3]) A を function algebra とし, $f \in A$ とする. Ω を重複度 $n > 0$ の f -regular 成分とする.

$\Rightarrow f^{-1}(\Omega)$ のすべての点で analytic structure が存在する.

定理5 (Björk [4]) A を function algebra とし, $f \in A$ とする. Ω を重複度 n の f -regular 成分とし, $z_0 \in \partial\Omega$ に対して $f^{-1}(z_0) \cap S_A$ が空でない A -convex set とする

$\Rightarrow f^{-1}(z_0) \cap S_A$ は 空又はその各点で 1 次元の analytic structure を持つ.

証明 $n = 0$ は明らかなので $n > 0$ とする. 或る $\lambda_0 \in \Omega$ に対して $\#f^{-1}(\lambda_0) = n$ であるので, λ_0 を中心とする十分小さい円板 D をとると $f^{-1}(D^\circ) = W_1 \cup \dots \cup W_n$ とかけ, 各 W_i が交わりぬ開集合で f によって W_i は D° と位相同形とできる.

$Y = M_A \setminus f^{-1}(D^\circ)$ とおくと $\partial Y = K_1 \cup \dots \cup K_n$, K_i は交わりぬ開集合かつ各 K_i が ∂D に位相同形となる. $B \in A|_Y$ と $1/(f - \lambda_0)$ によって生成された Y 上の function algebra とすると $M_B = Y$, $S_B \subset S_A \cup K_1 \cup \dots \cup K_n$ がわかる.

これから以下に述べる Wermer の結果の f に当たるものを
前の B を媒介に作り $y_0 \in f^{-1}(z_0) \setminus S_A$ での analytic
structure の存在が言える:

‘ A を function algebra, S_A を $K \cup K_1 \cup \dots \cup K_n$ とし
 $K, K_1, \dots, K_n$ は disjoint closed set とする. 或る $f \in A$
に対して, $\|f\|_K < \varepsilon < \frac{1}{2}$ であり, 各 K_i は 単位円 と 位相同形
であり, $f(K_i)$ は real analytic curve とする.

$f(K_i)$ の 囲む 領域は $f(K_{i+1})$ の 囲む もの に 含まれ, $f(K) \subset$
 $\{ |z| > 1 + \varepsilon \}$ とする. N を $f(K_i)$ の 0 を とりまわりの 巻数の 最大
値のものとする. $\cup$ を 1 を 含む $\mathbb{C} \setminus f(S_A)$ の open component と
あるならば, $\cup$ は 重複度 nN 以下の f -regular である’.

定理 6. [4] A を function algebra とし, 或る $f \in A$
に対して, $\mathbb{C} \setminus f(S_A)$ の 各 open component は 或る 重複度
 $n \geq 0$ の f -regular とする. $R(f(S_A)) = C(f(S_A))$ かつ
 $\forall z \in S_A$ に対して $f^{-1}(z) \cap S_A$ は M_A 内の A -convex set と
ある $\Rightarrow M_A \setminus S_A$ は analytic structure を持つ.

定理 7. (cf. Wermer [7]). A を S_A 上の function
algebra とし S_A を metrizabile とする. $f \in A$ とする.
 $\cup$ を $\mathbb{C} \setminus f(S_A)$ の 一つの 成分とし, その 部分集合 G で $\#f^{-1}(z)$
 $< \infty$ とする. さらに 平面測度 μ に対して $\mu(G) > 0$ と
する. $\Rightarrow \forall p \in f^{-1}(\cup)$ は p を 通る 有限個の analytic

disksの和である近傍をもつ.

証明. $U_j = \{z \in U : \#f^{-1}(z) = j\}$ とすると, 或る U_k に対して $\mu(U_k) > 0$ である. U_k の density の点 z_0 に対しては z_0 を中心とする十分小さい閉円板 D をうまくとれば, $f^{-1}(D)$ の各成分は長径で, 次の条件を満たす閉部分集合 $B_0 \subset bD \cap U_k$ が存在する: B_0 は linear measure > 0 で $\forall z \in B_0$ に対して $\#f^{-1}(z) = k$ である. このことから $f^{-1}(D)$ の一つの成分上へ A を制限することによって得られる function algebra に Bishop [2] の Lemma 13 を適用して $f^{-1}(D)$ の点に対して定理の正しい事がわかる.

次に $\#f^{-1}(z) \leq k, \forall z \in U$ であることは Banach space 間の linear transformation を用いる. 大まかに言えば, M_A の或る covering $\{V_j\}$ に対して 局所的に $A|_{V_j}$ (V_j) の uniform closure に属する M_A 上の function algebra $\mathcal{O}_\lambda$ を作り, $\text{map}: g \xrightarrow{T_\lambda} (f - \lambda) \cdot g$ の性質から $\text{codim } T_\lambda(\mathcal{O}_\lambda) = n$ ならば λ に十分近い λ' に対しても $\text{codim } T_{\lambda'}(\mathcal{O}_\lambda) = n$ であるので, $\text{codim } T_0(\mathcal{O}_\lambda) = k$ より上の事が言える. これより $\mu(U \setminus U_k) = 0$ となる.

$U \setminus U_k$ が discrete であることは; $z \in U_k$ のとき $f^{-1}(z) = \{p_1(z), \dots, p_k(z)\}$ とし, $g \in A$ を $p_1(z), \dots, p_k(z)$ で異なる値をとるものとする.

$$\Delta(z) = \prod_{i < j} (g(p_i(z)) - g(p_j(z)))^2$$

とし, $\Delta(z) = 0$ on $\mathbb{U} \setminus \mathbb{U}_R$ と定め Δ に Radó の定理を用いて言える. 以上で $f^{-1}(\mathbb{U}_R)$ の点については済んだ.

最後に $p \notin f^{-1}(\mathbb{U}_R)$ とする. この時は Riemann 面を作って示す. 今開円板 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - f(p)| < \gamma\}$ は

$\Delta \neq 0$ on $D' = D \setminus \{f(p)\}$ となるものとする. $z \in D'$ に対して $\sigma_1, \dots, \sigma_R$ を $g(p_1(z)), \dots, g(p_R(z))$ の elementary symmetric functions とする. このとき σ_j は D 内の正則関数に接続され次式を満たす.

$$g^R - \sigma_1(f) g^{R-1} + \dots + (-1)^R \sigma_R(f) = 0 \text{ on } f^{-1}(D').$$

これに対して

$$w^R - \sigma_1(z) w^{R-1} + \dots + (-1)^R \sigma_R(z) = 0 \text{ を考えると}$$

これは D 上の Riemann 面 Σ を定める. この $\Sigma \cap \Sigma^{-1}(D')$ から $f^{-1}(D')$ への自然な対応は 1-1 onto となり analytic disk の有限和である事が言える.

参考文献

- [1]. H. Alexander, Polynomial approximation and analytic structure, Duke Math. J. 38(1971), 123 - 135.

- [2] E. Bishop, Holomorphic completions, analytic continuations and the interpolation of semi-norms, *Ann. Math.* 78 (1963), 468-500.
- [3] ———, Analyticity in certain Banach algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102 (1962), 507-544.
- [4] J.-E. Björk, Analytic structure in the maximal ideal space of a uniform algebra, *Ark. Mat.* 8 (1971), 239-244.
- [5] G. Stolzenberg, Uniform approximation on smooth curves, *Acta Math.* 115 (1966), 185-198.
- [6] J. Wermer, Function rings and Riemann surfaces, *Ann. Math.* 67 (1958), 45-71.
- [7] ———, *Banach Algebras and Several Complex Variables*, Markham Publishing Company, Chicago, (1971).