

# 振動しつつ成長する葉

東大 理 土屋信雄

1  $M$  をコンパクトな  $C^{\infty}$ -級多様体,  $\pi$  をその上の  $C^{\infty}$ -級余次元 1 葉層とする。  $M$  が境界を持つとき,  $\pi$  は境界に接しているとする。  $F$  を  $\pi$  の葉とするときその成長度を定義する。  $M$  を有限個の特殊葉層座標近傍  $\{U_i\}_{i=1,2,\dots,k}$  で被覆する。 定義から各  $U_i$  に対して,  $C^{\infty}$ -級同相  $\psi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^1$  ( $n$  は  $M$  の次元) で  $\pi|_{U_i}$  を  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^1$  の積葉層に写すものが存在する。  $\psi_i^{-1}(\mathbb{R}^{n-1} \times \{x\})$  を  $x$  を通る切片という。 切片の列  $(p_1, p_2, \dots, p_x)$  が切片の鎖であるとは  $p_i \cap p_{i+1} \neq \emptyset$  ( $i=1, 2, \dots, x-1$ ) である事をいう。 葉  $F$  に含まれる切片  $p$  を選ぶ。  $F$  の  $p$  における成長関数とは  $n \in \mathbb{Z}^+$  に対して,  $p$  から出発する長さが  $n$  以下の切片の鎖により到達できる切片の数を対応させる関数である。

$C(\mathbb{Z}^+)$  で,  $\mathbb{Z}^+$  から  $\mathbb{Z}^+$  への単調増加関数のなる集合を表わす。  $g, h \in C(\mathbb{Z}^+)$  に対して  $g > h$  であるとは, 正数  $\alpha, \beta, \gamma$  が存在し

て,  $g(n) > \alpha h(\beta m - \delta)$  が成り立つ事とする。  $g > h$  か  $g < h$  であるとき  $g$  と  $h$  は同じ成長型を持つと言う。

定義 葉  $F$  の成長関数を  $f$  とする。  $F$  が 多項式的成長度 を持つとは, 正数  $d$  が存在して  $f < (n^d)$  となる事をいう。  $F$  が  $d$ -次の 正確に多項式的な成長度 を持つとは  $f$  と  $(n^d)$  が同じ成長型を持つ事をいう。

問題 (G. Hecton [4])  $F$  が多項式的成長度を持つとすると,  $F$  は整数次の正確に多項式的な成長度を持つか?

このノートでは, 成長度が低い時この問題は肯定的である事 (定理 A) 及び  $C^\infty$ -級葉層では否定的である事 (定理 B) を示す。なお [8] によると  $\mathbb{R}^n$  が  $C^\infty$ -級である時,  $\mathbb{R}^n$  が  $C^\infty$ -級 ( $n \geq 2$ ) で殆んどホロノミーを持たない時この問題は正しい。

定理 A  $\mathbb{R}^n$  を  $C^\infty$ -級 ( $n \geq 2$ ) とする。  $F$  を  $\mathbb{R}^n$  の葉,  $f$  をその成長関数とする。  $f < (n^2)$  であるとき,  $F$  は 0, 1 または 2 次の正確に多項式的な成長度を持つ。

定理 B を述べる為に葉  $F$  の 下成長度 ( $\ell_{gr}(F)$ ) と 上成長度

$(u.gn(F))$  を定義する。  $F$  は多項式的成長度を持つとし,  $f$  をその成長関数とする。  $l.gn(F)$  と  $u.gn(F)$  を次で定義する。

$$l.gn(F) = \sup \{ d \in \mathbb{R}^+ \mid f > (nd) \}$$

$$u.gn(F) = \inf \{ d \in \mathbb{R}^+ \mid f < (nd) \}.$$

$l.gn(F) < u.gn(F)$  である時,  $F$  は振動しながら成長すると考えられる。

定理 B 閉 3 次元多様体の  $C^\infty$  級 余次元 1 葉層  $\mathcal{F}$  で次の性質を満たすものがある。 2 以上の整数  $d$  に対し  $\mathcal{F}$  の葉  $F_d$  と  $F'_d$  で次を満たすものがある。

$$d < l.gn(F_d) = u.gn(F_d) < d+1$$

$$d < l.gn(F'_d) < u.gn(F'_d) < d+1.$$

2 定理 A の証明の準備をする。葉  $F$  の 真葉による深度 (proper depth of  $F$ ,  $pd(F)$ ) を次で定義する。

$$pd(F) = \sup \{ k \mid \text{葉の列 } F_0, F_1, \dots, F_k \text{ で次を満たすものが存在する; } F_i \text{ は } F_{i+1} \text{ の極限集合に含まれ, } F_i \neq F_{i+1} \text{ である, また } i < k \text{ の時 } F_i \text{ は真葉であり } F_k = F \text{ である。} \}$$

[7]の定理2の証明から次の命題が従う。

命題(2.1)  $\mathbb{A}^n$ が $C^r$ 級( $r \geq 1$ )であれば、葉 $F$ に対して、  
 $(F \text{の成長関数}) > (n^{\text{pd}(F)})$ である。

$M$ の部分集合 $U$ が( $\mathbb{A}^n$ に関して)飽和であるとは、 $U$ は葉の和集合である事をいう。飽和開集合 $U$ が良好であるとは、 $\overline{U} - U$ が有限枚の真葉から成り、 $U$ に含まれる葉のホロノミー群は自明である事をいう。良好な集合 $U$ が極小であるとは、 $U$ に含まれる相対開飽和部分集合は空集合または $U$ 自身に限る事をいう。 $U$ を極小良好集合とすると、 $U$ に含まれる単純閉曲線 $C$ で $\mathbb{A}^n$ に横断的なものが存在する。今西[5]の結果から $\mathbb{A}^n$ のホロノミー擬群の $C$ への制限 $G$ は $C$ の $C^r$ 級微分同相の群 $\text{Diff}^r(C)$ の部分群であり、 $G$ はNovikov変換と呼ばれる準同型写像  $\varphi: \pi_1(U) \rightarrow \text{Diff}^r(C)$ の像である事がわかる。更に $G$ は可換群である。

定理Aの証明  $u.q.(F) \leq 1$ であるとき、[8]の定理(7.2)から $F$ は0又は1次の正確に多項式的な成長度を持つ。そこで  $u.q.(F) > 1$ であると仮定する。命題(2.1)より  $\text{pd}(F)$ は0, 1又は2である。まず  $\text{pd}(F) = 2$ とすると、再び命題(2.1)より $F$ は2次

の正確に多項式的な成長度を有する。次に  $pd(F)=1$  とする。  
 この時  $F$  は真葉ではない。実際  $F$  が真葉であるとするとき、  
 Cantwell-Conlon の定理 ([1], 命題 2) から、 $F$  の極限集合に含まれる葉は全て真葉であり、命題 (2.1) と組み合わせると、全てコンパクトである事がわかる。そうすると [8] の定理 3 から  $F$  は 1 次の成長度を持つことになる。 $F$  は非真葉であるので、Cantwell-Conlon の定理 ([1], 命題 3) から、 $U = \bar{F} - U\{F\}$  に含まれる真葉は極小良好集合である。 $\bar{F}$  に含まれる真葉は全てコンパクトなので [8] の命題 (5.7) から、そのホロノミー群は可換である。従って [8] の定理 2 から  $F$  は 2 次の正確に多項式的な成長度を持つ。

最後に  $pd(F)=0$  とすると、前出の Cantwell-Conlon の定理から  $M$  自身が極小良好集合である事がわかり、[8] の定理 2 から、 $M$  の全ての葉は 2 次の正確に多項式的な成長度を持つ。  $\square$

3.  $S$  を種数 2 の向き付け可能な閉曲面とする。2 以上の整数  $d$  に対し、 $S \times [-1, 1]$  の葉層で、 $d < l.gn(F) \leq u.gn(F) < d+1$  であるような葉  $F$  を含むものを構成する。

$f$  と  $g$  を  $[-1, 1]$  の向きを保つ同相写像とする。 $S$  の基本群の  $Homeo([-1, 1])$  への表現  $\psi$  で、その像が  $f$  と  $g$  の生成する部分群

$G$ と一致するものが存在する。 $\tilde{S}$ を $S$ の普遍被覆とし、 $\tilde{S} \times [-1, 1]$ の積葉層を、 $\pi_1(S)$ の対角作用で割って得られる $S \times [-1, 1]$ の葉層を $\pi_{(f,g)}$ と書く ([2], (1.8) 参照)。 $\pi_{(f,g)}$ は各ファイバー $\{x\} \times [-1, 1]$ に横断的で、そのモノドロミー写像 (全ホロノミー写像) は $\psi$ と同一視できる。

$f$ として $[-1, 1]$ の微分同相で、各 $x \in (-1, 1)$ に対して $f(x) > x$ であるものとする。整数 $n$ に対して $a_n = f^n(0)$ とする。 $h$ を $[-1, 1]$ の微分同相で、その台は $[a_0, a_1]$ であり、 $x \in (a_0, a_1)$ に対して $h(x) > x$ で、 $h$ は微分同相の1径数群 $\{h^x\}_{x \in \mathbb{R}}$ に埋め込まれているものとする。与えられている整数 $d \geq 2$ に対して、 $(d-2)$ 個の実数 $\alpha_1, \dots, \alpha_{d-2}$ で、 $1, \alpha_1, \dots, \alpha_{d-2}$ が $\mathbb{Q}$ 上独立なものとする。最後に単調増加整数列 $\{N_i\}_{i=1,2,\dots}$ ,  $N_1 \geq 2$ をとる。

$$h_{(0)} = h \circ f^{-\alpha_{d-2}} \circ h^{\alpha_{d-2}} \circ f \circ h^{\alpha_{d-1}} \circ \dots \circ f \circ h^{\alpha_1} \circ f$$

とし、 $k \geq 1$ に対して帰納的に

$$h_{(k)} = f^{N_k} \circ h^{\alpha_k} \circ f^{-N_k} \circ h_{(k-1)}$$

と定義する。 $g = \lim_{k \rightarrow \infty} h_{(k)}$ とする。 $g$ は $[-1, 1]$ の同相写像で $(-1, 1)$ では可微分である。

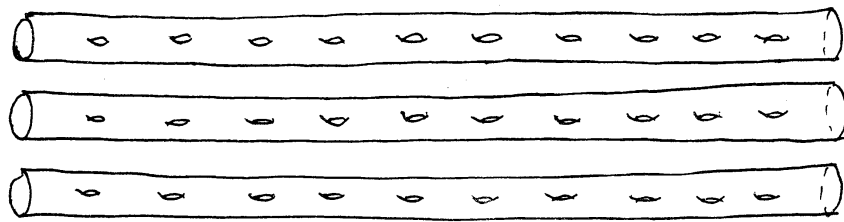
$S \times [-1, 1]$ の葉層 $\pi_{(f,g)}$ を考える。簡単のため $\pi_{(f,g)}$ を単に $\pi$ と書く。 $S$ の基点上のファイバーと区間 $[-1, 1]$ とを同一視する。 $\pi$ について、次の補題が容易に証明できる。

補題 (3.1) (1) 今の真葉は2枚のコンパクトな葉  $S \times \{\pm 1\}$  と,  $a_0$  を通る葉とに限る。

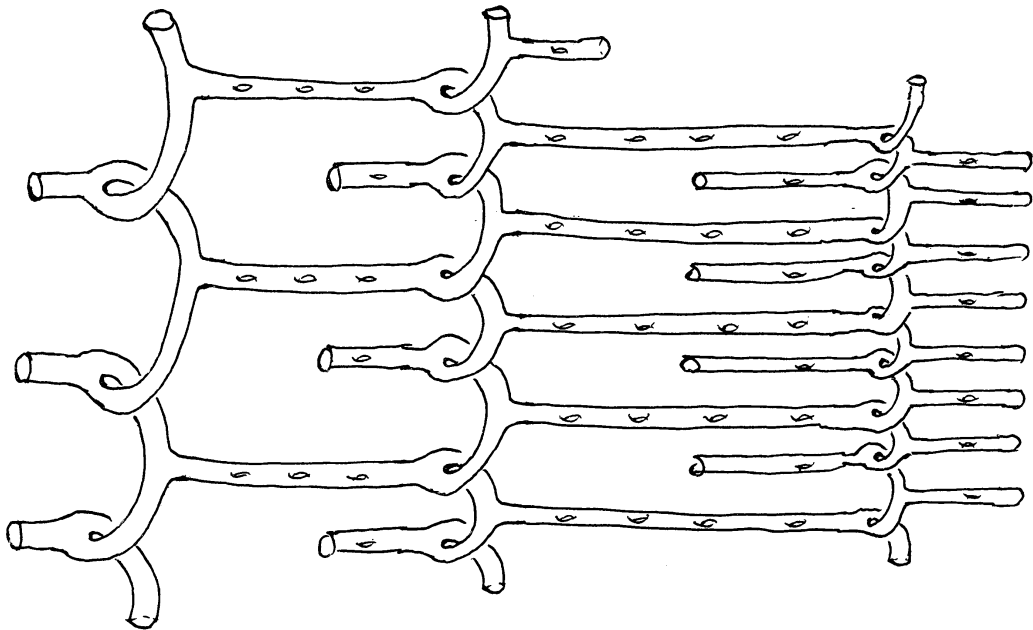
(2) 区間  $(a_0, a_1)$  の飽和化  $U$  は極小良好集合である。

(3)  $U$  の Novikov 変換の像は  $\mathbb{Z}^{d-2} \oplus \Sigma$  と同型である。ここに,  $\Sigma$  は  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  の部分群で  $\{\Sigma^i\}_{i=1,2,\dots}$  により生成されるもの。

$\mathcal{H}(f, id)$  の葉



$\mathcal{H}(f, g)$  の葉



$(a_0, a_1)$  に含まれる点  $x$  をとる。  $F$  を  $x$  を通る葉,  $T = F \cap E \cap I$   
 $= G \cdot x$  とする。  $G$  の元の, 生成集合  $\{f, g\}$  に関する長さから,  
 $T$  の距離  $\delta$  が定義される。  $T$  の成長関数  $\gamma: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  を次で  
 定義する。

$$\gamma(m) = \# \{x' \in T \mid \delta(x, x') \leq m\}.$$

補題 (3.2)  $\gamma(m)$  と  $F$  の成長関数とは同じ成長型を持つ。

証明は例えば [8] の (2.3) にある。

Hector [3] に従って,  $G$  の元  $c$  が  $x$  から  $x' \in T$  への 近道 であるとは  $x' = c(x)$  であり  $\text{length}(c) = \delta(x, x')$  である事とする。与えられた  $x' \in T$  に対して標準形の近道がとれる事を見る。まず  $x'$  に対して整数  $k$  が一意的存在して  $\bar{f}^k(x') \in (a_0, a_1)$  となる。 $\bar{f}^k(x') \in G \cdot x$  であるから整数  $q$ ,  $0 \leq q \leq d-2$  と整数列  $1 \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_q \leq d-2$ ,  $(x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{Z}^q$  と有理数  $\rho$  が一意的存在して

$$\bar{f}^k(x') = h^{x_1 \alpha_{\beta_1} + x_2 \alpha_{\beta_2} + \dots + x_q \alpha_{\beta_q} + \rho}(x)$$

となる。 $\rho$  の整数部分を  $x'$  とすると, 整数  $p$  と整数列  $i_1 < i_2 < \dots < i_p$  が一意的存在して

$$\rho = x' + \text{sign}(x') \{ 2^{-i_1} + 2^{-i_2} + \dots + 2^{-i_p} \}$$

と書ける。 $(x; q, \beta_1, \dots, \beta_q, x_1, \dots, x_q; x', p, i_1, \dots, i_p)$  は, 点  $x'$  の座標と思える。



補題(3.2)  $\alpha$ 'の"座標"を  $(\gamma; \beta_1, \dots, \beta_g, x_1, \dots, x_g; \gamma', p, z_1, \dots, z_p)$  とすると, 次で定義される  $G$  の元  $C$  は  $\alpha$  から  $\alpha'$  への近道である。

(1)  $p=0$  のとき,

$$C = f^x \circ g^{x'} \circ f^{\beta_1} \circ g^{x_1} \circ f^{-\beta_1+\beta_2} \circ g^{x_2} \circ \dots \circ f^{-\beta_{g-1}+\beta_g} \circ g^{x_g} \circ f^{-\beta_g}$$

(2)  $p>0$  のとき

$$C = f^x \circ g^\varepsilon \circ f^{N_{ip}-N_{ip-1}} \circ g^\varepsilon \circ f^{N_{ip-1}-N_{ip-2}} \circ g^\varepsilon \circ \dots \circ g^\varepsilon \circ f^{N_{i1}} \circ g^{x'} \\ \circ f^{\beta_1} \circ g^{x_1} \circ f^{-\beta_1+\beta_2} \circ g^{x_2} \circ \dots \circ f^{-\beta_{g-1}+\beta_g} \circ g^{x_g} \circ f^{-\beta_g},$$

ただし  $\varepsilon = \text{sign}(\gamma')$  とする。

証明は省略する。補題(3.3)の形の近道を標準形の近道といい,  $p$  をその階数という。 $\gamma_p(m)$  を次で定義する。

$\gamma_p(m) = \# \{ C(\alpha) \mid C \text{ は 階数 } p \text{ の 標準形の近道で 長さが } m \text{ かつ } N_p \leq m < N_{p+1} \text{ であれば } \gamma(m) = \gamma_0(m) + \gamma_1(m) + \dots + \gamma_p(m) \text{ である。}$

$\alpha(m)$  で階数  $d$  の自由アーベル群の(自然な基に関する)成長関数を表わす。 $\alpha(m)$  は  $(md)$  と同じ成長型を持つ。

補題(3.4)  $N_p \leq m < N_{p+1}$  である時, 次の評価式が成り立つ。

$$2^{p-1} \cdot \alpha(m - N_{p-1} - 2p) \leq \gamma(m) \leq 2^p \cdot \alpha(m) \quad \dots (*)$$

証明 (3.3) で与えた近道の標準形から, 各  $r, 0 \leq r \leq p$  に対して  $\gamma_r(m)$  についての次の評価が得られる。

$$\sum_{i=r}^p \binom{i-1}{r-1} d(m-d-N_i-r) \leq \gamma_r(m) \leq \sum_{i=r}^p \binom{i-1}{r-1} d(m-N_i-r).$$

(\*) はこの式から容易に従う。 □

評価式(\*) を使う初等的な計算により, 次の命題が証明できる。

命題 (3.5) (1)  $A$  を 3 以上の整数とし,  $N_i = A^i$  とする。

そうすると  $l.gr(F) = u.gr(F) = d + \log^2 / \log A$  となる。

(2)  $A, B$  を正の整数で,  $\log\{(A+1)/A\} < 2/d$  及び  $\log^2 / \log B < \log\{(A+1)/A\}$  を満たすものとする。整数列  $\{N_i\}$  は次の条件を満たすとする;

(i)  $(A+1)^i \leq N_i \leq B^i$

(ii)  $N_i - N_{i-1} \geq A^{i-1}$

(iii) 無限列  $\{p_i\}$  で,  $N_{p_i} = (A+1)^{p_i}$  及び  $N_{p_i+1} = B^{p_i+1}$  を満たすものがある。

このとき  $d < l.gr(F) < u.gr(F) < d+1$  となる。

定理 B の証明 命題 (3.5) より, 各  $d \geq 2$  に対して  $S \times [1, 1]$  の葉層  $\mathcal{F}_d$  と  $\mathcal{F}'_d$  で, それぞれ次の条件を満たす葉  $F_d$  と  $F'_d$  を

含むものが存在する；

$$d < l.gn(F_d) = u.gn(F_d) < d+1$$

$$d < l.gn(F'_d) < u.gn(F'_d) < d+1.$$

定理Bの例は，この  $\mathbb{P}_d, \mathbb{P}'_d$  ,  $d=2, 3, \dots$  を貼り合わせる事によって構成できる。 □

### 参考文献

- [1] J. Cantwell - L. Conlon, Growth of leaves, Comment. Math. Helv. 53 (1978), 93-111.
- [2] A. Haefliger, Variétés feuilletées, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 16 (1964), 367-397.
- [3] G. Hector, Leaves whose growth is neither exponential nor polynomial, Topology 16 (1977), 451-459.
- [4] G. Hector, Croissance des feuilletages presque sans holonomie, Springer lecture note 652, 1978.
- [5] H. Imanishi, On the theorem of Denjoy-Sacksteder for codimension one foliations without holonomy, J. Math. Kyoto Univ. 14 (1974), 607-634.
- [6] J. F. Plante, Foliations with measure preserving holonomy, Ann. of Math. 102 (1975), 327-361.

- [7] N. Touchiya , Lower semi-continuity of growth of leaves.  
, to appear.
- [8] N. Touchiya , Growth and depth of leaves, to appear