

Hurwitz の定理の特性根解析への応用

大阪府立大学大学院工学研究科 原 惟行 (Tadayuki Hara)

Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University

大阪電気通信大学工学部 坂田定久 (Sadahisa Sakata)

Faculty of Engineering, Osaka Electro-Communication University

線形のスカラー積分微分方程式

$$x'(t) = ax(t) - b \int_{t-h}^t x(s) ds \quad (\text{E})$$

を考える. ここで $a, b \in \mathbb{R}$, $h > 0$ とする. 方程式 (E) の零解が UAS になるための必要十分条件を求める. $a > 0$ の場合が難しいが, [1] で次の 2 つの定理が得られている.

Theorem A. Let $a^2 < 2b$. Then the zero solution of (E) is UAS

$$\iff \frac{a}{b} < h < \frac{1}{\sqrt{2b-a^2}} \cos^{-1} \frac{a^2-b}{b}$$

Theorem B. Let $a^2 > 2b$. Then the zero solution of (E) is not UAS.

この結果, $a^2 = 2b$ の場合だけが未解決であり, 次の Conjecture が得られている.

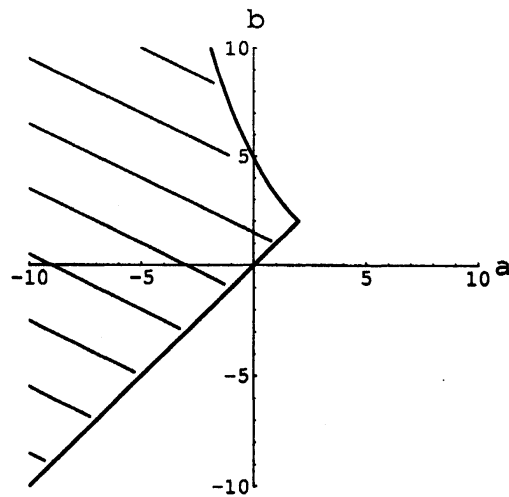
Conjecture. Let $a > 0$ and $a^2 = 2b$. The zero solution of (E) is not UAS for all $h > 0$.

この Conjecture が解決されれば, $a > 0$ のとき

Theorem 1. The zero solution of (E) is UAS

$$\iff a^2 < 2b \text{ and } \frac{a}{b} < h < \frac{1}{\sqrt{2b-a^2}} \cos^{-1} \frac{a^2-b}{b}$$

が成立する. 従って, $a \leq 0$ の場合と Theorem 1 を合わせると (E) の ab-stability region が得られる.

図1 ab -stability region

予想の解決

方程式 (E) の特性方程式は

$$\lambda - a + b \int_{-h}^0 e^{\lambda s} ds = 0 \quad (1)$$

であり, $a^2 = 2b$ のとき特性方程式 (1) は

$$P(\lambda) \equiv \lambda - a + \frac{a^2}{2} \int_{-h}^0 e^{\lambda s} ds = 0 \quad (2)$$

となる.

命題 1. $P(\lambda) = 0$ が $\lambda = 0$ を根に持つのは $h = \frac{2}{a}$ のときのみ

$$\iff a^2 < 2b \text{ and } \frac{a}{b} < h < \frac{1}{\sqrt{2b - a^2}} \cos^{-1} \frac{a^2 - b}{b}$$

$\therefore$ (2) 式により

$$P(0) = 0 \iff -a + \frac{a^2}{2} \int_{-h}^0 1 ds = 0$$

$$\iff -a + \frac{a^2 h}{2} = 0$$

$$\iff h = \frac{2}{a} \quad \square$$

命題 2. $h \neq \frac{2}{a}$ のとき $P(\lambda) = 0$ は虚軸上に根を持たない.

$$\iff a^2 < 2b \text{ and } \frac{a}{b} < h < \frac{1}{\sqrt{2b-a^2}} \cos^{-1} \frac{a^2-b}{b}$$

$\therefore \lambda = i\omega$ ($\omega \neq 0$) なる根があるとしよう. (2) 式により

$$P(\lambda) \equiv \lambda - a + \frac{a^2}{2} \int_{-h}^0 e^{\lambda s} ds = 0$$

なので

$$\begin{aligned} P(i\omega) &= i\omega - a + \frac{a^2}{2} \int_{-h}^0 e^{i\omega s} ds \\ &= i\omega - a + \frac{a^2}{2i\omega} [1 - e^{-i\omega h}] = 0 \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} -2\omega^2 - 2ia\omega + a^2 - a^2(\cos \omega h - i \sin \omega h) &= 0 \\ \iff -2\omega^2 + a^2 - a^2 \cos \omega h &= 0, -2a\omega + a^2 \sin \omega h = 0 \\ \iff \cos \omega h &= 1 - 2\left(\frac{\omega}{a}\right)^2, \sin \omega h = \frac{2\omega}{a} \\ \implies \cos^2 \omega h + \sin^2 \omega h &= \{1 - 2\left(\frac{\omega}{a}\right)^2\}^2 + \left(\frac{2\omega}{a}\right)^2 = 1 \\ \implies 1 - 4\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 + 4\left(\frac{\omega}{a}\right)^4 + 4\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 &= 1 \\ \implies \left(\frac{\omega}{a}\right)^4 &= 0 \\ \implies \omega = 0 &\text{ これは矛盾. } \square \end{aligned}$$

故に, 十分大きな h に対して, $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ なる特性根 λ があることがいえれば, $\lambda = \lambda(h)$ の連続性と命題 2 により $h > \frac{2}{a}$ で $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ なる特性根 λ の存在が示せる.

また $h = 0$ のとき $P(\lambda) = \lambda - a = 0$ より $\lambda = a > 0$ であるから $\lambda = \lambda(h)$ の連続性と命題 2 により $0 < h < \frac{2}{a}$ で $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ なる特性根 λ の存在はいえる. よって示すべき命題は

命題 3. 十分大きな h に対して, $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ である $P(\lambda) = 0$ の特性根 λ が存在する.

である.

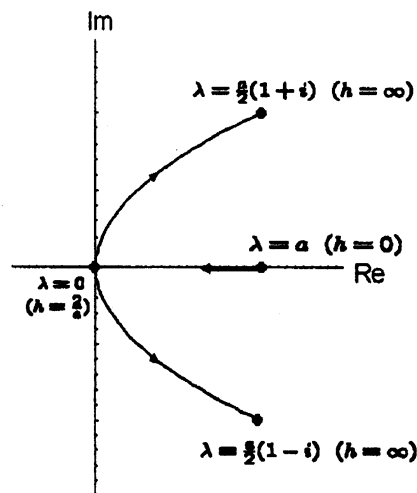


図2 シミュレーションによる $\lambda = a(h=0)$ の根の動き

命題 3 を証明する際のネック

$$P(\lambda) \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ h=\frac{2}{a}}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} P(\lambda) \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ h=\frac{2}{a}}} = 1 + \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{2}{a}}^0 s ds = 1 - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-2}{a} \right)^2 = 0$$

であるから $h = \frac{2}{a}$ のとき $\lambda = 0$ は $P(\lambda) = 0$ の重根である。また特性方程式 (2) を h に関して微分すると

$$\frac{d\lambda}{dh} \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ h=\frac{2}{a}}} = \frac{\frac{a^2}{2}}{1 + \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{2}{a}}^0 s ds} = \frac{\frac{a^2}{2}}{0}$$

となり、 $\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{dh} \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ h=\frac{2}{a}}} \right) > 0$ を示すことにより証明するというテクニックが使えない。

Hurwitz の定理

正則関数列 $f_n(z)$ が単連結な領域 D において定数でない関数 $f_0(z)$ に一様収束するものとする。いま、 D の 1 点 z_0 を $f_0(z)$ の零点とし、 D 内に z_0 を中心とする円 C を描いて、 C の上では $f_0(z) \neq 0$ とする。このとき十分大きな全ての n に対して $f_n(z)$ は円 C の内部 Ω において $f_0(z)$ と同数の零点をもつ。

Hurwitz の定理を特性方程式 (2) に適用して命題 3 を証明する。

$z_0 \equiv \frac{a}{2}(1+i)$ として $D, \Omega, C, f_n(z), f_0(z)$ を次のように定める。

$$D \equiv \{z : \frac{a}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{3}{4}a, \frac{a}{4} < \operatorname{Im} z < \frac{3}{4}a\}$$

$$\Omega \equiv \{z : |z - z_0| < \frac{a}{6}\}$$

$$C \equiv \{z : |z - z_0| = \frac{a}{6}\}$$

$$f_n(z) \equiv z - a + \frac{a^2}{2} \int_{-n}^0 e^{zs} ds$$

$$f_0(z) \equiv z - a + \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^0 e^{zs} ds$$

領域 D では $z \neq 0$ であるから積分をすると

$$f_n(z) = z - a + \frac{a^2}{2z}(1 - e^{-nz})$$

$$f_0(z) = z - a + \frac{a^2}{2z} = \frac{1}{2z}(2z^2 - 2az + a^2)$$

従って,

$$f_0(z) = 0 \implies z = \frac{a}{2}(1 \pm i)$$

右半平面で $f_0(z)$ の零点は $\frac{a}{2}(1 \pm i)$ のみである。特に、領域 D では $f_0(z)$ の零点は $\frac{a}{2}(1 + i) (= z_0)$ のみであるから、 C 上では $f_0(z) \neq 0$ 。また D で $f_n(z)$ が正則であることも明らかである。

次に、 D で $f_n(z)$ が $f_0(z)$ に一様収束することを示そう。領域 D で $z = x + iy$ とすると $\frac{a}{4} < x < \frac{3}{4}a$ であり

$$|e^{-nz}| = |e^{-n(x+iy)}| = e^{-nx} < e^{-\frac{a}{4}n} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

より

$$e^{-nz} \Rightarrow 0 \quad \text{on } D \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

故に,

$$f_n(z) \Rightarrow f_0(z) \quad \text{on } D \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

従って、Hurwitz の定理により $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N$ に対して、 $f_n(z)$ は C の内部 Ω で $f_0(z)$ と同数の零点を持つ。すなわち $f_n(z)$ は Ω で唯1つの零点を持つ。この零点を λ_0 とすると、

$$\lambda_0 - a + \frac{a^2}{2} \int_{-n}^0 e^{\lambda_0 s} ds = 0$$

であり、 $\lambda_0 \in \Omega$ より

$$\operatorname{Re}(\lambda_0) \geq \frac{a}{2} - \frac{a}{6} = \frac{a}{3} > 0$$

すなわち $h = n \geq N$ のとき特性方程式 (2) は $\operatorname{Re}(\lambda_0) \geq \frac{a}{3} > 0$ なる特性根を持つ.

□

以上により, $a > 0$ のとき, Theorem 1 は成立する.

参考文献

- 1 M. Funakubo, T. Hara and S. Sakata, On the uniform asymptotic stability for a linear integro-differential equation of Volterra type, *J. Math. Anal. Appl.*, 324 (2006) 1036-1049.
- 2 A. Hurwitz, Über die Nullstellen der Bessel'schen Funktion, *Math. Ann.*, 33 (1889) 246-266.
- 3 J.L. Schiff, Normal Families, Springer-Verlag, New York, 1993.
- 4 能代 清, 初等函数論, 培風館, p.170, 1954.