

## Navier-Stokes 方程式の数値シミュレーション

### Numerical Simulations for the Navier-Stokes Equations in Incompressible Viscous Fluid Flows

日大生産工 登坂宣好 (Nobuyoshi Tosaka)

日大生産工 角田和彦 (Kazuhiko Kakuda)

#### SUMMARY

A coupling approach of the boundary element method and the finite element method for solving the unsteady incompressible Navier-Stokes equations is presented. A flow field involving an obstacle is divided into two subdomains. The subdomain involving an obstacle is assumed to be an incompressible viscous flow governed by the unsteady Navier-Stokes equations, and a Petrov-Galerkin finite element method (PGFEM) using exponential functions is applied to solve the equations. The other is assumed to be a potential flow governed by the Laplace equation, and the boundary element method is applied to the flow field. Numerical results demonstrate the applicability and effectiveness of the coupling approach and PGFEM using exponential functions developed in our work.

## 1. はじめに

理工学の諸分野において粘性流れの非定常な現象を解明することは重要な問題である。この問題は、これまで理論及び実験的なアプローチを通して解明されてきた。また、最近のコンピュータの発達に伴い数値実験という、いわゆる数値シミュレーションの立場からのこの問題に対するアプローチも盛んに行われている。

この組織的で汎用性のある数値解析手法としては差分法<sup>[1]</sup>や有限要素法<sup>[2]</sup>が多用されている。特に、有限要素法は、対象とする問題の形状が複雑な場合にも容易に適用することができるという点で、有力な手法であるということが知られている。しかしながら、特異性のある問題や無限領域を有する外部問題にこの手法を適用することは難しい。このような問題やポテンシャル問題に対しては、境界のみの離散化手法として導入された境界要素法<sup>[3],[4]</sup>が、特に有力な手法であるということが広く知られている。しかしながら、非線形問題の解析においては、基本解の構成が困難であり、また、この手法の特長が失われる。それゆえ、特異性や無限領域を含む複雑な問題の解析には、対象とする領域をいくつかの部分領域に分割し、各々の場を支配する方程式の性質によって最良な解析手法を適用するという、いわゆる結合解法<sup>[5],[6]</sup>が提案されてきた。

物体まわりの粘性流れの現象は、物体まわりのみに流体の粘性効果が顕著に現れ、それ以外の領域は、非粘性流れ領域と考えられる。このような粘性流れ現象の物理的性質に着目し、物体まわりの粘性流れ領域には有限要素法を用い、それ以外の非粘性流れ領域には境界要素法を適用し、その境界において解を接続するという結合解法を提案した<sup>[7]</sup>。その際、interface 境界条件の取扱いが重要な問題となるが、この点についても検討してきた。本論文では、非定常非圧縮粘性流れ問題に対する上述の結合解法の詳細について展開し、手法の適用性を検討することを目的としてステップを過ぎる流れの数値計算例を示す。また、本手法では粘性流れ領域を支配している Navier-Stokes 方程式を安定にしかも精度良く解くための有限要素スキームの開発が不可欠である。その有限要素スキームには、著者らによって開発された指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法<sup>[8]</sup>が用いられている。このスキームのみによって解析された正方形キャビティ内流れ及び円柱まわりの高レイノルズ数流れの計算例も紹介する。

以下の定式化にあたり、記号  $(,)$  と  $(\dot{\phantom{x}})$  はそれぞれ空間及び時間変数に関する偏微分を表し、また、指標についてはアインシュタインの総和規約を採るものとした。

## 2. 基礎微分方程式

粘性流体場の解析対象領域  $\Omega$  を2つの部分領域  $\Omega_1$  と  $\Omega_2$  に分割する (Fig.1 参照)。また, interface 境界を  $\Gamma_i$  で表す。ここで, 物体  $\Omega_B$  を含む領域  $\Omega_1$  の流れを非圧縮粘性流れとし, それ以外の領域  $\Omega_2$  の流れは非回転で非粘性のポテンシャル流れであると仮定する。これらの領域における基礎方程式は以下で与えられる。

### 2.1 粘性領域 $\Omega_1$ の基礎方程式

この領域における基礎微分方程式は, 無次元化された流速ベクトル成分  $u_i$  と圧力  $p$  に関する次の非定常 Navier-Stokes 方程式と連続の方程式によって与えられる。

$$\dot{u}_i + u_j u_{i,j} = -p_{,i} + \frac{1}{Re} u_{i,jj} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

ただし,  $Re$  はレイノルズ数である。これらの微分方程式の時間に対し準陽的スキームを適用し, さらに修正速度ベクトル  $\bar{u}_i$  を用いて fractional step 分解を導入すれば以下の支配微分方程式を得る。

(a) 第1ステップ

$$\frac{\bar{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n = \frac{1}{Re} u_{i,jj}^n \quad (3)$$

(b) 第2ステップ

$$u_i^{n+1} = \bar{u}_i - \Delta t p_{,i}^{n+1}, \quad u_{i,i}^{n+1} = 0 \quad (4)$$

ただし,  $\Delta t$  は時間間隔,  $n$  は時間ステップ数を表す。

式 (4) の第1式に対し,

$$p^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t} \tilde{\phi} \quad (5)$$

と置くことにより速度ベクトルと修正速度ポテンシャル  $\tilde{\phi}$  に関する次式が得られる。

$$u_i^{n+1} = \bar{u}_i + \tilde{\phi}_{,i} \quad (6)$$

さらに, 上式の発散を採り, 連続の式を用いると  $\tilde{\phi}$  に関する次の Poisson 方程式が導かれる。

$$\tilde{\phi}_{,ii} = -\bar{u}_{i,i} \quad (7)$$

## 2.2 非粘性領域 $\Omega_2$ の基礎方程式

非回転、非粘性の流れ場は、速度ポテンシャル  $\phi$  に関する次の Laplace 方程式

$$\phi_{,ii} = 0 \quad (8)$$

と適当な境界条件で与えられる。

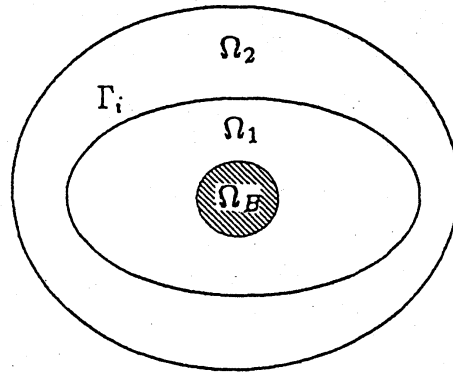


Fig.1 Problem statement

## 3. 境界／有限要素結合解法による定式化

高レイノルズ数の流れ解析も可能な指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法<sup>[8]</sup>により粘性領域  $\Omega_1$  の定式化を行う。一方、領域  $\Omega_2$  には境界要素法が適用される。

### 3.1 領域 $\Omega_1$ の有限要素モデル

式 (3) の重みつき残差表現に発散定理を適用することにより以下の弱形式表現を得る。

$$\int_{\Omega_i} \left\{ \frac{\bar{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n \right\} M_\alpha d\Omega + \int_{\Omega_i} \frac{1}{Re} u_{i,j}^n M_{\alpha,j} d\Omega - \int_{\Gamma_i} \tau_i^n M_\alpha d\Gamma = 0 \quad (9)$$

ただし、 $\Omega_i$  は領域  $\Omega_1$  の部分領域、 $\tau_i^n \equiv u_{i,j}^n n_j / Re$ 、 $n_j$  は単位法線ベクトル成分を表す。

ここで、式 (9) の  $M_\alpha$  として次のような指数関数型の重み関数を選ぶ<sup>[8]</sup>。

$$\left. \begin{aligned} M_\alpha(x_1, x_2) &= \sum_{\gamma} N_\alpha(x_1, x_2) e^{-\{a_1(N_\gamma x_1^\gamma - x_1^\alpha) + a_2(N_\gamma x_2^\gamma - x_2^\alpha)\}} \\ a_1 &= v_1^n \widetilde{Re}, \quad a_2 = v_2^n \widetilde{Re}^* \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし、 $N_\alpha$  は通常使われている形状関数、 $v_i^n (i=1, 2)$  は  $\Omega_i$  内で規定された速度ベクトル、 $\widetilde{Re}$ 、 $\widetilde{Re}^*$  は適当な定数を表す。

式 (9) の未知流速を  $\Omega_i$  内で近似することにより次の有限要素方程式が得られる。

$$M_{\alpha\beta} \frac{\{\bar{u}_i\}_\beta - \{u_i^n\}_\beta}{\Delta t} + K_{\alpha\beta}(u_j^n) \{u_i^n\}_\beta = F_{\alpha\beta} \{\tau_i^n\}_\beta \quad (11)$$

ただし、各行列は文献 [8] で定義されている。また、式 (11) の全体領域  $\Omega_1$  に関する方程式は次式となる。

$$\bar{U} = U^n + \Delta t C^{-1} F^n \quad (12)$$

ただし、 $C$  は対角行列、 $F^n$  は  $n$  時間ステップでの流速ベクトル  $U^n$  と境界条件の値からなる既知ベクトルを表す。

一方、式 (7) に Galerkin 有限要素法を適用することにより次の弱形式表現が得られる。

$$\int_{\Omega_i} \tilde{\phi}_{,i} N_{\alpha,i} d\Omega - \int_{\Omega_i} \bar{u}_{i,i} N_{\alpha} d\Omega = \int_{\Gamma_i} \tilde{\phi}_{,n} N_{\alpha} d\Gamma \quad (13)$$

さらに、 $\tilde{\phi}$  と  $\bar{u}_i$  を  $\Omega_i$  内で近似することにより次の有限要素方程式が得られる。

$$H_{\alpha\beta} \tilde{\phi}_{\beta} - G_{\alpha\beta} \{\bar{u}_i\}_{\beta} = f_{\alpha} \quad (14)$$

ただし、各行列とベクトルは文献 [8] で定義されている。また、式 (14) の全体系に関する方程式は次式で与えられる。

$$B \tilde{\phi} = \bar{F} \quad (15)$$

ただし、 $B$  は帯性を有する係数行列、 $\bar{F}$  は修正速度ベクトル  $\bar{U}$  と  $\tilde{\phi}$  に関する境界条件から与えられるベクトルを表す。

### 3.2 領域 $\Omega_2$ の境界要素モデル

式 (8) の積分恒等式に発散定理を適用し、Laplace 方程式の基本解の性質を用いることにより次の境界積分方程式が得られる [4]。

$$c\phi(\xi) = \int_{\Gamma} \phi_{,n}(x) \varphi^*(x, \xi) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \phi(x) \varphi_{,n}^*(x, \xi) d\Gamma(x) \quad (16)$$

ただし、 $c$  は形状係数、 $\varphi^*(x, \xi)$  は Laplace 方程式の基本解であり、2次元問題の場合に次のように与えられる。

$$\varphi^*(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (17)$$

ここで、式 (16) の境界上の未知関数を近似することにより次の境界要素方程式が得られる。

$$H_{ij} \phi_j = G_{ij} \{\phi_{,n}\}_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (18)$$

ただし、 $N$  は境界上の節点数を表わし、行列  $H_{ij}$  と  $G_{ij}$  は影響行列とする。

### 3.3 解法のアルゴリズム

以下に、本手法に関する解法のアルゴリズムを示す。

**Step 1:**  $n$  時間ステップでの流速ベクトル  $\mathbf{U}^n$  を与え、式 (12) から修正速度ベクトル  $\bar{\mathbf{U}}$  を陽的に求める。

**Step 2:**  $\bar{\mathbf{U}}$  を用い式 (15) から修正速度ポテンシャル  $\tilde{\phi}$  を計算する。

**Step 3:** 粘性流体場に関する  $p^{n+1}$  と  $u_i^{n+1}$  はそれぞれ式 (5) 及び式 (6) の重みつき残差方程式より求める。

**Step 4:** ステップ 3 から得られた interface 境界  $\Gamma_i$  上の流速値を用い、非粘性流体場に関する式 (18) を解き、速度ポテンシャル  $\phi$  を求める。

**Step 5:** 速度ポテンシャル  $\phi$  から非粘性領域内の速度ベクトルと圧力を計算する。その後、ステップ 1 に戻る。

## 4. 数値計算例

本手法の有効性および適用性を示すために、種々の流れの計算例を紹介する。その際、流速ベクトルと修正速度ポテンシャルには双一次要素、圧力は一定要素、さらに速度ポテンシャルには一次要素を採用している。また、式 (15) を解く際に、SCG (scaled conjugate gradient) 法を用いている。

### 4.1 ステップを過ぎる流れ

最初の例題として、ステップを過ぎる流れの計算例を取り上げ、結合解法及び指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法の適用性を示す。対象とする問題の形状を Fig.2 に示す。図中で、 $a$  は物体の高さ、 $h$  は粘性領域の高さを表す。境界条件として、最初の時間ステップで全領域内に流れが生じるように Fig.3(a) の境界条件を設定し、その後のステップから Fig.3(b) のように interface 境界を自由境界とする。

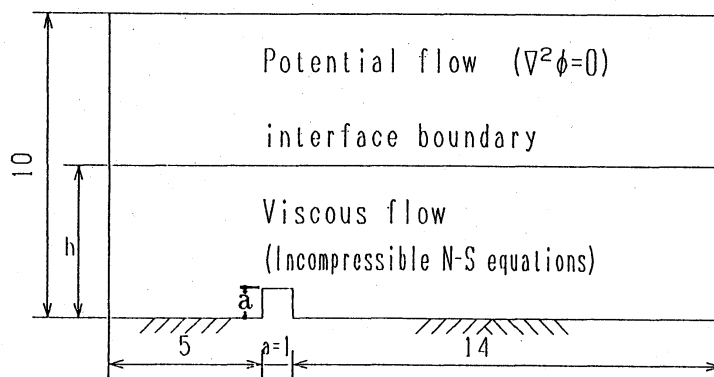
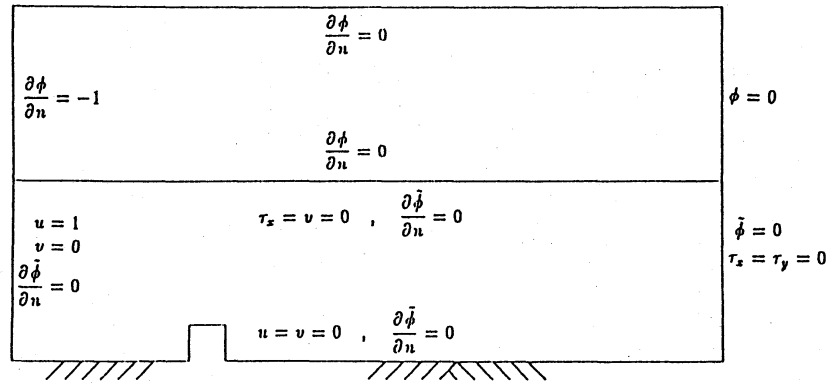
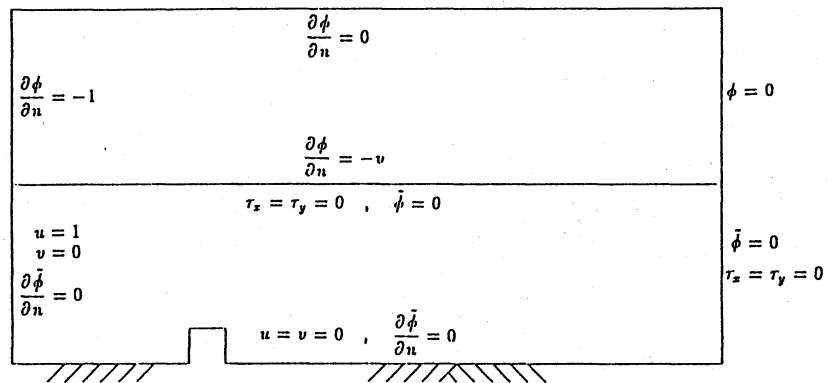


Fig.2 Flow past a step



(a) Boundary conditions at first time step

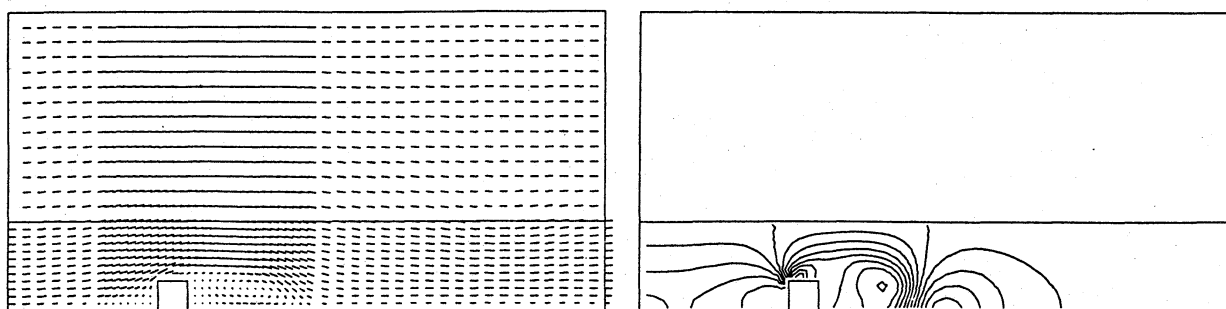
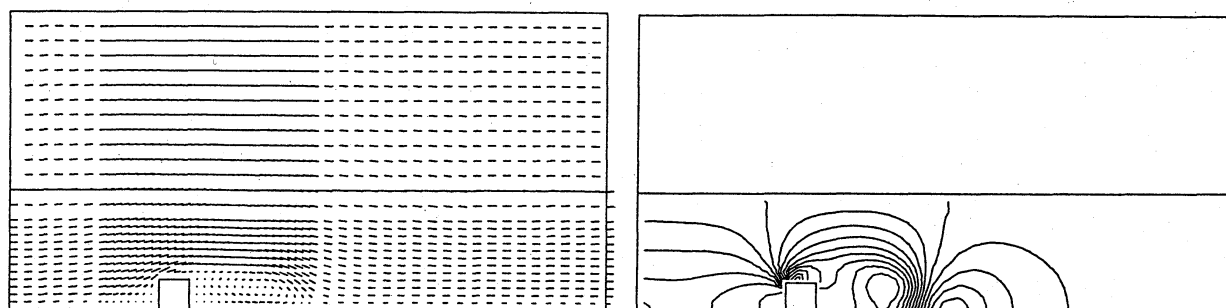
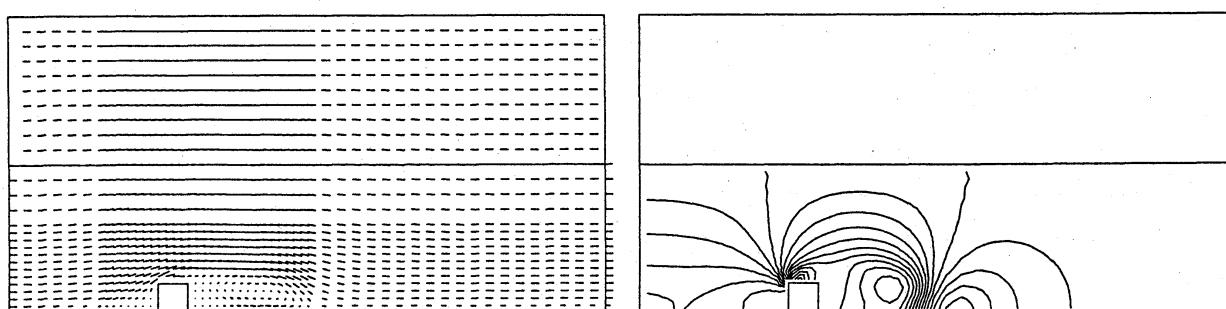
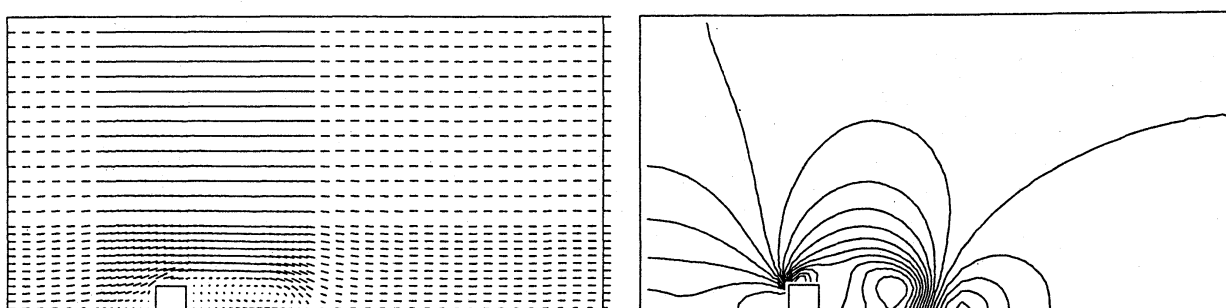


(b) Boundary conditions after second time step

Fig.3 Boundary conditions

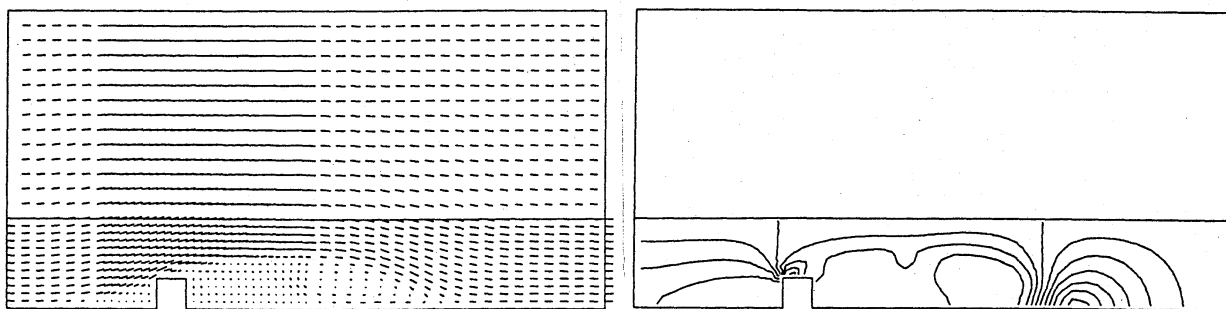
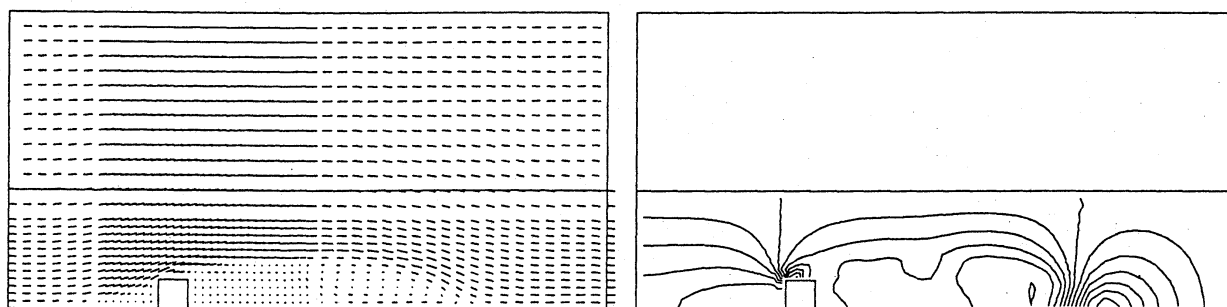
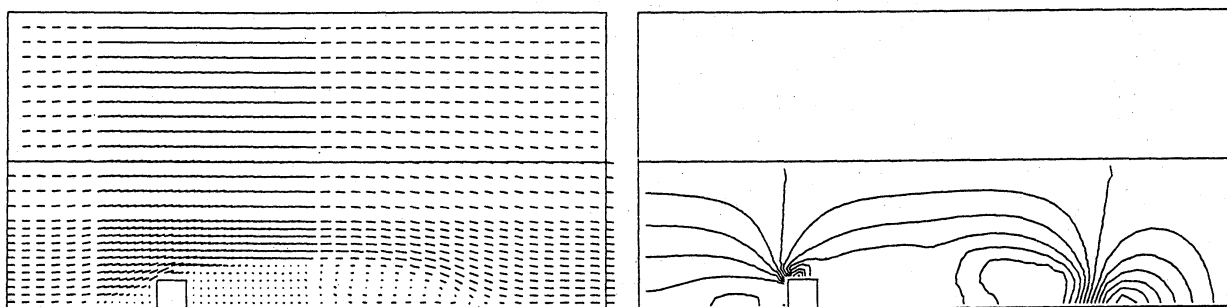
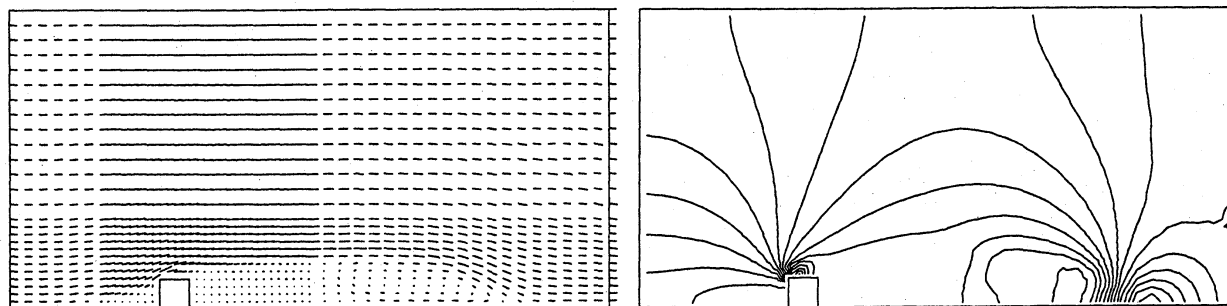
以下で,  $Re = 200$ ,  $\Delta t = 0.1$  に対する計算結果を示す。この場合, 物体の高さ  $a$  に比べて粘性領域  $h$  をどの程度とればよいかが問題となる。そこで,  $h/a = 3, 4, 5$  の場合と全体領域を有限要素法<sup>[8]</sup>のみで解析した場合の計算を行い,  $t = 10$  での流速ベクトル場と圧力場をそれぞれ Fig.4 (a),(b),(c) と (d) で示す。これらの流速ベクトル場を見ると,  $h/a = 3$  の結果には, interface 境界で不自然な wake 現象が現れる。しかし,  $h/a = 4$  以上を選ぶと wake 現象はほとんど消えてしまい, 有限要素法のみで計算された流れのパターンと一致する。また, 圧力場に関するステップ周辺の状況はどの場合もよく一致する。

次に,  $Re = 10^3$ ,  $\Delta t = 0.1$  の場合の計算結果は Fig.5 に示される。Fig.5 (a),(b) と (c) は, それぞれ  $t = 50$  での  $h/a = 3, 4, 5$  に関する流速ベクトル場と圧力場を示す。同じ時間ステップでの有限要素解は Fig.5 (d) に示される。この場合にも  $h/a = 4$  以上に対しては有限要素解と比較しても良好な結果が得られている。

(a) Numerical solutions for  $h/a = 3$ (b) Numerical solutions for  $h/a = 4$ (c) Numerical solutions for  $h/a = 5$ 

(d) FEM solutions

Fig.4 Velocity vector and pressure fields at  $t = 10$  ( $Re = 200, \Delta t = 0.1$ )

(a) Numerical solutions for  $h/a = 3$ (b) Numerical solutions for  $h/a = 4$ (c) Numerical solutions for  $h/a = 5$ 

(d) FEM solutions

Fig.5 Velocity vector and pressure fields at  $t = 50$  ( $Re = 10^3, \Delta t = 0.1$ )

また、非粘性領域内の内点での流速計算における次の3つの場合のCPU時間の比較を  $Re = 200$  に対して行い、その結果を Table 1 に示す。

case 1: 有限要素解に対応する全ての内点の計算を行う場合。

case 2: 内点の計算を行わない場合。

case 3: 代表的な9個の内点の計算を行う場合。

これらの結果を見ると、cases 2, 3 に関しては、有限要素法のみで解析を行った場合と比較して大幅にCPU時間が減少している。

Table 1 CPU time on a Sparc Station 2

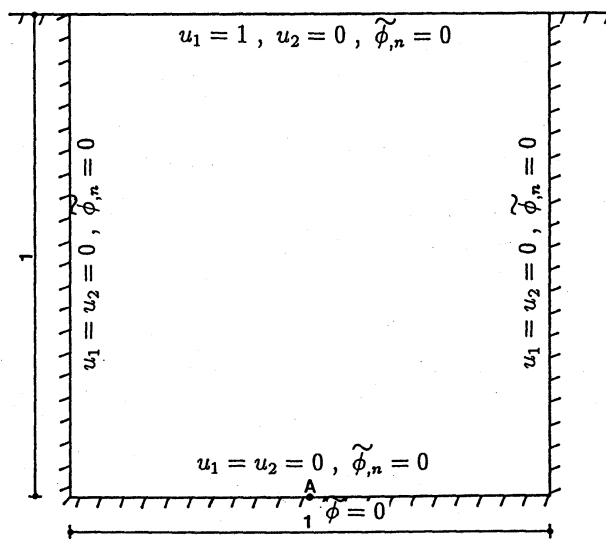
|                     | Case1 | Case2 | Case3 |
|---------------------|-------|-------|-------|
| FEM & BEM $h/a = 3$ | 772.7 | 153.9 | 179.6 |
| FEM & BEM $h/a = 4$ | 697.7 | 183.1 | 209.2 |
| FEM & BEM $h/a = 5$ | 604.7 | 210.5 | 239.7 |
| F E M $h/a = 10$    | 401.6 | 401.6 | 401.6 |

(s)

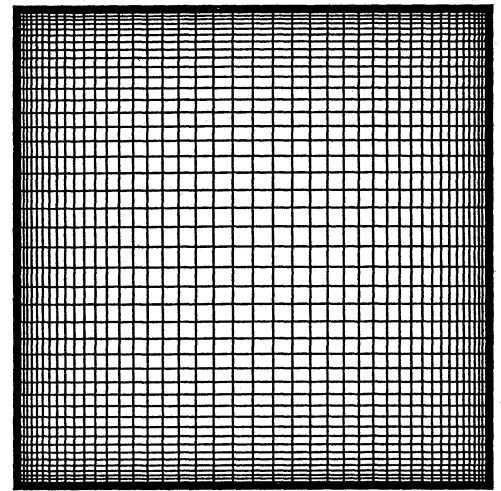
#### 4.2 正方形キャビティ内流れ

指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法の有効性を検討するために、2次元正方形キャビティ内流れの計算例を示す。この問題の形状と境界条件及び有限要素メッシュを Fig.6 に示す。総節点数 2601, 要素数 2500 である。

Fig.7 には、 $Re = 10^4$  に関する  $t = 150$  での速度ベクトル場と圧力場を示す。時間間隔  $\Delta t = 0.005$  である。また、Fig.8 は、キャビティ内の垂直及び水平中央線での  $u_1$  及び  $u_2$  の分布を他の結果<sup>[9]-[11]</sup>との比較を通して示す。これらの結果は、Ghia ら<sup>[10]</sup>及び Schreiber ら<sup>[11]</sup>の結果と良い一致を示している。

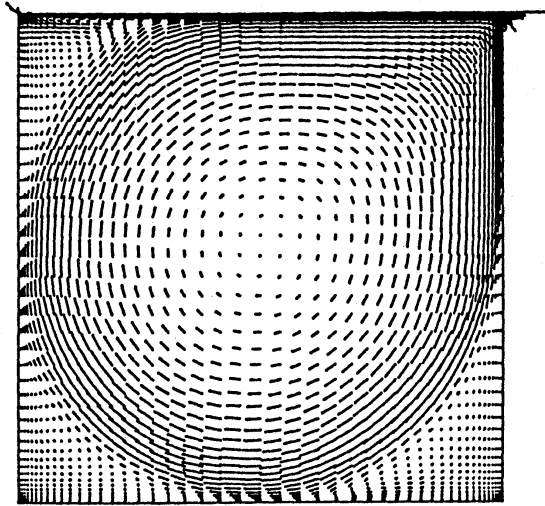


(a) Geometry and boundary conditions

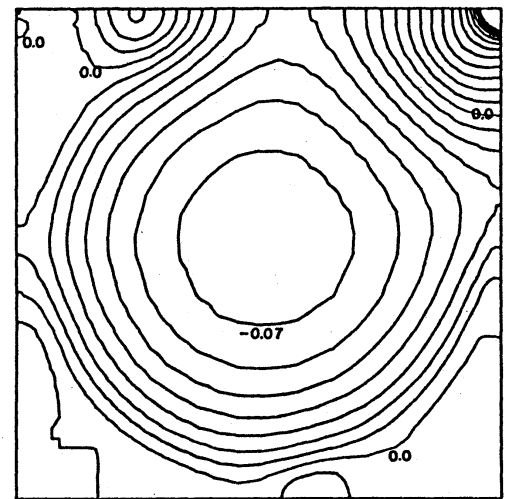


(b) Finite element mesh

Fig.6 Flow in a square cavity



(a) Velocity vector field



(b) Pressure field

Fig.7 Velocity vector and pressure fields at  $t = 150$  ( $Re = 10^4, \Delta t = 0.005$ )

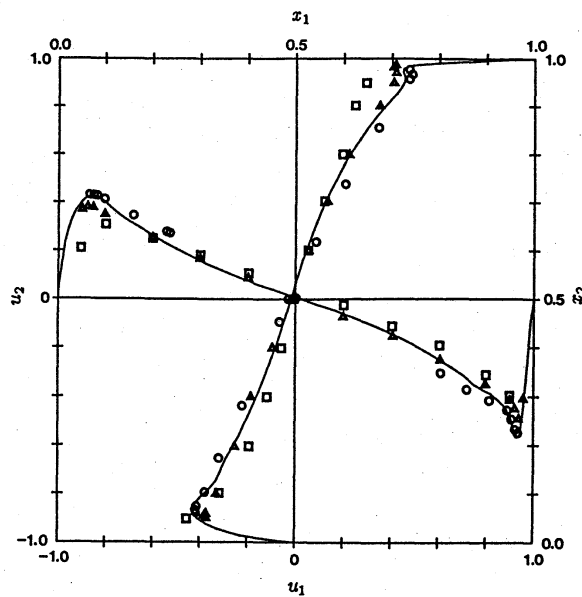


Fig.8 Velocity profiles through the centre of the cavity ( $Re = 10^4$ ): — present ( $t = 150$ );  
 ○ Ghia et al. (257 by 257, multi grid FDM);  
 ▲ Schreiber and Keller (180 by 180, FDM);  
 □ Nallasamy and Prasad (50 by 50, upwind FDM)

#### 4.3 円柱まわりの流れ

高レイノルズ数流れに対する指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法の適用性を示すために、2次元円柱まわりの流れの計算例を紹介する。以下に、総節点数 8840、要素数 8600 における数値計算結果を示す。この問題の形状と境界条件及び有限要素メッシュを Fig.9 に示す。Fig.10 には、それぞれ  $Re = 10^5, 5 \times 10^5, 10^6$  における  $t = 50$  での速度ベクトル場と圧力場を示す。 $\Delta t = 0.001$  である。また、得られた抗力係数と他の結果<sup>[12]</sup>との比較は Fig.11 に示される。この図中に分割の粗い場合の計算結果<sup>[13]</sup>も示されている。分割数を増やすことで、抗力係数の急減を捉えることができた。

$$\tau_1 = u_2 = 0, \tilde{\phi}_{,n} = 0$$

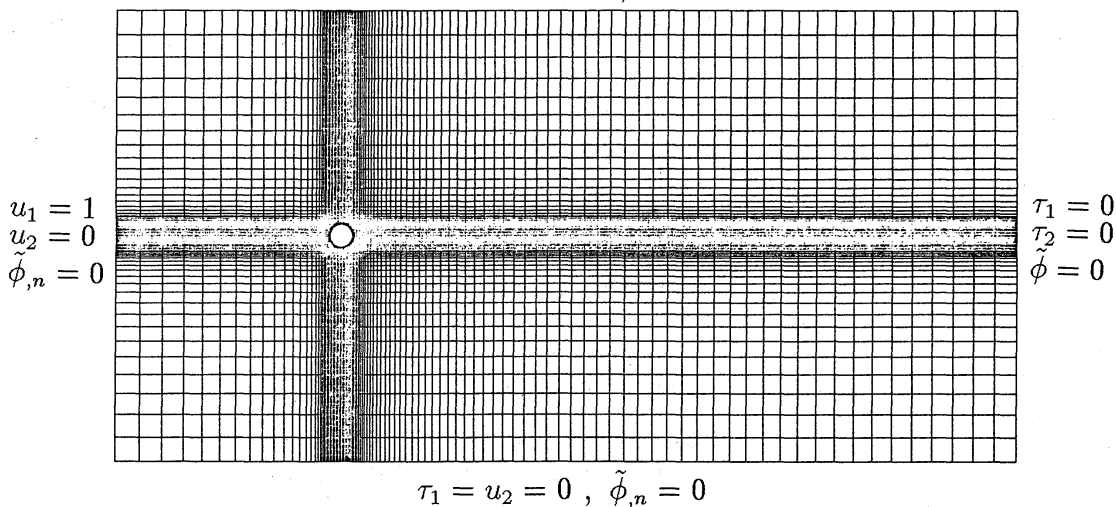


Fig.9 Flow past a circular cylinder

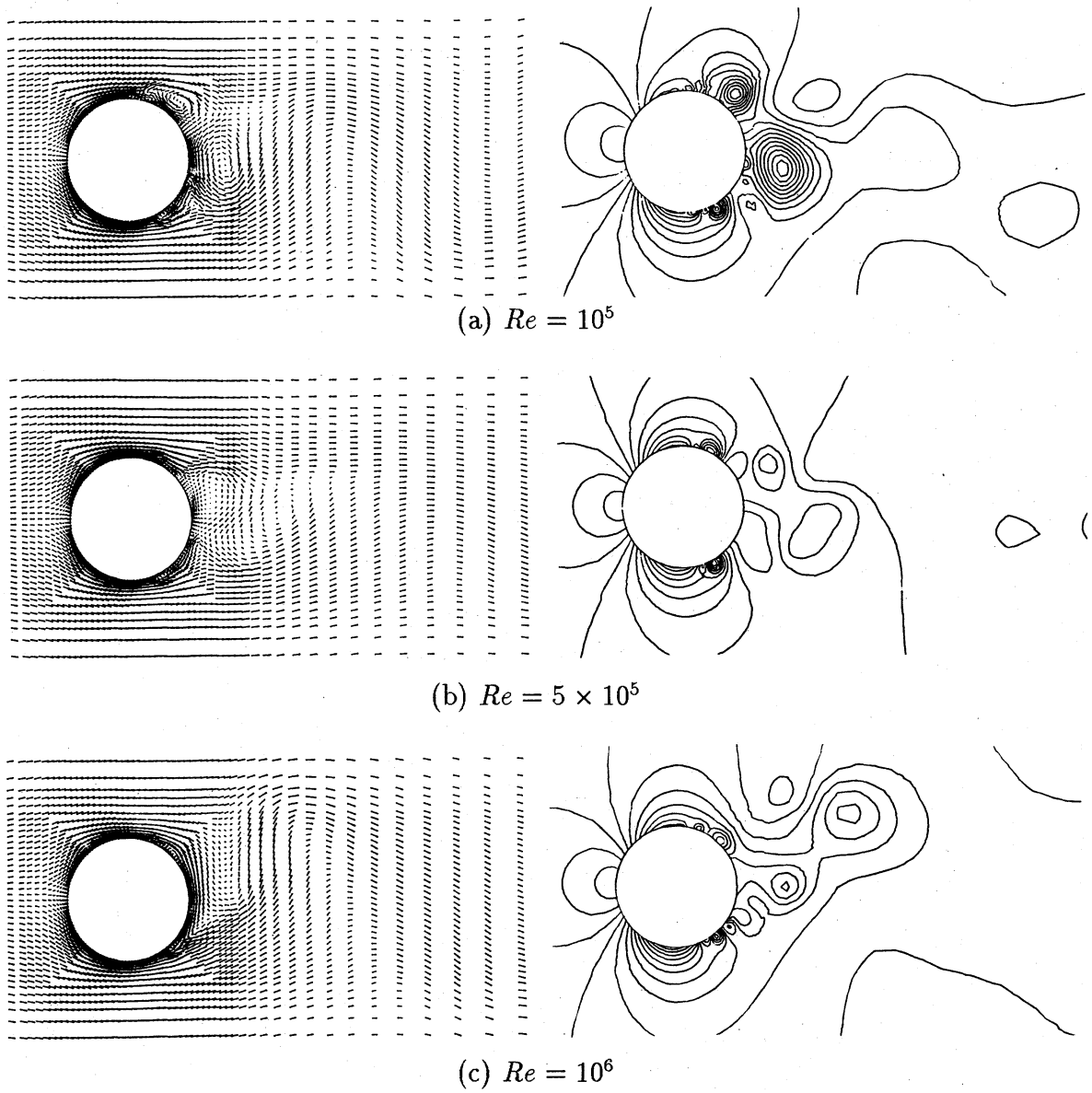


Fig.10 Velocity vector and pressure fields at  $t = 50$  ( $\Delta t = 0.001$ )

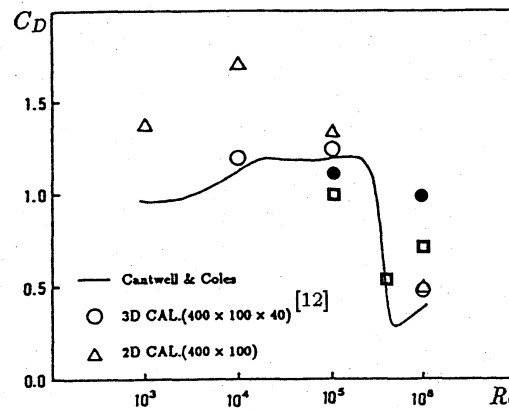


Fig.11 Drag coefficient as a function of  $Re$ , present (●:coarse mesh [13], □:fine mesh)

## 5. おわりに

非定常非圧縮粘性流れ問題に対し、有限要素法と境界要素法の結合解法による定式化とその数値計算例を示してきた。物体を含む流れ場を2つの部分領域に分け、物体を有する部分領域内の流れは、非定常 Navier-Stokes 方程式によって支配された非圧縮粘性流れと仮定され、その方程式を解くために指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法が適用された。もう一方の部分領域内の流れは、非回転、非粘性のポテンシャル流れと仮定され、その流れ場には境界要素法が適用された。また、2つの流れ場に関する解の接続は interface 境界を通して行われた。以下に本手法の特徴を示す。

- 1) FEM 解析における帯性行列の性質は保たれる。これは、計算機記憶容量の縮小化につながる。
- 2) BEM 解析において、時間進行の前に1度だけ係数行列の逆行列を求めておけばよい。CPU 時間の節約につながる。
- 3) BEM 領域は境界のみを離散化すればよいため、全体としての領域分割の煩雑さが少なくなる。
- 4) 指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法は、高レイノルズ数流れの問題にも適用することができ、解の精度及び安定性ともに優れた解法である。

## 参考文献

- [1] Peyret, R. and Taylor, T.D. : Computational Methods for Fluid Flow, Springer-Verlag, 1983.
- [2] Thomasset, F. : Implementation of Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Springer-Verlag, 1981.
- [3] Brebbia, C.A., Telles, T.C.F. and Wrobel, L.C. : Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, 1984.
- [4] 登坂, 中山 : 境界要素法の基礎, 日科技連, 1987
- [5] Zienkiewicz, O.C., Kelly, D.W. and Bettess, P. : The coupling of the finite element method and boundary solution procedures, Int. J. Numer. Meths. Eng., Vol.11, 355-375, 1977.

- [6] Wendland, W.L. : On asymptotic error estimates for combined BEM and FEM, (Eds., Stein, E. / Wendland, W.L.), Finite Element and Boundary Element Techniques from Mathematical and Engineering Point of View, Springer-Verlag, 1988.
- [7] 登坂, 角田, 吉川, 安重 : 有限要素法と境界要素法の結合解法による非圧縮粘性流れ問題の近似解析, 第5回計算力学シンポジウム報文集, 199-204, 1991.
- [8] 角田, 登坂 : 指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法による非圧縮性粘性流れ問題の近似解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第15巻, 11-16, 1991.
- [9] Nallasamy, M. and Prasad, K.K. : On cavity flow at high Reynolds numbers, J. Fluid Mech., Vol.79, part 2, pp.391-414, 1977.
- [10] Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T. : High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, J. Comput. Phys., 48, pp.387-411, 1982.
- [11] Schreiber, R. and Keller, H.B. : Driven cavity flows by efficient numerical techniques, J. Comput. Phys., 49, pp.310-333, 1983.
- [12] Tamura, T. and Kuwahara, K. : Direct finite difference computation of turbulent flow around a circular cylinder, Numerical Methods in Fluid Dynamics 2, 645-650, 1989.
- [13] 角田, 登坂 : 指数関数型 Petrov-Galerkin 有限要素法による2次元円柱まわりの流れ解析, 第5回計算力学シンポジウム報文集, 177-182, 1991.