

重積分の近似計算について

名古屋大学 数学教室 江田 義計

§ 1.

単位立方体 $U_s = \{X = (x_1, \dots, x_s), 0 \leq x_i \leq 1 \ (1 \leq i \leq s)\}$

とし、 U_s の点 $A = (a_1, \dots, a_s)$ を任意に与えても、 U_s の点列 $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_s^{(k)}) \ (k=1, 2, \dots)$ についていっても

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} N_n(A) - a_1 \cdots a_s \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} D_{s,n}(A) = 0 \quad (1)$$

であるならば、点列 $\{X^{(k)}\}$ は U_s 上で一様分布をなすという。

ここで $N_n(A) = \# \{X^{(k)}, 1 \leq k \leq n, x_i^{(k)} < a_i \ (1 \leq i \leq s)\}$

であり、 $\sup_A D_{s,n}(A)$ は $\{X^{(k)} \ (1 \leq k \leq n)\}$ の DISCREPANCY

という。 $\{X^{(k)}\}$ が U_s 上一様分布をなすための必要十分条件

は U_s 上の任意の R -可積分関数 $f(X)$ としたとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{U_s} f(X) dX - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X^{(k)}) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{s,n}(f(X^{(k)})) = 0 \quad (2)$$

となることである。これは H. WEYL による美しい結果である

が (1) は点列 $\{X^{(k)}\}$ の U_s での均衡性を示すとも見られる、

(2) は積分に対する近似計算を与えることを見てもよい。

先の均等性について次の J. H. HALTON (1960) の結果をあげよう：

よう：

自然数 $k \leq n$, $r > 1$ とし k の r 進法表示を

$$k = k_0 + k_1 r + \dots + k_M r^M \quad (0 \leq k_j < r \quad (1 \leq j \leq M))$$

と、その係数を用いて次の小数 $\varphi_r(k) = k_0/r + k_1/r^2 + \dots + k_M/r^{M+1}$

($M = \lfloor \log n / \log r \rfloor$) を作る。 p_i は i 番目の素数とし $\{p_1, \dots, p_s\}$ を指定し $Y_0^{(k)} = (\varphi_{p_1}(k), \dots, \varphi_{p_s}(k))$ ($k=1, 2, \dots$),

($p_s < n$) とおく、このとき

$$\sup_A D_{s,n} \leq 2^s \cdot \left(\prod_{i=1}^s p_i / \log p_i \right) \frac{\log^s n}{n},$$

また $Z_0^{(k)} = (k/n, \varphi_{p_1}(k), \dots, \varphi_{p_{s-1}}(k))$ ($k=1, 2, \dots$) ($p_{s-1} < n$) と可

る

$$\sup_A D_{s,n} \leq 2^{s-1} \left(\prod_{i=1}^{s-1} p_i / \log p_i \right) \frac{\log^{s-1} n}{n}.$$

§2

一様分布の均等性と積分の近似計算におよぼす関係について

一つの結果 (H. M. COHEN, 1961) をあげる：

整数 $\alpha \geq 1$ とし、 U_s 上で定義される関数 $f(x)$ について

$$\left| \frac{\partial^r f(x)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_s^{i_s}} \right| < C, \quad \begin{cases} r \leq \alpha s, & 0 \leq i_j \leq \alpha \quad (1 \leq j \leq s) \\ i_1 + \dots + i_s = r \end{cases}$$

を満足する関数全体からなる族 $\in H_s^\alpha(C)$ とおく。 U_s の数列 $X^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots$) に対し、もし

$$\sup_A D_{s,n}(A) < \varphi(n)$$

であれば

$$\sup_{f \in H_s^1(C)} I_{s,n}(f(X)) \leq 2^s C \cdot \varphi(n)$$

このことは、もし数値積分のよいものを得ようと思えば、均衡度のよい数列を求めなければならぬことが分る。上の結果と HALTON の結果とを合わせると：

$$\sup_{f \in H_s^1(C)} I_{s,n}(f(Y_0^{(k)})) \leq 4^s C \cdot \prod_{i=1}^s \left(\frac{p_i}{\log p_i} \right) \frac{\log^s n}{n},$$

$$\sup_{f \in H_s^1(C)} I_{s,n}(f(Z_0^{(k)})) \leq 2^{2s-1} C \cdot \prod_{i=1}^{s-1} \left(\frac{p_i}{\log p_i} \right) \frac{\log^{s-1} n}{n}.$$

なお、 $D_{s,n}(A)$ の下からの評価に対しては §4 で与える。

§3

$f(X)$ は各成分について周期 1 をもち、そのフーリエ級数は $| \text{conv} |$ (絶対収束) すると

$$f(X) = \sum_{M=-\infty}^{\infty} c(M) e^{2\pi i(M,X)} \quad \left(\begin{array}{l} M = (m_1, \dots, m_s), \quad m_i \in \mathbb{Z} \\ (M, X) = \text{内積} \end{array} \right)$$

$\alpha > 1$, $C > 0$ を定数として

$$|C(M)| \leq C / (\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^\alpha, \quad \bar{m} = \max(1, |m|)$$

ε 満足する ε とき $f(X)$ の作る関数族 $E_s^\alpha(C)$ とおく。 ε と a_i

$(1 \leq i \leq s)$ は整数とし, $\frac{k}{\varepsilon} A = (\frac{k}{\varepsilon} a_1, \dots, \frac{k}{\varepsilon} a_s) \quad (k=1, 2, \dots)$

とおくと, $f(X) \in E_s^\alpha(C)$ に対し

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\varepsilon} f\left(\frac{k}{\varepsilon} A\right) &= \sum_{M=-\infty}^{\infty} C(M) \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\varepsilon} e^{2\pi i (A, M) \frac{k}{\varepsilon}} \\ &= \sum_{\substack{M=-\infty \\ (A, M) \equiv 0 (\varepsilon)}}^{\infty} C(M) \end{aligned}$$

を得る, かくて

$$\int_{U_s} f(X) dX - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\varepsilon} f\left(\frac{k}{\varepsilon} A\right) = - \sum'_{(A, M) \equiv 0 (\varepsilon)} C(M)$$

かくて左辺の重積分を単一の和で近似する問題は $\frac{k}{\varepsilon} A$ を

まくとって, つまり $A = (a_1, \dots, a_s)$ をまくとって上式の右

辺の絶対値を最大にすることができることはある。そこで $f \in E_s^\alpha(C)$ より

$$\left| \sum'_{(A, M) \equiv 0 (\varepsilon)} C(M) \right| \leq C \sum'_{(A, M) \equiv 0 (\varepsilon)} \frac{1}{(\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^\alpha} = c \Omega$$

とおく。

H.M. Korošob (1957) によると $\Omega < (2s)^\alpha \left(2\zeta\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) + 1 \right)^{\alpha s} p^{-\alpha+\varepsilon}$

$(\varepsilon > 0)$ とするような $A_0 = (1, a, \dots, a^{s-1})$ が存在する。つまり

奇素数 $p > s$ に対し $0 < \varepsilon < \alpha - 1$ なる ε に対し2次式を満

足するような A_0 が存在するのである:

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(c)} I_{s,p}(f(\frac{k}{p}A_0)) < C(2s)^\alpha \left(2s(1+\frac{c}{\alpha})+1\right)^{\alpha s} p^{-\alpha+c}$$

となる A_0 が存在する。実は一般に

$$\Lambda_\alpha = \sum'_{\substack{(A,M) \equiv 0(p) \\ |m_i| \leq p/2}} \frac{1}{(\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s)^\alpha},$$

とおくと

$$I_{s,p}(f(\frac{k}{p}A)) \leq C \left[\Lambda_\alpha + s \left(\frac{2}{p}\right)^\alpha (2s(\alpha)+1)^s \right]$$

を得る。 $\Lambda_\alpha^{1/\alpha} \leq \Lambda_1$ である。

$$\Lambda_1(a) = \Lambda_1(A_0) = \sum'_{\substack{(A,M) \equiv 0(p) \\ |m_i| \leq p/2}} \frac{1}{(\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s)}, \quad A_0 = (1, a, \dots, a^{s-1})$$

とおくと $\Lambda_1(a)$ の最小値をもつ a を求めよう ($1 \leq a \leq p-1$)。

$$\Lambda_1(a) \leq \left\{ (s-1) 2^{s+1} \log^s 3p \right\} \frac{1}{p}$$

となるので $p > s$ ならば (p 素数)

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(c)} I_{s,p}(f(\frac{k}{p}A_0)) < C \left[(s-1)^\alpha 2^{(s+1)\alpha} \log^{\alpha s} 3p + s 2^\alpha (2s(\alpha)+1)^s \right] \frac{1}{p^s}$$

となる a ($p \nmid a$) が存在する (H.M. Korošob, 1959)。

の定義をこのよう:

$s \geq 3$ とし, c, c' は α, s のみに依存する定数として

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(c)} I_{s,p}(f(\frac{k}{p}A)) < C \cdot c(\alpha, s) \frac{\log^{c'(\alpha, s)} p}{p^\alpha}$$

となる $A = (a_1, a_2, \dots, a_s) \pmod p$ の最良係数 (極値係数)

(OPTIMAL COEFFICIENT) という。王元 (1962) はこの A の存在の別証明を次の形で与えている。奇素数 $p > 5$ のとき

$$\sup_{f \in E_s^*(C)} I_{s,p}(f(\frac{p}{p} A_0)) < C (2s)^{\alpha} 3^{\alpha s} (55\alpha)^s \frac{\log^{\alpha(s-1)} p}{p^{\alpha}}$$

§12 H. C. BAXTER (1959) の興味ある結果をあげてこの § を終える:

整数 $m > 1$ と合同式 (ディオファントス方程式)

$$(A, M) \equiv 0 \pmod{m}, \quad A = (a_1, \dots, a_s), \quad M = (m_1, \dots, m_s)$$

が $\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s < m$, $A \neq 0$ なる範囲で解がなければ

$$\sup_{f \in E_s^*(C)} I_{s,n}(f(\frac{K}{n} A)) < C \cdot c(\alpha, s) \frac{\log^{s-1} m}{m^{\alpha}}$$

である。

§4

$$D_{s,n}(A) = \left| N_n(A)/n - a_1 \dots a_s \right|, \quad A = (a_1, \dots, a_s)$$

の下からの評価に対しては、任意の数列 $X^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots$) に対して K. F. ROTH の周知の定理が得られている (1950):

$$D_{s,n}(A) \geq 2^{-2s-\epsilon} (s-1)^{\frac{1-s}{2}} (\log 2)^{\frac{1-s}{2}} \frac{\log^{\frac{s-1}{2}} n}{n}$$

となる $A \in U_s$ が存在する。

ϵ は正整数とし, $0 \leq \lambda < 1$ および C は正の定数とする。

U_s 上で定義される関数 $f(x)$ で ρ 階を超えないすべての微係数はすべて連続, またその絶対値は $C\varepsilon$ にえずとし $f(x)$ の ρ 階微係数については

$$\lim_{y_v \rightarrow x_v} \frac{1}{|y_v - x_v|^\lambda} \left| \frac{\partial^\rho f(x_1, \dots, y_v, \dots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial y_v^{i_v} \dots \partial x_s^{i_s}} - \frac{\partial^\rho f(x_1, \dots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_s^{i_s}} \right| \leq C$$

($1 \leq v \leq s$, $i_j \geq 0$ ($1 \leq j \leq s$), $i_1 + \dots + i_s = \rho$) であるとし, このような $f(x)$ 全体の作る関数族 $H_s(\rho, \lambda, C)$ とする. $H_s(\rho, \lambda, C) \subset H_s^\alpha(C)$ である. このとき U_s の任意の点列 $X^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots$) に対して

$$I_{s,n}(f(X^{(k)})) \geq C \cdot c(\rho, \lambda, s) n^{-\frac{\rho+\lambda}{s}}$$

となるような $f(x) \in H_s(\rho, \lambda, C)$ が存在する. 従って $H_s^\alpha(C)$ に対しては n 個の関数値の算術平均と U_s 上の積分値との誤差は $1/n^\alpha$ よりよく出る事として §2 までの定理等は本質的にはよくはならない. (H. C. Бахвалов, 1959)。

更に次の И. Ф. Шарыгин (1963) の定理がある:

U_s の任意の n 個の点 $X^{(k)}$ ($k=1, \dots, n$) に対して $f(X^{(k)})=0$ ($k=1, \dots, n$) として

$$\int_{U_s} f(x) dx \geq C \cdot c(\alpha, s) \frac{\log^{s-1} n}{n^\alpha}$$

となる $f(x) \in E_s^\alpha(C)$ が存在する. これによつて見れば §2 の Коробов の結果は誤差の主項とも見れる $p^{-\alpha}$ は最善であつた.

§5

最後に華羅 (华罗庚), 王元の代数的単数を利用する方法について述べよう。二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の単数 $\varepsilon = (1+\sqrt{5})/2$ と $\varepsilon' = (1-\sqrt{5})/2$ とし

$$\varepsilon' = (1-\sqrt{5})/2 \quad \text{とし} \quad g_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [\varepsilon^{n+1} - \varepsilon'^{n+1}] \quad \text{とおく} \quad g_n =$$

$$g_{n-1} + g_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad \frac{0.97}{\sqrt{5}} \varepsilon^{n+1} \leq g_n \leq \frac{1.01}{\sqrt{5}} \varepsilon^{n+1} \quad (n > 3),$$

$g_{n-1} g_{n-m} > 0.36 g_n \quad (n > 3, 2 \leq m \leq n-1)$ 等を得る。これは

の性質によつて §3 の Λ_α に対し

$$\Lambda_\alpha < \frac{8.4 \zeta(\alpha) \log g_n}{(0.36)^\alpha g_n^\alpha}$$

を得る。これから $n > 3$ のとき

$$\sup_{f \in E_2^\alpha(C)} \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \frac{1}{g_n} \sum_{k=1}^{g_n} f\left(\frac{k}{g_n}, \frac{g_{n-1}k}{g_n}\right) \right| <$$

$$< C \left(\frac{8.4 \zeta(\alpha) \log g_n}{(0.36)^\alpha g_n^\alpha} + \frac{2^{\alpha+1} (25(\alpha+1))^2}{g_n^\alpha} \right)$$

という。これは §4 の結果から見れば最良である。もし主

題の 4 に注目すれば §3 の $B_A \times B_A \wedge \circ B$ の結果から出る。

§6

実際には OPTIMAL な係数を求めることは、近似計算のやり方、

補間法や重積分を単一積分に近似する：となどへの応用，更に FREDHOLM 型と VOLTERA 型 積分方程式等への応用などは次の参考文献 [1], [2] を参照されたい。上記はそれらの特に [1] の紹介であつたが，文献は一切略したので [1]~[4] にゆだねる。これらの方法（整数論的方法ともよばれる）は我が国では数学辞典などでも紹介されたいなくと余り知られていないと思われるので紹介した次第である。新刊の [4] は重積分の近似計算についてこの最近の結果を知るには都合よくまとめられてあり文献も（数論愛好者には一寸不満かも知れるが）くわしい好著であろう。上記 Korobov の結果は証明ぬきで要領よくまとめられてある。

参考文献

- [1] 华罗庚, 王元: 数値積分及其応用
(科学出版社, 1963, 160頁-じ)
- [2] N. M. KOROBOV: NUMBER THEORETICAL METHODS IN APPROXIMATE ANALYSIS (ロシア語, FIZMATGIZ, MOSCOW, 1963, 224頁-じ)
- [3] N. M. KOROBOV: SOME PROBLEMS IN THE THEORY OF DIOPHANTINE APPROXIMATION. 英訳. Uspehi. 1966. 39頁-じ
- [4]. A. H. STROUD: APPROXIMATE CALCULATION OF MULTIPLE INTEGRALS
PRENTICE-HALL, USA. 1971, 431頁-じ.

1973年4月28日 華羅庚教授は来日された機会に京大の
 数理解析研究所において「代数的数と数値計算への応用」と
 題されて §5 の FIBONACCI NUMBERS の代りに代数的整数を
 利用する方法について、即ち m 分体の $\frac{1}{2} \varphi(m)$ 次の実部
 分体（それは $\cos \frac{2\pi}{m}$ に生成される）（ $m=p$ 素数）について論じ
 られた。筆者は京大の方には出席出来ず、京大に予定されて
 あった講演は取り止めに残りお目に掛くことの出来なかつた
 ことは大変残念であったが、幸ひに名大の中井満師・佐村表
 により講演のメモと拝見することが出来、また一松教授との
 談話等によりここに追記する。

1973. 7. 27.