

# 保存則のエントロピー解の計算可能性

吉川 敦

九州大学大学院数理学研究院

## 1 はじめに

平成 14 年三月の数理解析研究所における講演では, Dafermos-Bressan 流の波面追跡法に基づく保存則の初期値問題のエントロピー解を, 数式処理ソフトを援用しながら, 構成したいということを述べた. 保存則の flux を折れ線近似し, それに応じて, 有界な台の階段関数で近似された初期値に基づいて, 波面の干渉状況を把握しつつ, Riemann 問題の反復解を構成していけば, あらかじめ初期値から評価される有限回数の干渉の後にもはや干渉の起きない解に到達することが数学解析的に示されている (Dafermos[2], Bressan[1]). したがって, 波面の干渉状況の管理を数式処理ソフトで追跡していけば, このような場合のエントロピー解が得られるだろうというのがそもそもの目論見である.

事実, 数式処理ソフトを利用することによって, 誤差を伴わない正確な有理数演算で, それぞれの干渉を管理できるので, flux の折れ線近似や初期値の近似階段関数を有理数の範囲に留めておけば, 誤差を伴わないエントロピー解を構成できるわけである. より理論的には, 有理数を計算可能実数としてもよいはずである. 現実には, 計算量, 計算時間, 記憶容量の限界があって, 想定しうるすべての場合に実行可能ということはない. しかし, このような手続きを計算機上で実施可能にしておけば, 万事都合のよい場合に限るとは言え, 具体的な初期値から波面の成長の様子を文字通り追跡して行けるはずである. 実際に, このようなことを数式処理ソフト Maple 7 を利用してある程度進めた. ただ, 最終的な詰めがまだ残っていることと, 講究録に収めるには量的にも依然相当の整理が必要である.

一方, 波面追跡法は, もともと近似解法なので, こうして得られた近似解から本来目標の保存則のエントロピー解への収束を論ずる必要がある. しかし, Dafermos の議論 [2] では, この収束を, 本質的に, Ascoli-Arzelà の定理を利用して示しており, ここで, 計算解析学の埒外に出てしまう. ところが, Kruzhkov[4] によるエントロピー解の一意性を考慮すると, 波面追跡解からの直接的な収束が示されてもよいように思われ, しかも, その収束が計算解析学の意味で実効的であることが示されるのではないかと, という予感がある.

このことには、エントロピー解の数値解析を、誤差評価とは異なった立場で、評価する道を拓くという意義もあると考えているので、古典的な数学解析と計算解析学と数値解析学との会合点になるのではないかという期待もあるのである。その確認が、実は、我々の議論の目標であるけれど、まだ、完了はしていない。

以上のように、もともと目指していた議論は未完の状態なので、残念ながら、ここではこれ以上踏み込むことを断念することにした。その代わりに、古典的な非粘性 Burgers 方程式のエントロピー解について、計算可能性を検討してみることにする。基本的には Hopf [3] のアイデアをなぞることになるが、PourEl-Richards [5] 流の Banach 空間（ここでは  $L^1$ -空間）における計算可能性構造が反映するように議論をやり直すことが中心になる。わずらわしいが、既存の文献で簡単に見つかるような話題ばかりではないことも事実である。

## 2 Burgers 方程式

Burgers 方程式の初期値問題

$$u_t(t, x) + u(t, x)u_x(t, x) = \mu u_{xx}(t, x), \quad (1)$$

$$u(0, x) = g(x) \quad (2)$$

を考える ( $t > 0$ ,  $-\infty < x < +\infty$ )。ただし、 $\mu > 0$  は定数である。並行して、線形放物型方程式

$$U_t(t, x) = \mu U_{xx}(t, x) \quad (3)$$

$$U(0, x) = \exp\left(-\frac{1}{2\mu} \int_0^x g(\xi) d\xi\right) \quad (4)$$

をも考える。(3)(4) の解は

$$U(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\mu\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}\right) U(0, y) dy \quad (5)$$

で与えられる。よく知られているように ([3]),  $g(x)$  が  $|x| \rightarrow +\infty$  において緩やかな増大をする、すなわち、

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} \int_0^x g(\xi) d\xi \right| = 0 \quad (6)$$

を満たすとき、Cole-Hopf 変換、すなわち、

$$u(t, x) = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \log U(t, x) \quad (7)$$

の関係が成り立つ<sup>1</sup>.

注意 2.1 特に,  $g(x)$  が直線上絶対可積分ならば, Cole-Hopf 変換において, (4) を

$$U(0, x) = \exp \left( -\frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^x g(\xi) d\xi \right) \quad (8)$$

とすることができる.

一方, 初期値に対する滑らかさなどの情報は Cole-Hopf 変換から得やすい.

命題 2.1  $g(x)$  は (6) を満たし, かつ, 非負であるとする. このとき, (1)(2) の解  $u(t, x)$  は非負である.

実際, (7) を具体的に書き表すと,

$$u(t, x) = -2\mu \frac{\frac{1}{2\sqrt{\mu\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -\frac{x-y}{2\mu t} \right) \exp \left( -\frac{(x-y)^2}{4\mu t} - \frac{1}{2\mu} \int_0^y g(\xi) d\xi \right) dy}{\frac{1}{2\sqrt{\mu\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( -\frac{(x-y)^2}{4\mu t} - \frac{1}{2\mu} \int_0^y g(\xi) d\xi \right) dy}$$

である. ほとんど到るところで,  $\frac{d}{dy} \left( \int_0^y g(\xi) d\xi \right) = g(y)$  となるから, 部分積分を実行すると,

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) N_t(x, y) dy \quad (9)$$

となる. ただし,

$$N_t(x, y) = \frac{\exp \left( -\frac{(x-y)^2}{4\mu t} - \frac{1}{2\mu} \int_0^y g(\xi) d\xi \right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( -\frac{(x-z)^2}{4\mu t} - \frac{1}{2\mu} \int_0^z g(\xi) d\xi \right) dz} \quad (10)$$

である. (6) のもとで, この積分の収束を示すことは難しくはない. しかも,

$$N_t(x, y) > 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} N_t(x, y) dy = 1 \quad (11)$$

である. これより,  $g(x) \geq 0$  ならば  $u(t, x) \geq 0$  となることは明らかである.

<sup>1</sup> 実際,  $U > 0$  に注意する.  $u = -2\mu \frac{U_x}{U}$  より

$$\begin{aligned} u_t &= -2\mu \frac{U_{xt}}{U} + 2\mu \frac{U_x U_t}{U^2}, \quad u_x = -2\mu \frac{U_{xx}}{U} + 2\mu \frac{U_x^2}{U^2}, \\ uu_x &= 4\mu^2 \frac{U_x U_{xx}}{U^2} - 4\mu^2 \frac{U_x^3}{U^3}, \quad u_{xx} = -2\mu \frac{U_{xxx}}{U} + 6\mu \frac{U_{xx} U_x}{U^2} - 4\mu \frac{U_x^3}{U^3} \end{aligned}$$

である.  $U_t = \mu U_{xx}$  により,  $u_t$  を書き直すと

$$u_t = -2\mu^2 \frac{U_{xxx}}{U} + 2\mu^2 \frac{U_x U_{xx}}{U^2}$$

となる. したがって,

$$u_t + uu_x = -2\mu^2 \frac{U_{xxx}}{U} + 6\mu^2 \frac{U_x U_{xx}}{U^2} - 4\mu^2 \frac{U_x^3}{U^3} = \mu u_{xx}$$

系 2.1  $g(x)$  が, さらに, 上に有界,  $g(x) \leq M$ , ならば,  $u(t, x) \leq M$  が成り立つ. より限定的な場合として,  $g(x)$  が上下に有界,  $a \leq g(x) \leq b$ , ならば,  $a \leq u(t, x) \leq b$  が成り立つ.

系 2.2  $g(x)$  は (6) を満たすとする. このとき,  $u(t, x)$  は,  $t > 0$  において,  $t, x$  の関数として無限回連続微分可能 ( $C^\infty$ -級) である.

実際, (3)(4) の解  $U(t, x)$  が  $C^\infty$ -級であることはよく知られている. Cole-Hopf 変換 (7) により,  $u(t, x)$  もそうであることが従う.

命題 2.2  $g(x)$  は直線上絶対可積分であるとする. このとき, (1)(2) の解  $u(t, x)$  は  $x$  に関して絶対可積分である.

実際, (8) のもとでは,  $N_t(x, y)$  を (10) の  $\int_0^y g(\xi) d\xi$  などを  $\int_{-\infty}^y g(\xi) d\xi$  と改めることができる. すなわち,

$$N_t(x, y) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\mu t} - \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^y g(\xi) d\xi\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4\mu t} - \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^z g(\xi) d\xi\right) dz} \quad (12)$$

である. ここで, (11) に加え,  $g(x)$  の絶対可積分性から

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_t(x, y) dx \leq C_\mu(g) \quad (13)$$

$$N_t(x, y) \leq \frac{C_\mu(g)}{2\sqrt{\mu\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\mu t}\right), \quad (14)$$

ただし,

$$C_\mu(g) = \exp\left(\frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\xi)| d\xi\right),$$

の成立が従う. (13) に拠って,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |g(y)| \int_{-\infty}^{+\infty} N_t(x, y) dx \right\} dy$$

と整理でき,  $u(t, x)$  が  $x$  に関して絶対可積分であることがわかる. 特に,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x)| dx \leq C_\mu(g) \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx \quad (15)$$

である.

注意 2.2  $g(x) \equiv 0$  でない限り,  $C_\mu(g) > 1$ , しかも,  $C_\mu(g) \rightarrow +\infty$ ,  $\mu \rightarrow 0$ , だから, (15) はよい評価ではない. 実際, 大幅な改良を後述する (定理 3.1).

(14) から, 次のようなこともわかる.

系 2.3  $g(x)$  は直線上絶対可積分とする. (1) (2) の解  $u(t, x)$  について

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |u(t, x)| \leq \frac{C_\mu(g)}{2\sqrt{\mu\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx, \quad t > 0,$$

が成り立つ. すなわち,  $u(x, t)$  は  $x$  の関数として有界である.

補題 2.1  $g(x)$  が直線上絶対可積分であれば,  $t > 0$  のとき,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial x} N_t(x, y) \right| dx \leq \frac{1}{\sqrt{\mu t}} \{C_1 + C_2 C_\mu^1(g)\} C_\mu(g)$$

が成り立つ.  $C_1, C_2$  は  $t, \mu$  および  $g(x)$  に依存しない正の定数であり,

$$C_\mu^1(g) = \frac{1}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx C_\mu(g)$$

である.

実際, (12) の  $N_t(x, y)$  の偏導関数を計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} N_t(x, y) = & -N_t(x, y) \left\{ \frac{x-y}{2\mu t} \right. \\ & \left. + \frac{\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4\mu t} - \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^z g(\xi) d\xi\right) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4\mu t} - \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^z g(\xi) d\xi\right) dz} \right\} \end{aligned}$$

である. 右辺の偏微分を実行すると,

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x-z}{2\mu t} \right) \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{4\mu t} - \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^z g(\xi) d\xi\right) dz$$

が生ずる. この項に部分積分を行って整理すると

$$\frac{\partial}{\partial x} N_t(x, y) = -\frac{x-y}{2\mu t} N_t(x, y) + \frac{1}{2\mu} u(t, x) N_t(x, y) \quad (16)$$

を得る. したがって, 系 2.3 と (14) とを組み合わせると,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} N_t(x, y) \right| \leq \frac{C_\mu(g)}{\sqrt{\mu t}} \{C_1 + C_2 C_\mu^1(g)\} \frac{1}{\sqrt{8\mu\pi t}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{8\mu t}\right)$$

となる. ここで,  $C_1 = \sqrt{\frac{2}{e}}$ ,  $C_2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$  である. なお,

$$\frac{\partial}{\partial y} N_t(x, y) = \frac{x-y}{2\mu t} N_t(x, y) - \frac{1}{2\mu} g(y) N_t(x, y) \quad (17)$$

系 2.4  $g(x)$  が絶対可積分ならば,  $t > 0$  のとき,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u_x(t, x)| dx \leq C_\mu^1(g) (C_1 + C_2 C_\mu^1(g)) \sqrt{\frac{\mu}{t}}$$

$$|u_x(t, x)| \leq \left( \frac{C_1 C_2}{4\sqrt{2}} + C_2^2 C_\mu^1(g) \right) C_\mu^1(g) \frac{1}{t}$$

が成り立つ.

実際, 前半は補題 2.1 から従う. 後半は, (16) より,

$$\frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \frac{x-y}{2\mu t} N_t(x, y) dy + \frac{1}{2\mu} u(t, x)^2 \quad (18)$$

だから, 系 2.3 と (14) を利用して評価すればよい.

注意 2.3  $g(x)$  の導関数  $g'(x)$  が絶対可積分ならば,  $g(x)$  は有界である. しかも, (16) (18) から,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g'(y) N_t(x, y) dy \\ &\quad - \left( \frac{1}{2\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)^2 N_t(x, y) dy - \frac{1}{2\mu} u(t, x)^2 \right) \end{aligned}$$

となる. 右辺の () 内は非負である.

補題 2.2  $g(x)$  が絶対可積分ならば,  $t > 0$  のとき,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_t(x, y) \right| dx \leq (C_1' + C_2' C_\mu^1(g) + C_3' C_\mu^1(g)^2) C_\mu^1(g)$$

となる.

実際, (16) から

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_t(x, y) &= \left( -\frac{1}{2\mu t} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) \right) N_t(x, y) \\ &\quad + \left( -\frac{x-y}{2\mu t} + \frac{1}{2\mu} u(t, x) \right)^2 N_t(x, y) \end{aligned}$$

となる. 各項の評価は, 補題 2.1 の証明の場合と同様である.

(15), 補題 2.1, 系 2.4, 補題 2.2 から, 次の命題が直ちにわかる:

命題 2.3  $g(x)$  が直線上絶対可積分ならば,  $t > 0$  のとき,  $u(t, x)$  および偏導関数  $u_x(t, x)$ ,  $u_{xx}(t, x)$  も  $x$  の関数として絶対可積分である.

初期値との関係を確認しておく.

命題 2.4  $g(x)$  が直線上絶対可積分ならば,  $t > 0$  のとき,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x) - g(x)| dx \\ & \leq C_\mu(g) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x + 2\sqrt{\mu t} \eta) - g(x)| dx d\eta \end{aligned}$$

が成り立つ. 特に,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x) - g(x)| dx = 0$$

である.

実際,  $u(t, x) - g(x)$  を (11) に注意して書き直し, さらに, (12) の分子分母に必要な積分変数の変換を行ってから, 評価すればよい.

### 3 Lipschitz 評価

今, 初期条件 (2) を  $g(x)$  の代わりに  $h(x)$  として満たす (1) の解を  $v(t, x)$  とする.  $u(t, x)$  と  $v(t, x)$  のさまざまな比較を問題にすることができる.

$$w(t, x) = u(t, x) - v(t, x)$$

とおこう.  $u(t, x), v(t, x)$  は,  $t > 0$  ならば滑らかなので,  $w(t, x)$  は

$$w_t(t, x) + \left( \frac{u(t, x) + v(t, x)}{2} w(t, x) \right)_x = \mu w_{xx}(t, x) \quad (19)$$

$$w(0, x) = g(x) - h(x) \quad (20)$$

を満足する.

ここで,  $g(x)$  も  $h(x)$  も直線上絶対可積分としよう.  $\rho(x) = e^{-x^2}$  をとり,  $\epsilon > 0$  に対し,

$$\varphi_\epsilon(t, x) = \sqrt{w(t, x)^2 + \epsilon \rho(x)} \quad (21)$$

とおく.  $\rho(x), w(t, x) = u(t, x) - v(t, x)$  は共に  $x$  の関数として直線上絶対可積分となり,  $\varphi_\epsilon(t, x)$  も可積分だから,

$$J_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\epsilon(t, x) dx \quad (22)$$

が定義できる.

注意 3.1  $|w(t, x)| \leq \varphi_\epsilon(t, x) \leq |w(t, x)| + \sqrt{\epsilon} \sqrt{\rho(x)}$  だから,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} J_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |w(t, x)| dx$$

が成り立つ.

補題 3.1  $t > 0$  とする. 直線上 ( $x$  についての) 絶対可積分関数  $R(t, x, \epsilon)$  が存在して

$$\frac{d}{dt} J_\epsilon(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} R(t, x, \epsilon) dx$$

となる. しかも,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} R(t, x, \epsilon) dx = 0$$

が成り立つ.

[証明]

$$\begin{aligned} R(t, x, \epsilon) = & \epsilon \frac{2(u(t, x) + v(t, x))_x \rho(x) + (u(t, x) + v(t, x)) \rho'(x)}{4\varphi_\epsilon(t, x)} \\ & - \epsilon \mu \frac{\rho''(x)}{2\varphi_\epsilon(t, x)} + \epsilon \mu \frac{x^2 w(t, x)^2 \rho(x)}{\varphi_\epsilon(t, x)^3} + \epsilon^2 \mu \frac{\rho'(x)^2}{4\varphi_\epsilon(t, x)^3} \end{aligned}$$

とおけば, (19) により

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\epsilon(t, x) = & \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{u(t, x) + v(t, x)}{2} \varphi_\epsilon(t, x) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \varphi_\epsilon(t, x) \right) \\ & + R(t, x, \epsilon) - \mu \epsilon \frac{\rho(x)(w_x(t, x) - xw(t, x))^2}{\varphi_\epsilon(t, x)^3} \end{aligned} \quad (23)$$

が従う. 右辺第 3 項は可積分性の有無にかかわらず負または 0 (非正) である.

[証明終]

以上を整理して, 次の定理を得る. この定理は, 予告しておいた (15) の改良も含んでいる.

定理 3.1  $g(x), h(x)$  は直線上絶対可積分とし,  $u(t, x), v(t, x)$  はそれぞれ初期値を  $g(x), h(x)$  にとった (1) の解とする. このとき,  $t > t' \geq 0$  ならば,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x) - v(t, x)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t', x) - v(t', x)| dx$$

が成り立つ.

[証明]  $t > t' > 0$  のときは, 補題 3.1 を利用する.  $t' = 0$  を補うためには, さらに, 命題 2.4 を応用すればよい.

[証明終]

注意 3.2 定理 3.1 の証明で使われたのは,  $u(t, x), v(t, x)$  の若干の定性的な性質, すなわち,  $t > 0$  において, これらの関数に加え, 導関数  $u_x(t, x), v_x(t, x), u_{xx}(t, x), v_{xx}(t, x)$  が  $x$  の関数として直線上絶対可積分であること, および,  $t \rightarrow 0$  のとき,  $u(t, x), v(t, x)$  が  $g(x), h(x)$  に積分ノルムでそれぞれ収束することである. §2 で見たように, Cole-Hopf 変換を経て絶対可積分な  $g(x), h(x)$  から得られる解はこれらの定性的な性質を満たす. 実は, このような解が他にはないということが定理 3.1 の帰結になる.

## 4 非粘性 Burgers 方程式

(1)(2) において,  $\mu = 0$  のとき, すなわち,

$$\bar{u}_t(t, x) + \left( \frac{1}{2} \bar{u}(t, x)^2 \right)_x = 0 \quad (24)$$

$$\bar{u}(0, x) = g(x) \quad (25)$$

が非粘性 Burgers 方程式の初期値問題である. (24)(25) の解としては, 滑らかではないものも許容するのが自然である. 局所可積分な  $\bar{u}(t, x)$  は, 有界な台を持つ任意の滑らかな関数  $\phi(t, x)$  に対して,

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \bar{u}(t, x) \phi_t(t, x) + \frac{1}{2} \bar{u}(t, x)^2 \phi_x(t, x) \right\} \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} dx g(x) \phi(0, x) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

が成り立つとき<sup>2</sup>に, (24)(25) の弱解といわれる. よく知られているように, 弱解というだけでは (24)(25) の解は一意的には定まらない. エントロピー弱解としての特定が要求されるゆえんである.

Hopf[3] は, (1)(2) の解  $u(t, x)$  が  $\mu \rightarrow 0$  のとき, (24)(25) のエントロピー弱解  $\bar{u}(t, x)$  に収束することを示した. 具体的には, 各  $x, t$  に対し,

$$\min_{-\infty < y < +\infty} \left\{ \frac{(x-y)^2}{2t} + \int_{-\infty}^y g(\xi) d\xi \right\}$$

を実現する  $y$  の最小値を  $y_*(t, x)$ , 最大値を  $y^*(t, x)$  として,

$$u_*(t, x) = \frac{x - y_*(t, x)}{t}, \quad u^*(t, x) = \frac{x - y^*(t, x)}{t}$$

とおくと, 各  $t > 0$  について,  $x$  の関数として直線上可算個の例外点を除いて両者が一致することが確かめられる. したがって,  $L^1(\mathbb{R})$  の元として

$$\bar{u}(t, x) = u_*(t, x) = u^*(t, x) \quad (27)$$

となる. これは, 基本的には (7) の具体的な表現を変分原理的に処理した結果に他ならない.

さて, 我々は  $g(x)$  が直線上絶対可積分のとき  $\bar{u}(t, x)$  も  $x$  の関数として絶対可積分であることを知っている. そこで, 各  $t > 0$  について, 写像

$$g(x) \mapsto \bar{u}(t, x) \quad (28)$$

が ( $L^1$ -空間の意味で) 計算可能であるかどうか, また, 収束

$$u(x, t) \rightarrow \bar{u}(t, x), \quad \mu \rightarrow 0 \quad (29)$$

<sup>2</sup>積分は, 実際は  $\phi(t, x)$  の台上だけで行われる. 積分区間の端に現れる  $\pm\infty$  は見かけの上だけである.

が ( $L^1$ -空間において) 実効的であるかどうか, の二点を明らかにすることは問題になる.

ここでの仕組は基本的につぎの通りである:

- A) 定理 3.1 と同様の評価が (24) (25) のエントロピー解に対して成立する (例えば, Kruzhkov[4] から. 定理 3.1 の場合に比し, 間接的過ぎるが).
- B) (1)(2) の場合, 計算可能な  $\mu > 0$  について, 初期値  $g(x) \in L^1(\mathbb{R})$  に (計算可能な  $t > 0$  のときの) 解  $u(t, x) \in L^1(\mathbb{R})$  を対応させる写像は計算可能である (定理 3.1 と (7) から従う).
- C) 有界な台を持ち, 値と区分点が計算可能実数であるような階段関数から  $L^1(\mathbb{R})$  の計算可能性構造  $\mathcal{G}$  を構成することができる (PourEl-Richards[5]).
- D)  $g(x) \in \mathcal{G}$  のとき, 計算可能な  $t > 0$  について, (27) は  $L^1(\mathbb{R})$  において計算可能である (B) の特別な場合).
- E)  $g(x) \in \mathcal{G}$  に対する (1)(2) の解  $u(t, x; \mu)$  は  $\mu \rightarrow 0$  のとき対応する (24)(25) の解  $\bar{u}(t, x)$  に  $L^1(\mathbb{R})$  において実効的に収束する (Hopf の議論 [3] の  $L^1$ -精密化).

以上のうち, できれば A は (24)(25) により即した形の検証が望ましい. また, E については, 必要な帰納的関数の明示までこめた (D を含めての) 具体的な表現をすべきである. いずれも, ここでは省略する.

## 参考文献

- [1] Alberto Bressan. *Hyperbolic systems of conservation laws — The one-dimensional Cauchy problem*. Oxford University Press, 2000.
- [2] C. Dafermos. Polygonal approximations of solutions of the initial value problem for a conservation law. *J. Math. Anal. Appl.*, 38:33–41, 1972.
- [3] Eberhard Hopf. The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ . *Comm. Pure Appl. Math.*, 3:201–230, 1950.
- [4] S. Kruzhkov. First order quasilinear equations with several space variables. *Math. USSR Sb.*, 10:217–243, 1970.
- [5] Marian B. Pour-El and J. Ian Richards. *Computability in analysis and physics*. Springer-Verlag, 1989.