

ボソン・フェルミオン共存系の時間依存ダイナミクス模型

丸山 智幸

日本大学、生物資源科学部

神奈川県藤沢市亀井野 1866

Abstract

We construct the dynamical model for the time evolution of the boson-fermion co-existent system. The dynamics of boson and fermions are formulated with the time-dependent Gross-Pitaevsky equation and the Vlasov equation. We show its detailed formulation and the test calculation in this subject

近年のボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) 実験の発展が目覚ましいものであることは周知の通りである。特に、集団運動、渦そして原子ノヴァといった時間発展現象には多くの人々の注目を集めている。これらの現象の研究は純理論的な観点から見ても、有限多体系の時間発展を記述する輸送理論の構築という点から非常に興味深い内容を含んでいる。

このように考える時、BEC で起きている時間発展現象をボソン・フェルミオン共存系へ応用することは、フェルミオン特有の性質による現象への影響だけではなく、輸送理論の発展という点からも今後大いに重要となる研究テーマであろう。

有限多体系の輸送理論を用いた研究は、原子核物理学、特に、重イオン衝突の分野 [1, 2] でさかんに行われて来た。著者自身も数百 MeV/u から数 GeV/u 程度の比較的高いエネルギーでの重イオン衝突の研究を、ローレンツ不変な形式に拡張した相対論的 BUU (RBUU) 法 [3] や相対論的量子分子運動 (RQMD) 法 [4] 等を用いて行って来た。しかしながら、計算模型としては古典近似が非常に良く、輸送理論はあくまでも高温・高密度核物質の状態方程式を決定するための計算用のツールであり、そのものが研究対象として着目されたわけではなかった。もちろん量子揺らぎ等を対象とする研究も存在するが、核構造の未だ不明な部分が大きく輸送理論の研究には多くの障害が存在している。

それに対し BEC 等の原子有限多体系は基本相互作用の不明な点が少なく、有限系での輸送理論の研究としてはすぐれた系であろう。また、BEC は長距離の量子的相関が大きい点で、輸送理論の研究上非常に興味深い物がある。さらに、そこにフェルミオンを混在させるならば、BEC を介在したフェルミオン間の長距離相関についての研究も可能となるであろう。

そこで、我々はフェルミオン・ボソン共存系での輸送模型の制作に着手することとした。輸送理論は BBGKY 密度行列階層模型 [5] を基礎として、1 体あるいは 2 対の密度行列で系の時間

発展の記述を近似することによって得られる。今回は第一段階として古典極限をとるモデルを採用した。以下ではモデルの内容および現段階での計算結果を紹介することにする。

まず系のハミルトニアンを以下のように定義しよう。ボソン場 ϕ とフェルミオン場 ψ を用いてハミルトニアン密度 $\hat{\mathcal{H}}$ は以下のように与えられる。

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_B + \hat{\mathcal{H}}_F + V_{BF} \quad (1)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_B = -\frac{1}{2}\phi^\dagger(\mathbf{x})\nabla^2\phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2\phi^\dagger(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) + \frac{g_B}{2}(\phi^\dagger\phi)^2 \quad (2)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_F = -\frac{\hbar^2}{2m_f}\psi^\dagger\nabla^2\psi + \frac{1}{2}m_f\omega_f\psi^\dagger\psi \quad (3)$$

$$\hat{V}_{BF} = \hbar_{BF}\phi^\dagger\phi\psi^\dagger\psi \quad (4)$$

上記のハミルトニアンは無次元化されたものであり、フェルミオン質量 m_f および調和振動数 ω_f はボソンの質量および調和振動数との比として与えられる。

考えている系 $|\Phi(\tau)\rangle$ では全ての (N_c 個の) ボソンが凝縮状態にあるとして、凝縮状態の波動関数を

$$\phi_c(\mathbf{x}, \tau) = \langle \Phi(\tau) | \phi_B | \Phi(\tau) \rangle \quad (5)$$

と書くことにする。

ボソンの時間発展方程式は ϕ_c について時間依存グロス・ピタエフスキー (GP) 方程式を解けばよいことになる。ここでは S 波の調和振動子波動関数 $u_n(\mathbf{x})$ で展開した：

$$\phi_c(\mathbf{x}, \tau) = \sum_n A_n e^{i\theta_n} u_n(b\mathbf{x}^2) e^{-\frac{i}{2}\nu\mathbf{x}^2}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{2}(-\nabla^2 + \mathbf{x}^2)u_n(\mathbf{x}^2) = (n + \frac{3}{2})u_n(\mathbf{x}^2). \quad (7)$$

ここで A_n, θ_n, b, ν が時間依存変数であり、以下の式でラグランジアンを定義し：

$$L(A_n, \theta_n, b, \nu) = \langle \Phi(\tau) | \{i\frac{\partial}{\partial\tau} - \mathcal{H}\} | \Phi(\tau) \rangle \quad (8)$$

オイラー・ラグランジェ方程式によりこれらの変数の時間発展方程式を得ることができる。

ここで考えている系は、ボソン・フェルミオンともに数千個から数百万個存在する。そのため、静的な系で、特にフェルミオンにおいては、トーマス・フェルミモデルが良い近似となっている。これはフェルミオンの波動関数を求める際に $\hbar \rightarrow \infty$ と近似したことに対応し、動的な系は Vlasov 方程式で記述される。

具体的にはまずフェルミオンの位相空間分布関数 (ウィグナー関数) $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ を一体密度行列 $\rho_M(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ のウィグナー変換で定義する。

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int d^3y \rho_M(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{y}, \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{y}\mathbf{p}/\hbar} \quad (9)$$

フェルミオンの密度分布は以下の式で与えられる。

$$\rho_F(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad (10)$$

このウィグナー関数の時間発展は以下のような方程式で与えられる。

$$\frac{d}{d\tau} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}; \tau) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\mathbf{p}}{m_f} \nabla_{\mathbf{x}} - [\nabla_{\mathbf{x}} U_F(\mathbf{x})][\nabla_{\mathbf{p}}] \right\} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}; \tau) = 0 \quad (11)$$

散逸を取り入れるときは右辺に衝突項を取り入れる (VUU 方程式)。静的解 ($\partial f / \partial \tau = 0$) は

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}; \tau) = \mathcal{A}_F \theta(\varepsilon_F - \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \quad (12)$$

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_f^2} + U_F(\mathbf{x}) \quad (13)$$

となり、TF 近似が得られることが確かめられる。上式で $\mathcal{A}_F$ は規格化因子を表し、 U_F はフェルミオンの感じる平均場であるが、ここでは以下の形となる。

$$U_F(\mathbf{x}) = h\rho_c(\mathbf{x}) = N_c |\phi_c^\dagger(\mathbf{x}) \phi_c(\mathbf{x})| \quad (14)$$

Vlasov 方程式を実際に解く方法は種々あるが将来散逸現象にまで研究を進展させることを考慮して、テスト粒子法を用いることとする。まず、ウィグナー関数を以下の形で近似する。

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \tau) = \frac{(2\pi)^3}{\tilde{N}_T} \sum_{i=1}^{\tilde{N}_T N_F} \delta\{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau)\} \delta\{\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(\tau)\}. \quad (15)$$

ここで $\tilde{N}_T$ はフェルミオン 1 粒子当りのテスト粒子数を表す。これを先の式 (11) に代入すると、

$$\frac{d}{d\tau} \mathbf{x}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{m_f}, \quad \frac{d}{d\tau} \mathbf{p}_i = -\nabla U_F(\mathbf{x}) \quad (16)$$

となる。

実際の計算過程においては、最初に GP 方程式と TF 近似で基底状態を求め、TF 近似の結果に従ってテスト粒子を分布させることになる。そこでテスト粒子法で基底状態を記述できるかのテストを行った。取り扱った系は ^{39}K - ^{40}K 共存系でそれぞれの粒子数は 1000 個とした。相互作用パラメータは Ref.[6] から取った。テスト粒子数を $\tilde{N}_T = 1 \sim 100$ の範囲で変え、一つのテスト粒子数につき 100 事象行い集計を取った。結果が図 1 である。 $\tilde{N}_T = 100$ でほとんど揺らぎなく、TF 計算の結果を再現できることがわかる。

ここでは省略するが、基底状態を初期状態として時間発展を行いその安定性をテストした。やはり、 $\tilde{N}_T = 100$ ではかなり答えが安定であるのに対し、 $\tilde{N}_T = 10$ では安定性が完全ではないという結果を得ている。これは $\tilde{N}_T = 10$ ではテスト粒子がなめらかに分布していないためである。ただし、これらのことは初期状態でテスト粒子をよりなめらか分布させ、さらには密度分布を計算するときにテスト粒子分布の持つデコボコをなめらかにすることにより、より少ないテスト粒子での計算が可能になるであろう。

以上のようにまだ改良すべき問題はあがあるが、模型自体は一応作することに成功した。今後、この模型を用いて種々の現象の研究を行っていく計画である。また、輸送理論の改良、特に、量子揺らぎを取りいえる提案がすでにいくつかなされている。しかしながら、原子核反応ではそれらを十分解析できる程度の定量的信頼性のある実験現象が理論計算があまりなかった。今後、BECを研究することでそのような分野が発展していくことを期待している。

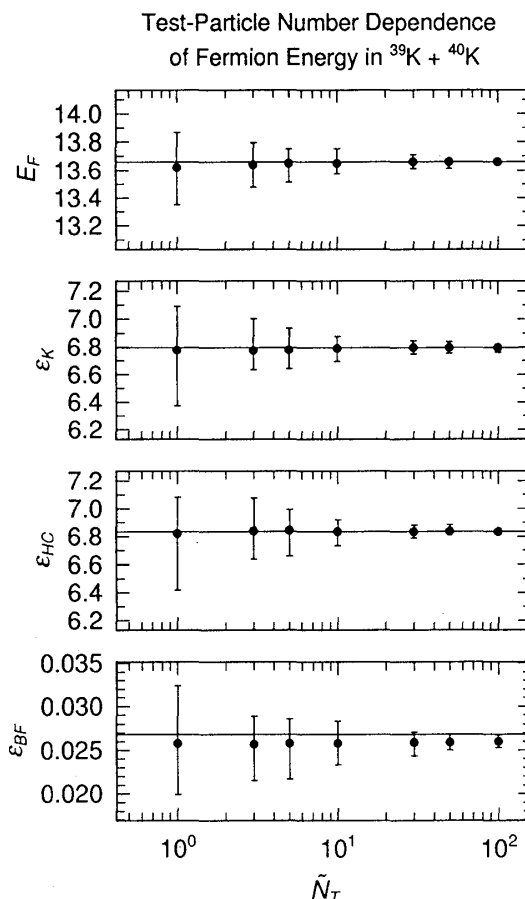


図 1: $\tilde{N}_T$ を変化させたときのフェルミオン・エネルギー。第一、二、三、四段がフェルミエネルギー、運動エネルギー、調和振動ポテンシャルエネルギー、ボソン-フェルミオン相互作用エネルギーを表す。100回事象を繰り返したときの平均値と幅。実線は TF 近似の結果。

- [1] G.F. Bertsch and S. Das Gupta, Phys. Rep. **160** (1988) 189.
- [2] W. Cassing and U. Mosel, Prog. Part. Nucl. Phys. **25** 1990 235.
- [3] T. Maruyama et al., Nucl. Phys. **A573** (1994) 653.
- [4] T. Maruyama et al., Nucl. Phys **A534** (1991) 720.
- [5] R. Balescu, Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics, J. Wiley 1975.
- [6] R. Cote et al., Phys. Rev. **A57** (1998) R4118;
T. Miyakawa et al., J. Phys. Soc. Japan, Vol. 69 (2000) 2779.