

回転液滴内の流れと変形

農工大・工・応用物理 佐野 理 (Osamu Sano)

1. はじめに

静止状態で中立浮遊した液滴は表面張力により球形を保っているが、これに回転を与えていくと次第に扁平になり、いくつかの形態遷移を経たのちに分裂する。この問題は19世紀のPlateauの実験¹⁾をはじめとして非常に古い歴史をもっているだけでなく、宇宙での天体の形との類似性から、Newton, Maclaurin, Jacobi, Poincare,...など多くの研究者の関心を集めてきた²⁾。もっとも後者は自己重力と遠心力などで決まる形であるのに対して、われわれの系は表面張力と遠心力で決まる形である点が異なっている。液滴の平衡形状についてもChandrasekhar³⁾による理論計算、Brown and Scriven⁴⁾による数値計算などがあるが、これらはいずれも液滴の粘性境界条件を無視した取扱である。最近、NASAスペースシャトル内での実験結果がWang⁵⁾達によって報告されている。これは微小重力下での実験であり、条件としては望ましいが、液滴内部の流れなどの詳細な測定は行なわれていない。我々は、地上の実験室ではあるがほぼ中立浮遊の回転液滴を実現させ、形態観測と共に内部の流体の流速分布をレーザー流速計を用いて精密に測定した。以下ではこれらについて報告し、流れの機構を流体力学の基礎方程式に基づいて解析する。

2. 実験方法と結果の概要

実験装置および測定の概略を図1に示す。液滴としてはオルトトルイジンを使用した。これは周囲の液体（蒸留水）と混じり合わないだけでなく、密度の温度依存性が高い。そこで温度を調節することによってほぼ中立浮遊状態の液滴を実現させた。また、液滴の上端にモーターで駆動した棒を接触させ、液滴に任意の回転角速度を与えるように設計した。モーターの回転数は印加電圧に比例するので、これをコンピュータで制御する。実験では到達

すべき角速度と角加速度の両方を変化させて系統的に形の変化を調べた。

測定には、液滴の運動に攪乱を与えないようにする必要があるので、レーザー流速計を使用し、またビデオカメラで形態の変化を記録し画像解析を行った。

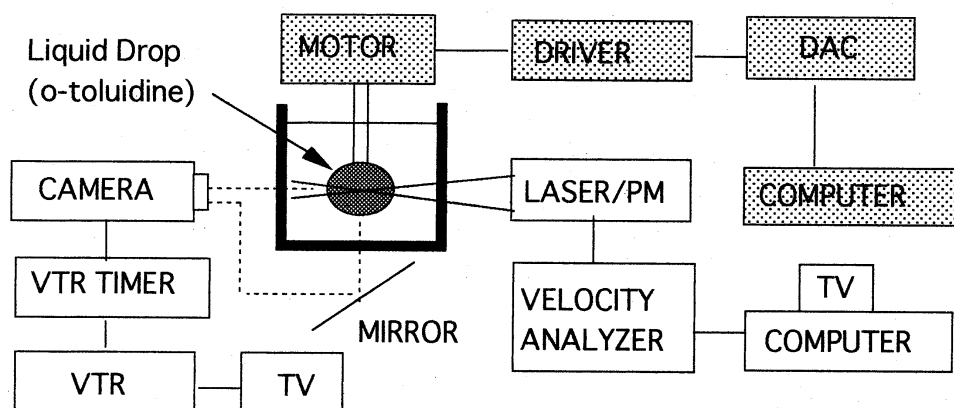


図1 実験装置の概略

以下に主な結果をまとめて述べよう。

(1) 図2は液滴の平衡形状の例である。一般に液滴の形は球→回転楕円体→二分裂形状→西洋梨型と遷移するのが観測された。

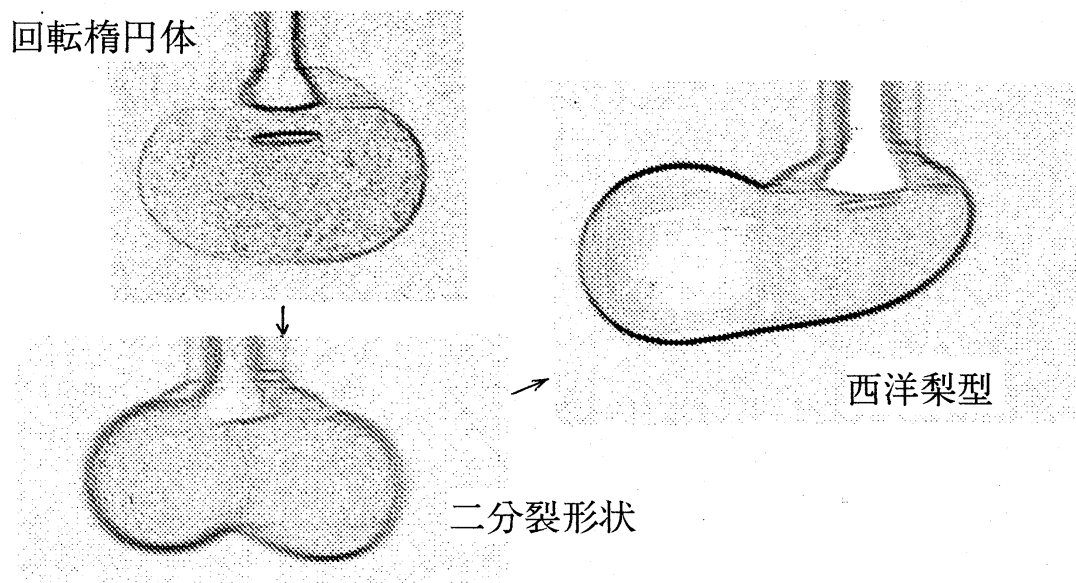


図2 液滴の形態遷移

(2) 液滴の回転が比較的遅く、球または回転楕円体形状が保たれている範囲内で内部の流速を測定した。図3は液滴の赤道面内での周方向速度成分 v_ϕ を回転軸からの距離 r を変えて測った結果である。回転角速度が比較的小さい場合には流速分布は剛体回転的である（すなわち速度の大きさが中心からの距離に比例して増加する）が、回転数の増加と共に直線から外れてくる。このずれは液滴の中心や周辺では0であり、その中間付近 $r \sim 0.5$ で最大である。さらにずれの最大値は角速度 Ω の2乗に比例して増加している。

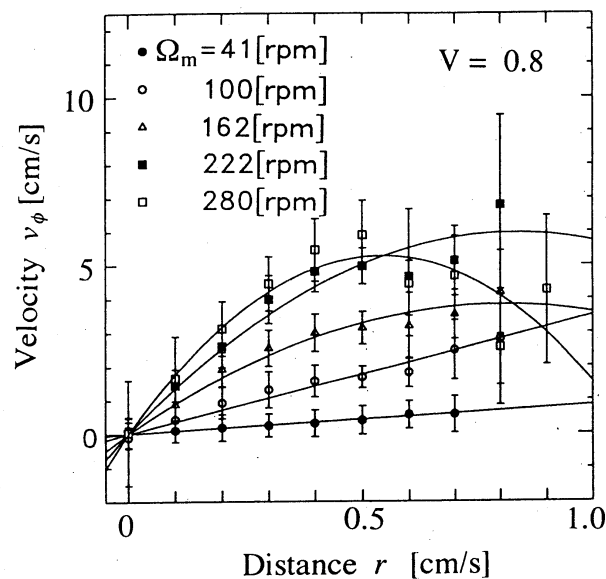


図3 赤道面内での周方向速度成分 v_ϕ の回転角速度依存性

(3) 液滴の回転は一般にモーターの回転より遅い。これは周囲の流体との粘性摩擦のためである。しかし球または回転楕円体形状が保たれている範囲では両者はほぼ比例している。液滴が二分裂形状に遷移すると、液滴の回転数は著しく減少する。

(4) 液滴の形が回転楕円体から二分裂形状に遷移する臨界角速度を測定した結果を図4に示す。この臨界値 ω_m は液滴の角加速度にも依存する。そこで角加速度を変化させ、それぞれの場合に求めた臨界角速度を角加速度0の場合に外挿し、これをもって臨界角速度 ω_m^* とした。このようにして求めた ω_m^* と液滴の体積との関係を図5に示す。小さな液滴では表面張力の影響が大きいので回転角速度をかなり大きくしなければ遷移が起こらないが、大きな液滴では遠心力の影響が大きいので回転角速度をかなり小さく

しても遷移が起こる。ちなみに実験的には ω_m^* は体積 V の -0.16 乗に比例しているようである。

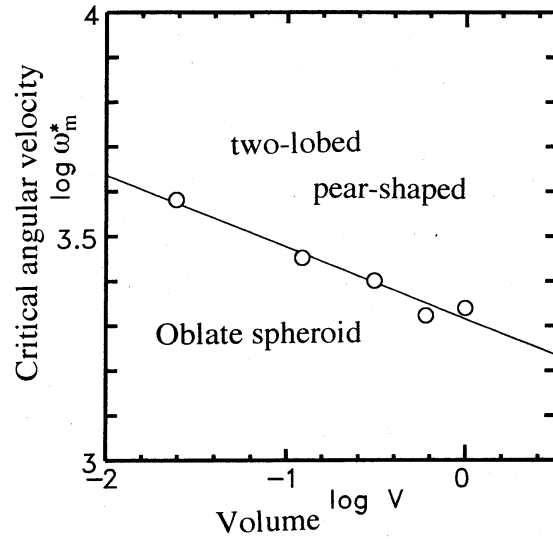
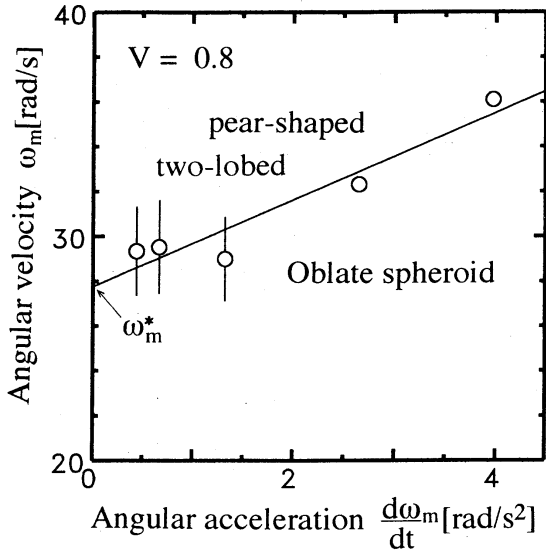


図4 臨界角速度の角加速度依存性

図5 臨界角速度の液滴体積依存性

3. 流れの理論解析

液滴内部の流れをNavier-Stokes方程式と連続の方程式に基づいて解析してみよう。ただし液滴内の流体は粘性率 μ 、液体外部の流体は粘性率 μ' の非圧縮性流体とし、球座標系 (r, θ, ϕ) で考える。いま液滴は外部からのトルクによって一定の角速度 ω で回転していると仮定すると、基礎方程式および境界条件は

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) = 0, \quad (1a)$$

$$\Delta v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta}{r^2} \cot \theta - \frac{\partial p}{\partial r} = \text{Re} \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right), \quad (1b)$$

$$\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \text{Re} \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right), \quad (1c)$$

$$\Delta v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} = \text{Re} \left(v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\phi}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} + \frac{2}{\text{Ro}} (v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta) \right), \quad (1d)$$

となる。ただし $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$ はラプラシアン、 $Re = Ua/\nu$ と $Ro = U/\omega a$ はそれぞれ Reynolds 数および Rossby 数であり、 a は液滴の半径、 ν は動粘性率である。ここでは定常軸対称流を考えているので、時間 t および方位角 ϕ に関する微分は省いてある。式(1d)の右辺括弧内第2項は Coriolis 力を表わす。液滴は自由表面であるが表面張力が充分大きくて球形が保たれていると仮定し、境界条件は液滴表面 $r=1$ で速度および応力が連続であるとする。以下では Re が小さいと仮定し、解を

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + Re \mathbf{v}^{(1)} + \dots, \quad p = p^{(0)} + Re p^{(1)} + \dots \quad (2a, b)$$

と展開する。

3.1 $O(Re^0)$ の解

このオーダーの解は

$$v_r^{(0)} = v_\theta^{(0)} = 0, \quad p^{(0)} = 2\alpha (= \text{constant}), \quad (3a, b, c)$$

$$\begin{aligned} v_\phi^{(0)} &= \frac{1}{Ro} r \sin \theta \quad \text{for } r \leq 1 \\ &= \frac{1}{Ro} \frac{1}{r^2} \sin \theta \quad \text{for } r \geq 1 \end{aligned} \quad (3d, e)$$

で与えられる。式(3d,e)はそれぞれ剛体回転による内外の流速を表わしている。ここで、 σ は表面張力であり、これが充分大きくて液滴は球形が保たれていると仮定している。また、上記の運動が保たれるためには外部から $8\pi a^3 \mu' \omega$ のトルクが与えられている必要がある。以下では、液滴内部の解のみ示す。

3.2 $O(Re^1)$ の解

このオーダーの方程式は

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r^{(1)}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta^{(1)}) = 0, \quad (4a)$$

$$\Delta v_r^{(1)} - \frac{2}{r^2} v_r^{(1)} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta^{(1)}}{r^2} \cot \theta - \frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} = -\frac{1}{r} (v_\phi^{(0)})^2, \quad (4b)$$

$$\Delta v_\theta^{(1)} - \frac{v_\theta^{(1)}}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r^{(1)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \theta} = -\frac{\cot \theta}{r} (v_\phi^{(0)})^2, \quad (4c)$$

$$\Delta v_{\phi}^{(1)} - \frac{v_{\phi}^{(1)}}{r^2 \sin^2 \theta} = 0. \quad (4d)$$

である。式(4d)の解のうち、液滴中心で正則かつ境界で0となるものは $v_{\phi}^{(1)} = 0$ だけである。また、式(4a-4c)の非同次の特解は

$$v_r^{(1p)} = v_{\theta}^{(1p)} = 0, \quad p^{(1p)} = \frac{1}{2R_0^2} r^2 \sin^2 \theta. \quad (5)$$

である。ここで上付き添字の第1番目はReの次数を、第2番目は解の性格を表わすものとする。式(4a-4c)の同次の一般解のうち液滴内部で有界であり境界で0となるものを、解の対称性を考慮していくつか示す。

(i) 1セル型：

$$v_r^{(11)} = 2A(1-r^2)\cos\theta, \quad v_{\theta}^{(11)} = -2A(1-2r^2)\sin\theta, \quad v_{\phi}^{(11)} = 0, \quad (6a,b,c)$$

$$p^{(11)} = -20Ar\cos\theta. \quad (6d)$$

ここで A は任意定数である。また

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_{\theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (7)$$

で定義される流れの関数 ψ を用いると、式(6)は

$$\psi^{(11)} = Ar^2(1-r^2)\sin^2\theta. \quad (8)$$

と表わされる。この流れはHillの球形渦と同じ表現を持っており、その概略は図6に示したようなものである。

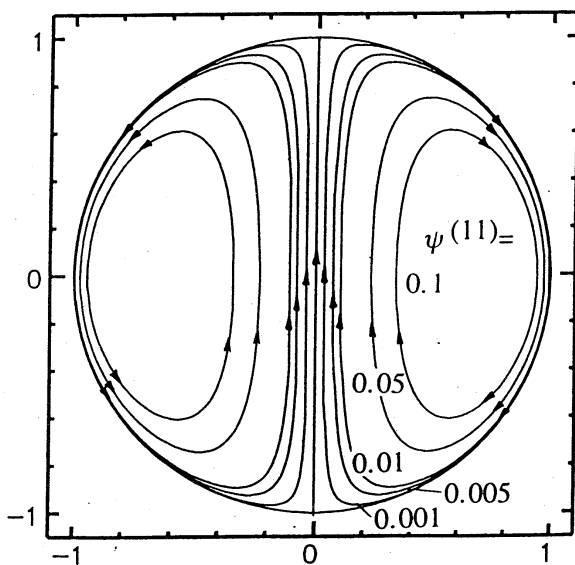


図6 1セル型の流れ

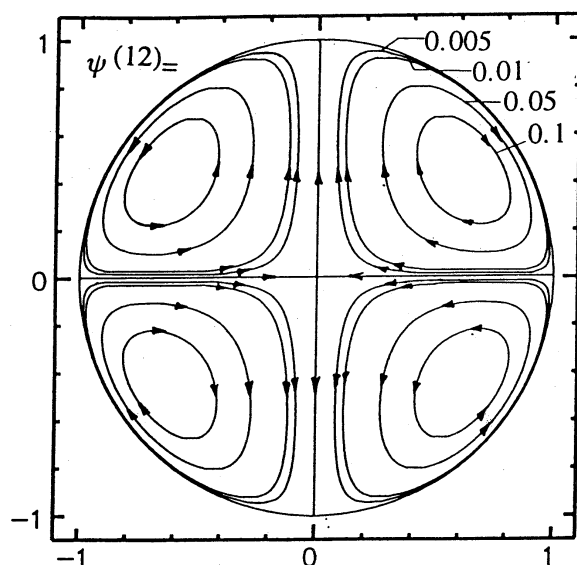


図7 2セル型の流れ

(i) 2セル型：

$$\begin{aligned} v_r^{(12)} &= 4B r (1 - r^2) P_2(\cos \theta), & v_\theta^{(12)} &= -B r (3 - 5r^2) \sin 2\theta, & v_\phi^{(12)} &= 0, \\ p^{(12)} &= -28B r^2 P_2(\cos \theta), \end{aligned} \quad (9a-d)$$

ここで $P_2(\cos \theta) = \frac{1}{4}(1 + 3\cos 2\theta)$ はLegendre 関数であり、 B は任意定数である。
流れの関数を用いるとこれは

$$\psi^{(12)} = 2B r^3 (1 - r^2) \sin^2 \theta \cos \theta \quad (10)$$

となる。図7にその概形を示す。

3.3 $O(Re^2)$ の解

このオーダーの解は

$$v_r^{(2)} = v_\theta^{(2)} = p^{(2)} = 0, \quad (11a, b, c)$$

および

$$\Delta v_\phi^{(2)} - \frac{v_\phi^{(2)}}{r^2 \sin^2 \theta} = v_r^{(1)} \frac{\partial v_\phi^{(0)}}{\partial r} + \frac{v_\theta^{(1)}}{r} \frac{\partial v_\phi^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{v_r^{(1)} v_\phi^{(0)}}{r} + \frac{v_\theta^{(1)} v_\phi^{(0)} \cot \theta}{r} + \frac{2}{Ro} (v_r^{(1)} \sin \theta + v_\theta^{(1)} \cos \theta), \quad (12)$$

(i) 式(3d) および (6a,b)を式(12)に代入し $r = 0$ で正則かつ境界条件 $r = 1$ で $v_\phi^{(2)} = 0$ を満たすものを求めると

$$v_\phi^{(21)} = -\frac{4A}{7Ro} r^2 (1 - r^2) \sin \theta \cos \theta. \quad (13)$$

(ii) 式(3d) および (9a,b)を式(12)に代入し $r = 0$ で正則かつ境界条件 $r = 1$ で $v_\phi^{(2)} = 0$ を満たすものを求めると

$$v_\phi^{(22)} = \frac{B}{Ro} r \sin \theta \left[\frac{2}{5} - \frac{16}{15} r^2 + \frac{2}{3} r^4 - \frac{4}{9} r^2 (1 - r^2) \cos 2\theta \right]. \quad (14)$$

を得る。

液滴の赤道面内での速度分布は

$$v_\phi = v_\phi^{(0)} + Re^2 (v_\phi^{(21)} + v_\phi^{(22)}) + \dots \quad (15)$$

で与えられる。一例として $Ro = 2, Re = 100, B = 2 \times 10^{-4}$ の場合の速度分布を図8に示す。

4 議論

我々の理論で予想される速度分布の剛体回転からのずれは

$$\delta v_\phi = \text{Re}^2 v_\phi^{(22)} + \dots = \frac{B \text{Re}^2}{R_0} F(r) + \dots, \quad (16a)$$

$$\text{ただし } F(r) = r \left[\frac{2}{5} - \frac{28}{45} r^2 + \frac{2}{9} r^4 \right] \quad (16b)$$

である。これを実験結果と比較してみよう。関数 $F(r)$ は $r = 0.50212$ で最大値0.12917をとる。このピーク値とモーター回転数の関係を図9に示す。ただし、実験条件を鑑みて Ω_m は Re に比例し R_0 は一定であるとした。図から明らかに $\Omega_m \lesssim 250$ [rpm] で $\delta v_{\phi \max} / \Omega_m^2 = \text{一定}$ となっていることがわかる。すなわち、液滴内部の流れはCoriolis力に起因すると考えてよさそうである（250 [rpm] 以上の回転数でこの理論からはずれるのは液滴が非対称な形に遷移するためで当然の結果である）。

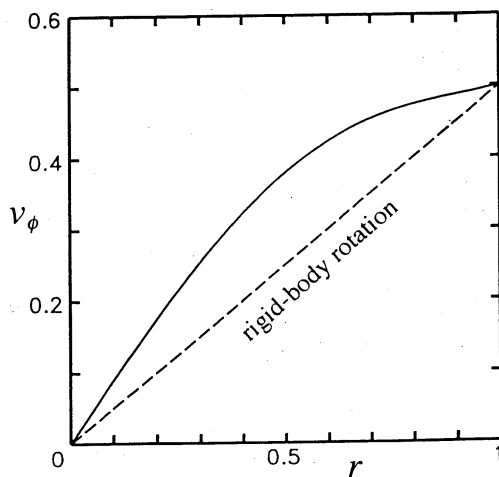


図8 赤道面内の流れ

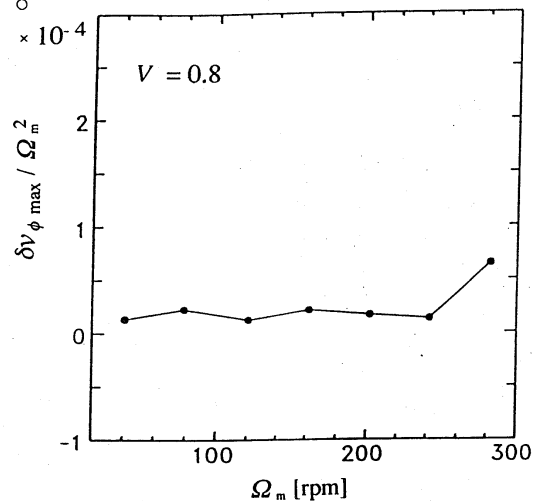


図9 ずれの大きさとモーター回転数

参考文献

- 1) Hildebrandt, S. and Tromba, A.: *Mathematics and Optimal Form*, Sci. Am. Library, 14 (Freemann, New York, 1985).
- 2) 例えば 蜂巢 泉: 京都大学数理解析研究所講究録510(1984)
- 3) Chandrasekhar, S.: *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A286 (1965) 1-26.
- 4) Brown, R.A. and Scriven, L.E.: *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A371 (1980) 331-357.
- 5) Wang, T.G., Trinh, E.H., Croonquist, A.P. and Elleman, D.D.: *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986) 452-455.