

テータ級数と $S_2(\Gamma_0(q))$ の分解

高知大学 理学部 塩田 研一 (Ken-ichi Shiota)

§ 0. 序

これは一変数の保型形式について行った数値実験の報告である。

保型形式の空間の $\mathbb{Q}$ -rational Hecke-module としての既約分解については一般的な結果は何も知られていない。たとえ実験的にでも、これと「何か別のもの」とを関連付けたい、と思う。

手掛かりとしては Basis Problem がある。

Hecke に始まる Basis Problem — 二次形式に付随するテータ級数による保型形式の空間の生成問題 — は、Eichler が最初の証明を与え、今では土方先生、Pizer、Shemanske らによって elliptic modular case には非常に一般的な形で解かれている。(cf. [HPS]。尚、Siegel modular case については吉田先生の [Yo80]、[Yo84] 等を見られたい。)

これらのテータ級数から幾つかの $\mathbb{Q}$ -rational Hecke-submodule が得られることに着目しよう。もしそれらの中に自明でない部分空間が現れれば、そのことから「既約分解」の説明がつくことも考えられなくはない。実際、唯一つではあるがそのような例が知られていた。

そこで、素数レベル、重さ 2 の場合に絞って沢山の例を計算してみた。すると、上述の「説明可能性」について或る判定条件らしきものが観察された。また副産物として (一番弱い形での)「Hecke の予想」の反例がみつかった。

§ 1. 記号と準備

まずは記号から。

$q =$ 素数,

$$\Gamma_0(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{q} \right\},$$

$$M_2(\Gamma_0(q)) = \{ \text{elliptic modular forms of weight 2 w.r.t. } \Gamma_0(q) \},$$

$$S_2(\Gamma_0(q)) = \{ \text{elliptic cusp forms of weight 2 w.r.t. } \Gamma_0(q) \},$$

$M_2^\pm(\Gamma_0(q)), S_2^\pm(\Gamma_0(q)) =$ the (± 1) -eigenspaces of the Atkin-Lehner involution

$$f \mapsto f \Big|_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix},$$

$f \in M_2(\Gamma_0(q))$ の Fourier 展開を

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(f, n) \exp(2\pi\sqrt{-1}nz)$$

と書く。

$a(f, 1) = 1$ なる Hecke-eigenform $f \in S_2(\Gamma_0(q))$ を *newform* と呼び、 $S_2(\Gamma_0(q))$ の $\mathbb{Q}$ -rational Hecke-module としての既約成分を簡単に *factor* と呼ぶことにする。

以下の記号については、詳しくは Pizer [Pi80] を見られたい。

$\mathcal{D} =$ the (q, ∞) -quaternion algebra over $\mathbb{Q}$,

$\mathcal{O} =$ a maximal order in $\mathcal{D}$,

$H =$ the class number of $\mathcal{O}$,

$\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_H :$ left $\mathcal{O}$ -ideal classes の完全代表系,

$$\mathcal{I}_{ij} = \mathcal{I}_j^{-1} \mathcal{I}_i,$$

$\mathcal{O}_j = \mathcal{I}_{jj} =$ the right order of $\mathcal{I}_j$ (also a maximal order in $\mathcal{D}$),

$$\theta_{ij}(z) = \frac{1}{\#\mathcal{O}_j^\times} \sum_{x \in \mathcal{I}_{ij}} \exp\left(2\pi\sqrt{-1} \frac{N_{\mathcal{D}/\mathbb{Q}}(x)}{N(\mathcal{I}_{ij})} z\right),$$

: rank 4 の 正定値二次形式に付随した テータ級数.

θ_{ij} を (i, j) -成分にもつ $H \times H$ -行列を

$$(\theta_{ij})_{1 \leq i, j \leq H} = \sum_{n=0}^{\infty} B(n) \exp(2\pi\sqrt{-1}nz)$$

with the Brandt matrices $B(n) \in M_H(\mathbb{Q})$

と書く。 $n \geq 1$ ならば $B(n) \in M_H(\mathbb{Z})$ である。

素数レベルの場合の Basis Problem は、

Theorem (Eichler) $\theta_{ij} \in M_2(\Gamma_0(q))$ であって、

$$(1) \quad M_2(\Gamma_0(q)) = \langle \theta_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq H \rangle_{\mathbb{C}} \quad : \text{the } \mathbb{C}\text{-span of } \theta_{ij}\text{'s,}$$

$$(2) \quad H = \dim_{\mathbb{C}} M_2(\Gamma_0(q)),$$

$$(3) \quad (\theta_{ij} | T(n))_{1 \leq i, j \leq H} = B(n) (\theta_{ij})_{1 \leq i, j \leq H}$$

ただし、 $T(n)$ = the n -th Hecke operator。

Remark 各 j ($1 \leq j \leq H$) に対して、 (θ_{ij}) の第 j 列の生成する部分空間

$$W_j = \langle \theta_{ij} \mid 1 \leq i \leq H \rangle_{\mathbb{C}}$$

は、(3) から $M_2(\Gamma_0(q))$ の $\mathbb{Q}$ -rational Hecke-submodule である。

W_j は H 個の元で生成された、 H 次元 vector space $M_2(\Gamma_0(q))$ の部分空間だが、
(小さいレベルの例を計算して) Hecke は次を予想した。

Conjecture 1 (Hecke) $\forall W_j = M_2(\Gamma_0(q))$?

これが正しくないことは次の 2 つの Theorems からわかる。それを述べる為に、

Definition $\mathcal{O}_j$: of type I (resp. II)

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \mathcal{O}_j \cong \text{no other (resp. just one another) } \mathcal{O}_k$$

Fact (1) $\forall$ maximal order in $\mathcal{D} \cong$ some $\mathcal{O}_j$,

(2) Each $\mathcal{O}_j$ is of type I or II.

ここで

$T =$ the type number of $\mathcal{D}$

$$= \#\{\text{isomorphism classes of maximal orders in } \mathcal{D}\}$$

と置くと、

Theorem (1) $T = \dim_{\mathbb{C}} M_2^-(\Gamma_0(q))$,

$$(2) \quad \frac{H}{2} < T \leq H,$$

$$(3) \quad T = H \iff q \leq 31, q = 41, 47, 59 \text{ or } 71.$$

Theorem (Ponomarev) $\mathcal{O}_j$: of type I ならば、

$$(1) \quad \theta_{ij} \in M_2^-(\Gamma_0(q)) \quad \text{for } \forall i \quad \text{i.e.} \quad W_j \subseteq M_2^-(\Gamma_0(q)),$$

$$(2) \quad \mathcal{O}_i \cong \mathcal{O}_k \implies \theta_{ij} = \theta_{kj}.$$

(従って W_j は本質的に T 個の元で生成される。)

Example $q = 37$ の時は、

$$\dim_{\mathbb{C}} M_2(\Gamma_0(37)) = 3, \quad \dim_{\mathbb{C}} M_2^-(\Gamma_0(37)) = 2$$

であって、 $\exists W_j \subseteq M_2^-(\Gamma_0(37)) \neq M_2(\Gamma_0(37))$.

だが、小さいレベルではまだ次が成り立っている:

Conjecture 2

$$\begin{cases} \mathcal{O}_j : \text{of type I} \implies W_j = M_2^-(\Gamma_0(q)) \\ \mathcal{O}_j : \text{of type II} \implies W_j = M_2(\Gamma_0(q)) \end{cases} \quad ?$$

§ 2. 説明可能性

Conjecture 2 には次の反例が見つかった。

Example (Pizer-Ohta) $q = 67$ のとき、 $H = 6$ 、 $T = 4$ であって、

$$S_2^+(\Gamma_0(67)) = \langle f_A \rangle_{\mathcal{H}}, \quad S_2^-(\Gamma_0(67)) = \langle f_B, f_C \rangle_{\mathcal{H}}.$$

2 1, 2

ただし、

f_A, f_B, f_C : newforms in $S_2(\Gamma_0(67))$,

$\langle \rangle_{\mathcal{H}}$ = the $\mathbb{C}$ -span of their conjugates,

$$\dim_{\mathbb{C}} \langle f_A \rangle_{\mathcal{H}} = 2, \quad \dim_{\mathbb{C}} \langle f_B \rangle_{\mathcal{H}} = 1, \quad \dim_{\mathbb{C}} \langle f_C \rangle_{\mathcal{H}} = 2.$$

そして、

$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$: of type I,

$\mathcal{O}_3 \cong \mathcal{O}_4, \mathcal{O}_5 \cong \mathcal{O}_6$: of type II,

$W_1 = W_2 = M_2^-(\Gamma_0(67))$,

$W_3 = W_4 = \langle \text{Eisenstein 級数}, f_B, f_C \rangle_{\mathcal{H}}$

$W_5 = W_6 = M_2(\Gamma_0(67))$.

上の例では $W_5 = W_3 \oplus \langle f_B \rangle_{\mathcal{H}}$ となっていて、factor $\langle f_B \rangle_{\mathcal{H}}$ の分解は「テータ級数によって説明がつく」。

Problem この様な現象はどのくらいの頻度でおこるのか？

Pizer は $q \leq 97$ の範囲の例を計算していたが、その中では $q = 67$ の場合が唯一であった。

Remark Conjecture 2 が $\text{OK} \iff \forall \text{ newform}$ が次の意味で「説明不可能」。

Definition newform f が「説明不可能」

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \text{i) } f \in S_2^+(\Gamma_0(q)) \text{ のとき、} f \in W_j \text{ for } \forall j \text{ s.t. } \mathcal{O}_j : \text{ of type II,} \\ \text{ii) } f \in S_2^-(\Gamma_0(q)) \text{ のとき、} f \in \forall W_j, \end{cases}$$

そうでないとき「説明可能」という。

(unexplainable, explainable と訳してみましたが、「あんな英語はない」と不評でした。何か良い訳語はないものでしょうか。)

Example $q = 67$ の場合は f_A, f_C が「説明不可能」、 f_B が「説明可能」。

筆者は Pizer-Hijikata のアルゴリズムと、斎藤 裕先生のアイデアを用いて、997 までの全ての素数レベルについて、テータ級数、 W_j 、 $S_2^+(\Gamma_0(q))$ の既約分解等を計算した。後半はそのデータの観察結果を述べる。

§ 3. 一番弱い形の Hecke の予想

Conjecture 3 各 q ごとに $W_j = M_2(\Gamma_0(q))$ なる W_j が必ず存在するか？

これにも反例がみつかった：

Counter Example $q = 307$ のとき、 $H = 26$, $T = 16$ 、

$$S_2^+(\Gamma_0(307)) = \langle f_A \rangle_{\mathcal{H}}, \quad S_2^-(\Gamma_0(307)) = \langle f_B, f_C, f_D, f_E, f_F, f_G \rangle_{\mathcal{H}}.$$

$$\begin{array}{cccccccc} 10 & & 1, & 1, & 1, & 1, & 2, & 9 \end{array}$$

であって、

$$\#(\{f_B, f_C, f_D, f_E\} \cap W_j) \leq 3 \quad \text{for } \forall j.$$

従って、

$$\forall W_j \neq M_2(\Gamma_0(307)) !$$

H 個のテータ級数で H 次元を張るのが Basis Problem の理想だったが、それは夢に終わった。

§ 4. 観察

$q \leq 997$ の範囲の素数レベルについて次の事実が成立している。

Observation 1 newform f が「説明可能」

$$\implies \exists i \neq j \quad \text{s.t.} \quad W_i = W_j \oplus \langle f \rangle_{\mathcal{H}}$$

この観察から「説明可能」という命名をした訳だが、これはたとえ事実であっても証明するのは難しそうだ。

Observation 2 $S_2^+(\Gamma_0(q))$ の 1 次元 factor $\langle f \rangle_{\mathcal{H}}$ (f は newform) について、

$$f: \text{「説明不可能」} \iff \langle f \rangle_{\mathcal{H}} = S_2^+(\Gamma_0(q))$$

$$(\text{特に } \dim_{\mathbb{C}} S_2^+(\Gamma_0(q)) = 1)$$

ちなみに、 $q \leq 997$ の範囲で

$$\#\{\text{「説明不可能」な } S_2^+(\Gamma_0(q)) \text{ の 1 次元 factor}\} = 9,$$

$$\#\{\text{「説明可能」な } S_2^+(\Gamma_0(q)) \text{ の 1 次元 factor}\} = 24.$$

Observation 3 $S_2^-(\Gamma_0(q))$ の 1 次元 factor $\langle f \rangle_{\mathcal{H}}$ (f は newform) について、

$$f: \text{「説明不可能」} \iff f \text{ に対応する strong Weil curve が}$$

rational torsion point をもつ。

rational torsion point の存在は Fourier 係数の合同式

$$a(f, p) \equiv 1 + p \left(= a(\text{Eisenstein 級数}, p) \right) \pmod{\ell} \quad \text{for } \forall \text{ prime } p \neq q$$

($\ell = \text{torsion の order}$) を導くが、そうすると思ひ出すのが、

Theorem (Brumer-Doi) ℓ を $\frac{q-1}{12}$ の分子を割る素数とすると、各 j に対して、

$$\exists f \in S_2(\Gamma_0(q)) \cap W_j : \text{newform,}$$

$\exists l \mid \ell: f$ の Fourier 係数の体 $K_f = \mathbb{Q}(a(f, n)'s)$ の prime

s. t.

$$a(f, n) \equiv a(\text{Eisenstein 級数}, n) \pmod{l} \quad \text{for } \forall n \geq 1$$

この形の合同式を Brumer-Doi の合同式と呼ぶことにすると、

Observation 4 $S_2^-(\Gamma_0(q))$ の newform f について、

f : 「説明不可能」

$\iff f$ は適当な ℓ について Brumer-Doi の合同式を満たす。

$q \leq 997$ の範囲で

$\#\{\text{「説明不可能」な } S_2^-(\Gamma_0(q)) \text{ の factor}\} = 178,$

$\#\{\text{「説明可能」な } S_2^-(\Gamma_0(q)) \text{ の factor}\} = 48$

であり、例外がひとつもなかった。

尚、 $S_2^+(\Gamma_0(q))$ の 2 次元以上の factor については、まだ判定条件らしきものはみつかっていない。

参考文献

- [Ei] M. Eichler, The basis problem for modular forms and the traces of the Hecke operators, Lecture Notes in Math. 320, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [He] E. Hecke, Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen, Mathematische Werke, 789-918.
- [HPS] H. Hijikata, A. Pizer, T. Shemanske, The basis problem for modular forms on $\Gamma_0(N)$, Memoirs of the Amer. Math. Soc., Vol.82, No.418, 1989.

- [Pi78] A. Pizer, A note on a conjecture of Hecke, *Pacific J. Math.* 79 (1978), 541-547.
- [Pi80] A. Pizer, An Algorithm for Computing Modular Forms on $\Gamma_0(N)$, *J. of Algebra* 64 (1980), 340-390.
- [Sh] K. Shiota, On theta series and the splitting of $S_2(\Gamma_0(q))$, to appear.
- [Yo80] H. Yoshida, Siegel's Modular Forms and the Arithmetic of Quadratic Forms, *Inv. math.* 60 (1980), 193-248.
- [Yo84] H. Yoshida, On Siegel modular forms obtained from theta series, *J. reine angew. Math.* 352 (1984), 184-219.