

Modified KP 方程式のソリトン解の二次元的相互作用

九大・応力研 辻 英一 (Hidekazu TSUJI)
 九大・応力研 及川 正行 (Masayuki OIKAWA)

Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu Univ.

1 はじめに

水の波・プラズマなどの基礎方程式から導かれるソリトン方程式についてこれまで多くの研究がなされてきたが、それらは空間 1 次元を仮定して導かれた物が多く、表現できるソリトンの相互作用は 1 次元 (1 方向) の場合に限られる。実際の空間 2 次元系で、峰が直線的に伸びている 1 次元のソリトンが角度を持って相互作用する、すなわち進行方向が互いに異なる 1 次元のソリトンが同時に存在する場合、支配方程式は当然 2 次元性を持つものでなければいけないが、相互作用がきちんと解として書ける事は少ない。

進行方向の角度がある程度異なる場合には、摂動論を使って相互作用が調べられる場合がある (例えば、一層が深い二層流体についての研究 [1, 2] など)。しかしながら、孤立波がほとんど同じ方向に伝わる場合には摂動論が使えなくなる。この場合、主に伝わる方向に対して直交する方向への変化が低いオーダーになる (弱 2 次元的) と仮定をした時基礎方程式系から近似的に 2 次元的な方程式が導出される場合がある。

そのような例として我々はこれまでに、二層流体中の波動を表す支配方程式である "Extended Kadomtsev-Petviashvili(EKP)" Equation [3]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + 6Pu \frac{\partial u}{\partial x} - 6Qu^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (P > 0, Q > 0),$$

や "2-dimensional Benjamin-Ono (2dBO)" Equation [4]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{H} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \mathcal{H}[f(x)] \equiv \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx',$$

などを数値的に調べてきた。

今回我々は負イオンを含むプラズマのある種の振る舞いを表す (弱 2 次元的) モデル方程式である "Modified KP (MKP)" Equation

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial u}{\partial T} + 6u^2 \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0, \quad (1)$$

を取り上げる¹。

この方程式は、1 次元性 (Y 方向の変化を無視) を仮定すると、ソリトン方程式として知られている Modified Korteweg-de Vries(MKdV) 方程式になり、また、非線形項が 2 次 ($u \partial u / \partial X$) ならばやはり可積分な Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程式 [5] となる。KP 方程式ではソリトン解が解析的に求まり、相互作用する角度によって相互作用の性質が変わるというソリトン共鳴現象が起こることがわかっている。KP 方程式と異なるタイプの非線形項を持つ MKP 方程式において上のような角度依存性があるかどうか注目しながら、1 次元 MKdV ソリトンの 2 次元の相互作用を調べる。また、今までに調べた他の 2 次元方程式の結果との比較も試みる。なお、しばしば Konopelchenko によって提出された可積分方程式を MKP 方程式と呼ぶ場合があるが、ここでは式 (1) を指す事にする。

¹ 3 次の非線形項の符号は、EKP 方程式とは違い、正である。

2 定式化

MKP 方程式は、プラズマの基礎方程式から近似的に導出されるが、簡単にそれについて示す。空間 1 次元の場合の MKdV 方程式は Watanabe [6] によって導出された。2 次元方程式はその拡張として導出される。

基礎方程式は、正と負のイオンについての運動方程式と連続の式、電子のボルツマン方程式と静電ポテンシャルについての式である。

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s = C_s \nabla \phi \quad \left(C_\alpha = -1, \quad C_\beta = \frac{1}{Q} \right),$$

$$n_e = \exp \phi, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = n_e + n_\beta - n_\alpha.$$

ここで、 n は密度、 $\mathbf{u} = (u, v)$ は速度、 ϕ は静電ポテンシャルである。添字 α, β, e はそれぞれ正イオン、負イオン、電子を表し、 $s = \alpha \text{ or } \beta$ である。 Q は質量比 m_β/m_α であり、 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ である。全ての量は、摂動を受けていない時の電子密度、イオンプラズマ振動数やデバイ長などによって無次元化されている。ここで変動を表す微小量 ϵ によって展開する。

$$n_e = 1 + \epsilon n_{e1} + \epsilon^2 n_{e2} + \epsilon^3 n_{e3} + \cdots, \quad n_s = n_{s0} + \epsilon n_{s1} + \epsilon^2 n_{s2} + \epsilon^3 n_{s3} + \cdots,$$

$$u_s = \epsilon u_{s1} + \epsilon^2 u_{s2} + \epsilon^3 u_{s3} + \cdots, \quad v_s = \epsilon^2 v_{s1} + \epsilon^3 v_{s2} + \cdots,$$

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \epsilon^3 \phi_3 + \cdots.$$

また、座標は以下のような変換を行う。

$$\xi = \epsilon(x - Vt), \quad \eta = \epsilon^2 y, \quad \tau = \epsilon^3 Vt \quad \left(\text{ただし } V \text{ は } V^2 + \frac{3n_{\beta 0}}{Q^2 V^2} - \frac{3n_{\alpha 0}}{V^2} = 0 \text{ を満たす} \right).$$

弱 2 次元性の仮定が y 方向のスケーリングに入っている。なお、 V についての条件が無い場合はモデル方程式は KP 方程式となる。計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} + \frac{1}{4} \left(\frac{15n_{\beta 0}}{Q^3 V^6} - \frac{15n_{\alpha 0}}{V^6} - 1 \right) \phi_1^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial \xi^3} \right] + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} = 0,$$

と MKP 方程式が導かれる。適当な変数変換をする事によって以下式 (1) の形を取り扱う。

3 解析について

今のところ、MKP 方程式の 2 次元的な解は解析的に求められていない。例えば、双線形形式による解法を考えることができるが、これについては Chen らが EKP 方程式について行った解析 [7] がほとんど同じ形で適用できる。それによると 1 ソリトン解（本質的に MKdV ソリトンである）は簡単に求められるが、2 ソリトン解を求めようとするとその 2 つのソリトンは同じ方向を向くという条件を満たす必要があるため、結局 MKdV 方程式の 2 ソリトン解が出ることになり、求めたい 2 次元的な解は得られない。

このため、ここでは数値的に調べる事を考える。具体的には、方向の異なる 2 つの MKdV ソリトンを置いた初期条件を与え、どのように波が時間発展していくかを調べる。

数値計算の方法は以前に 2dBO 方程式を調べた [4] 方法とほぼ同じである。空間微分は擬スペクトル法を用い、時間発展は、非線形の陰的部分を反復で解く Crank-Nicolson 法を用いる。初期条件は以下のように置く、

$$u = \text{Asech}[A((X - X_0 + \Omega Y))] \quad \text{for } 0 < Y < L_Y/2,$$

$$u = \text{Asech}[A((X - X_0 - \Omega Y))] \quad \text{for } L_Y/2 < Y < L_Y.$$

ここで L_Y は Y 方向の領域の大きさである。パラメーター A が孤立波の振幅²、 Ω が進行方向の Y 成分をそれぞれ表す。 Ω が大きいほど、進行方向の違いが大きい事になる。時間が進むにつれて、2つの孤立波は X について正の方向に進むので、相互作用する場所も2つの孤立波の対称軸の所で正の方向へと進んでいく。

境界条件は X, Y 方向ともに周期境界条件とするが、 Y 方向については、孤立波が外から入ってきているとみなせるように領域の端の値をある時間単位で設定する、計算で用いたパラメーターは $A = 1, 0.75, 0.5$ 、 Ω については 0.25 から 4 の間の値である。時間空間のメッシュ幅は $dX = 0.1$, $dY = 0.1$, $dT = 0.005$ である。領域の点数は X 方向に 4096 点、 Y 方向に 1024 点を取る (実際は領域の周期性と方程式・初期条件の対称性により、 Y 方向は半分の点数で計算できる)。

4 計算結果

まず、系の時間発展について2つの典型的な例を示す。この例は振幅 A を一定にして Ω を変化させた場合である。

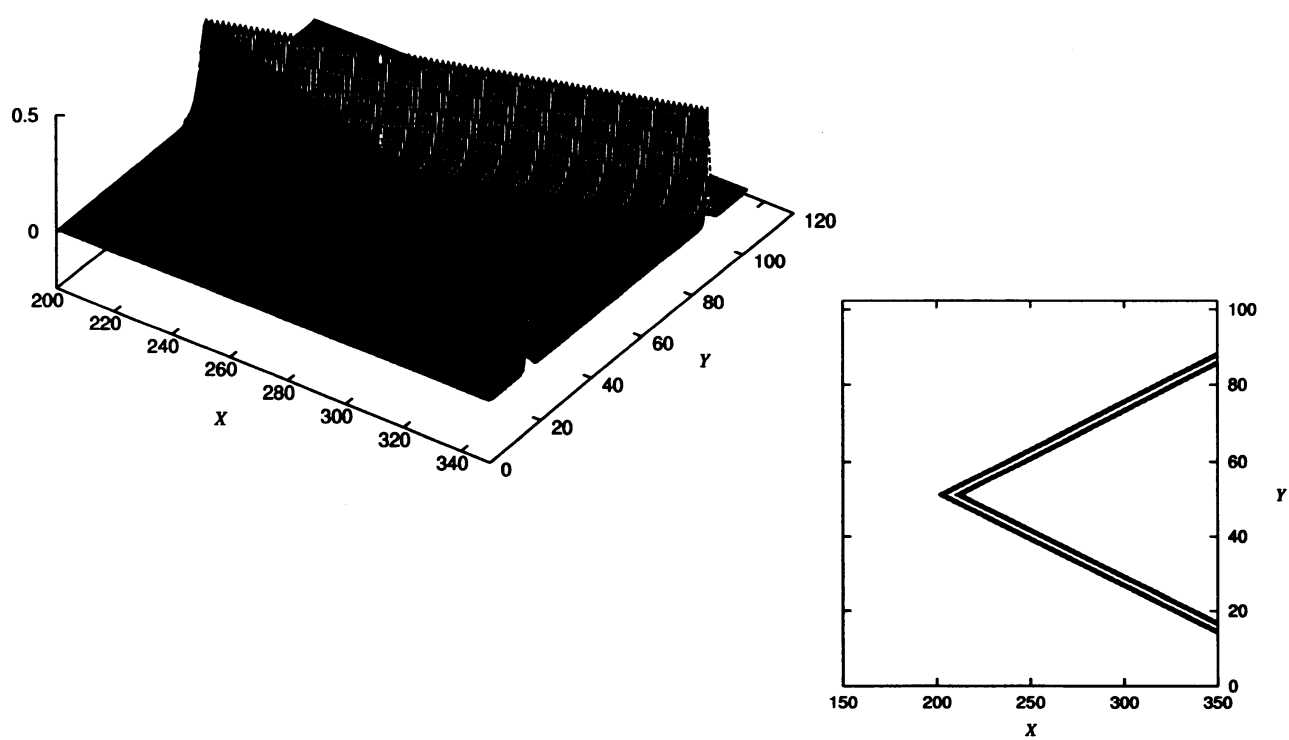
4.1 進行方向の成す角度が大きい (Ω が大きい) 場合の結果

進行方向の成す角度が大きい (Ω が大きい) 場合の結果を Fig.1 に示す。Fig.1(a) が初期状態であり、時間発展するにつれて領域の中心で2つのソリトンが出会って相互作用を行う。この場合、相互作用が進むにつれて、峰の伸びる方向が元の波とほぼ等しい2つの孤立波が形成され伝播していく。また領域中央付近の相互作用する場所には、相互作用前のソリトンの2倍をわずかに超える盛上がり徐徐に形成され、ある程度の時間で定常な状態に達する。

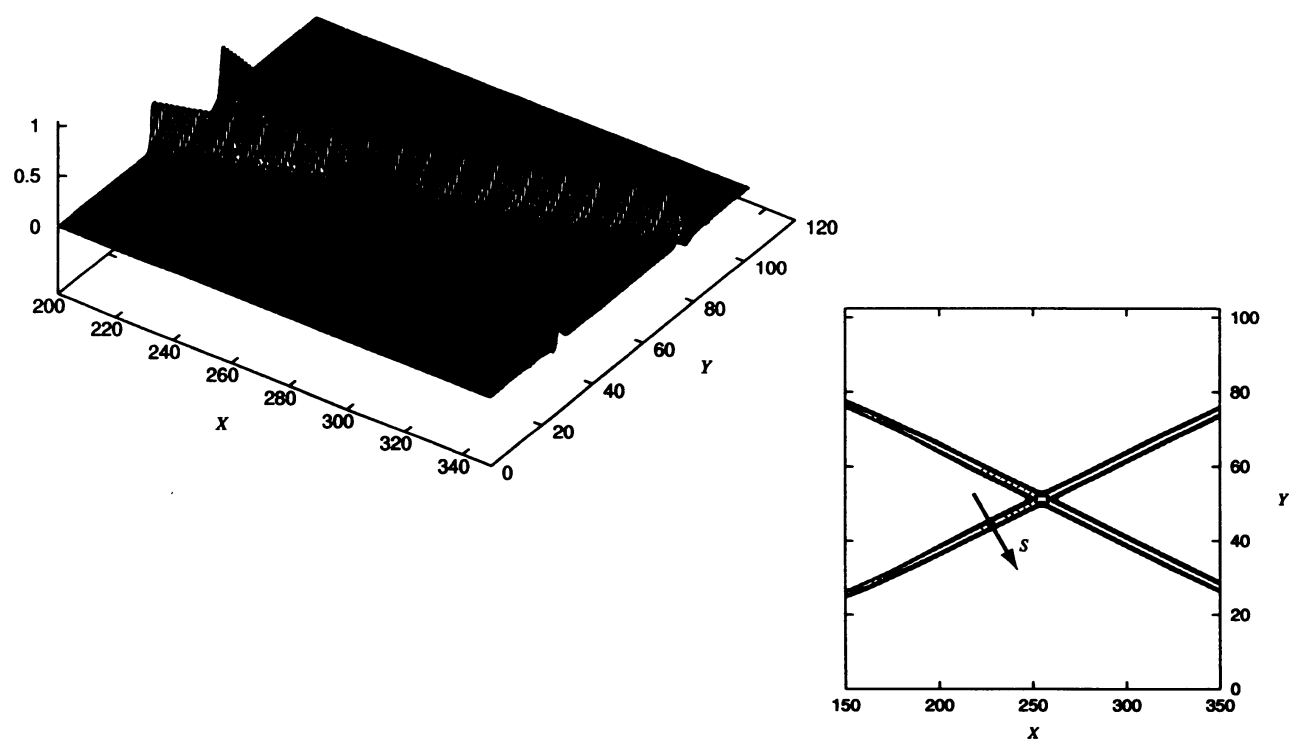
ある程度相互作用をした後の様子が Fig.1(b) に示されている。この段階では、新しく出来た孤立波がこれから相互作用する孤立波の延長上に伸びているように見える。実際、衝突後にできた孤立波をもう少し詳しく見てみると、Fig.1(c) に峰に沿った振幅を示すが、峰に沿ってほぼ振幅が一定であり、生成された孤立波が1次元的事が分かる。また、Fig.1(d) は峰の伸びる方向と直角の方向に断面を取って孤立波の外形を見たものであるが、その波形が MKdV ソリトンと非常によく一致する事がわかる。すなわち、相互作用の十分進んだ定常状態では、初期に置いた2つのソリトンは独立に伝播しているように見える。

このように、進行方向の成す角度が大きい場合には2つのソリトンは相互作用によってあまり影響を受けず、定常状態では2つの無限に伸びる1次元的事が重なったパターンが安定に伝播するという結果が得られた。

²本研究では2つの孤立波の振幅を同じに取る。



(a)



(b)

Fig.1 (cont.)

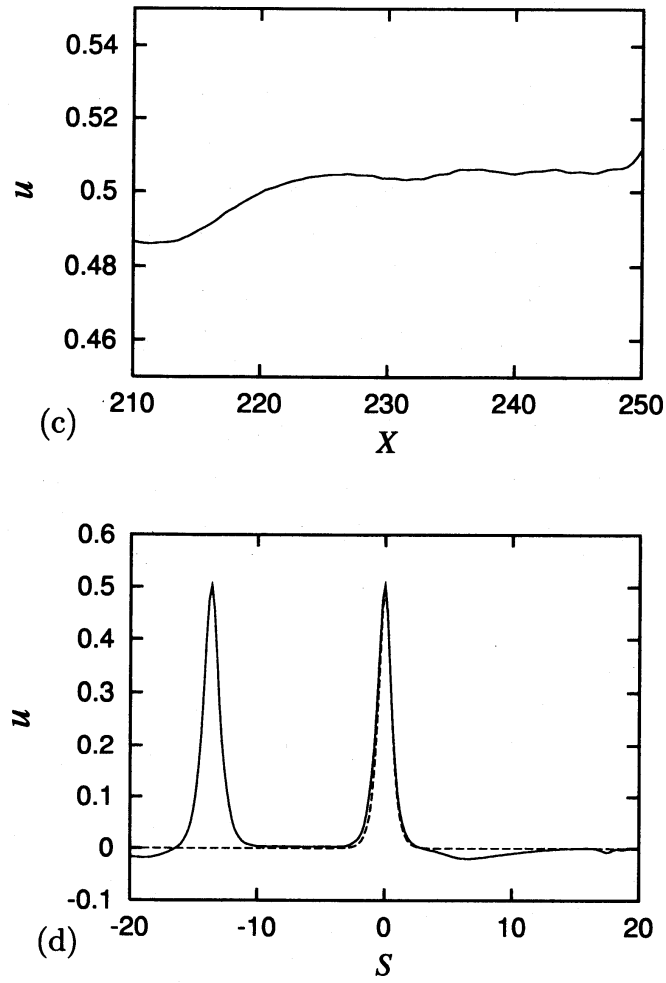


Fig.1 : Development of the wave interaction for $A = 0.5, \Omega = 4.0$. (a) Initial condition $T = 0$. (b) Wave profile at $T = 2.925$. (c) Amplitude of the solitary wave after the interaction at $T = 2.925$. (d) Profile of the solitary wave after the interaction at $T = 2.925$. Axis S is indicated in the Fig.1(b) and the origin $S = 0$ is located on $(X, Y) = (230.0, 44.9)$. Solid line: Numerical result, Dashed line: MKdV Soliton

4.2 進行方向の成す角度が小さい (Ω が小さい) 場合の結果

一方, Fig.2 は $\Omega = 1$, つまり進行方向のずれが小さい場合である. この場合, Fig.2(b) に示すように, 相互作用する場所には大きな振幅を持つ 1 次元的な孤立波 (以後 stem と呼ぶ) が形成される. この stem の振幅は相互作用が進むにつれて大きくなり, やがてある一定値を取るようになる. 一方 $\Omega = 4$ の場合と同様, 相互作用する前の波に対応する孤立波が後方 (X が負の方向) に生成される. しかし, それらは $\Omega = 4$ の場合に比べて, 振幅が小さく, 波の進行方向に対応する孤立波に比べてずれており, stem の存在による位相ずれも見られる. さらに詳しく見てみると, 振幅は峰に沿って大きく変化しており (Fig.2(c)), また, その形は MKdV ソリトンの形からずれている (Fig.2(d)). これらの事から, 後方の孤立波は 1 次元 MKdV ソリトンとみなす事ができない. 一方, stem についてであるが, Fig.2(e) にあるように, 振幅が一定となった所での stem は定常に伝わる MKdV ソリトンと見なす事ができる. KP 方程式などのソリトン共鳴では, 1 点から伸びる 3 つのソリトンが波数ベクトルに関してある共鳴条件を満たすという特徴があり, この場合にもそのような関係があるかどうかには興味がある. しかし, ソリトンの伸びている点 (stem の端) 後方ではさまざまな波が励起されているため, なにか本質的な関係が存在するかどうかを判断する事は難しく, 今後の課題である.

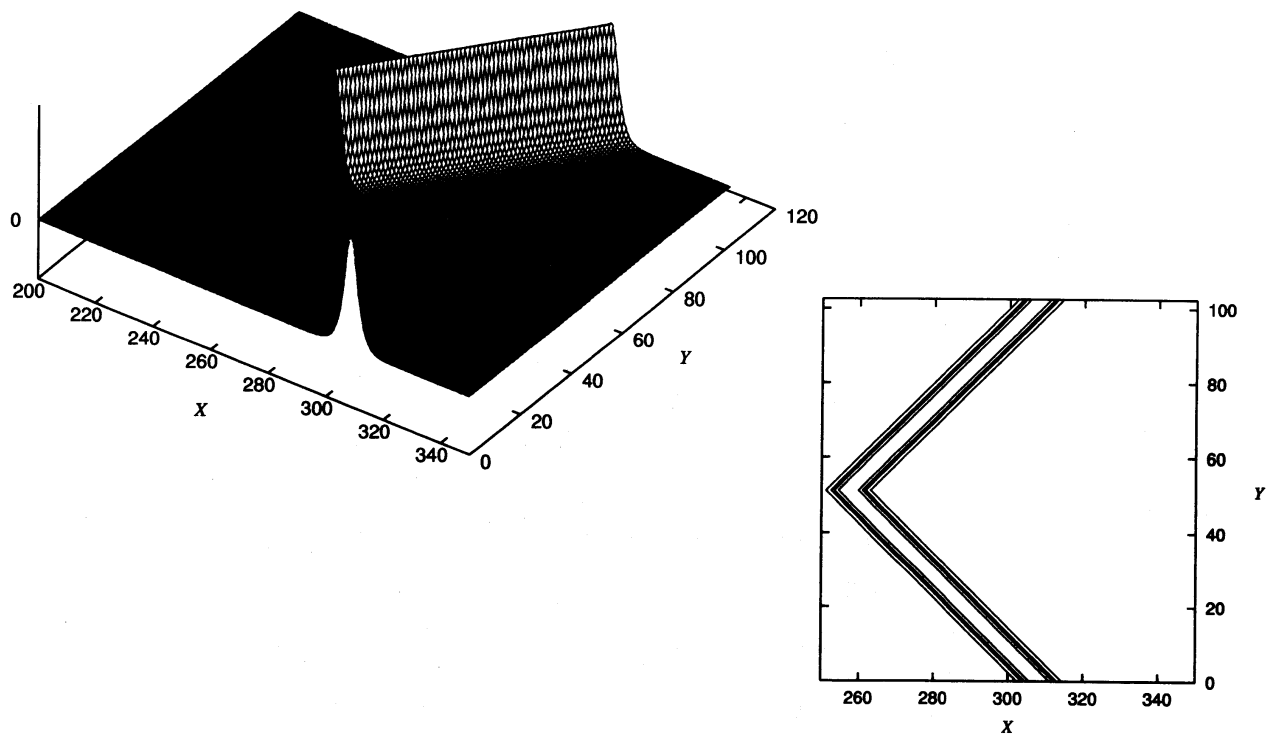
4.3 stem の性質に関する解析結果

次に, 進行方向の角度が小さい場合に相互作用によって形成される stem の性質について示す.

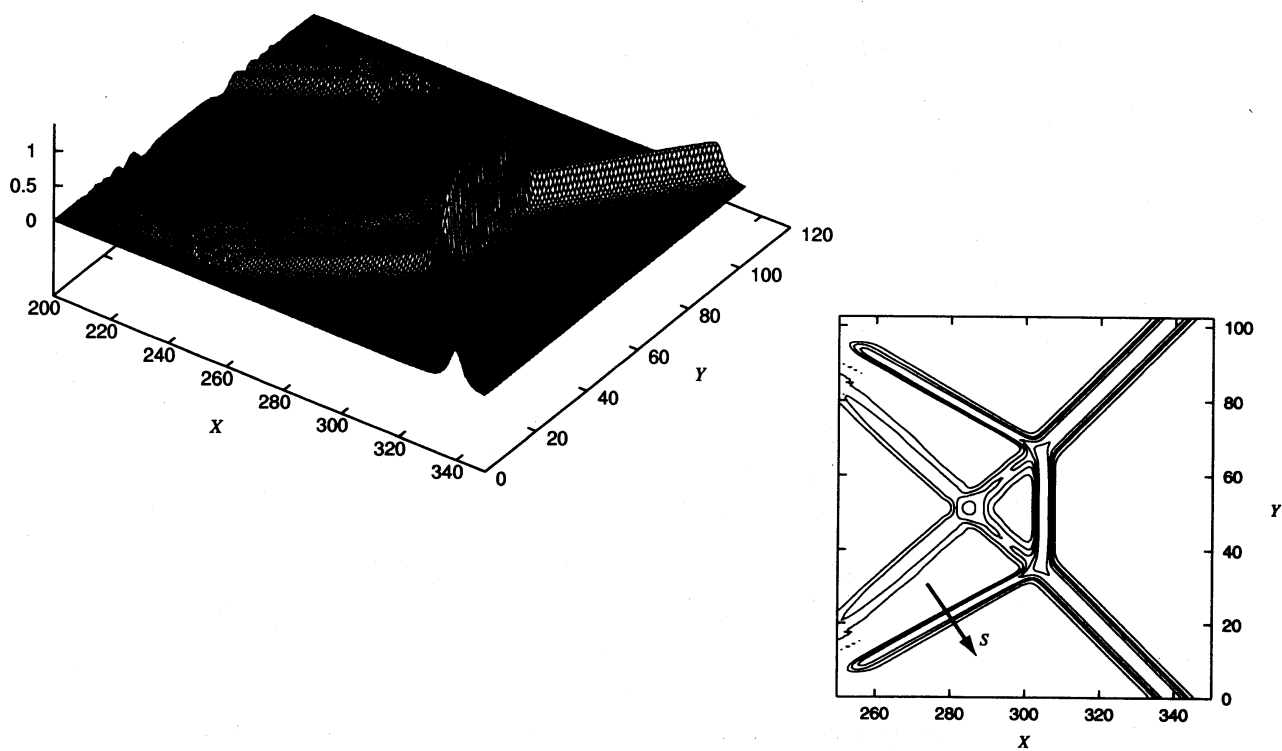
Fig.3 に, さまざまな Ω について波の進行に伴う stem の Y 方向の伸び L_s を示す. ここで伸びは, 領域の対称線から stem の端までの長さとし, stem の端は, 相互作用する孤立波と繋がっていて大きさが A になった場所で決めた. $\Omega = 4$ では stem はほとんど形成されず, Ω が大きいほど, stem の伸び方が大きい事がわかる.

しかしながら, stem の振幅については違った傾向がある. Fig.4 はある程度孤立波が進んだ場所でのさまざまな Ω に対する stem の振幅 $u_{\max}$ を示す. ここでは方程式が変換 $(u, X, Y, T) \rightarrow (u/a, X/a, Y/a^2, T/a^3)$ に対して不変である事から, $\bar{\Omega} \equiv \Omega/A$ と $\bar{u}_{\max} \equiv u_{\max}/A$ を比較する事にする. このため A の違いはスケールングで見えなくなる. $\bar{\Omega}$ が小さい時には, $\bar{u}_{\max}$ は $\bar{\Omega}$ に比例して大きくなる. なお, $\bar{\Omega} = 0$ は 1 つの孤立波が Y 軸に平行にある状態なので, $\bar{\Omega} \rightarrow 0$ で $\bar{u}_{\max}$ が 1 に近づいているように見えるのは自然であろう. $\bar{\Omega}$ がある程度大きくなると, $\bar{\Omega}$ の増加に対して $\bar{u}_{\max}$ は減少するようになるが, その傾向は $\bar{\Omega}$ が大きくなるほど弱まり, ある程度大きな $\bar{\Omega}$ では, 一定値を取るようになる. この値が $\bar{u}_{\max} = 2$ である事と先に示した $\Omega = 4$ の数値計算の結果から, 非常に角度が大きい場合の 2 つの孤立波の相互作用はほとんど変化の無い重ね合わせでないかとの予想が得られる.

また, $\bar{u}_{\max}$ の変化が増加から減少に変わる部分は非常に興味深い. 可積分である KP 方程式でも同様な stem の角度依存性が見られるが, さらに最大値 (初期孤立波の 4 倍) 及びその時の角度が厳密に求められている. 振幅の大きい stem を安定に数値計算する事が難しいため, この問題について明らかにするのは難しいが, 例えば KP の最大値を超えるかどうかなどの視点から今後調べる予定である.



(a)



(b)

Fig.2 (cont.)

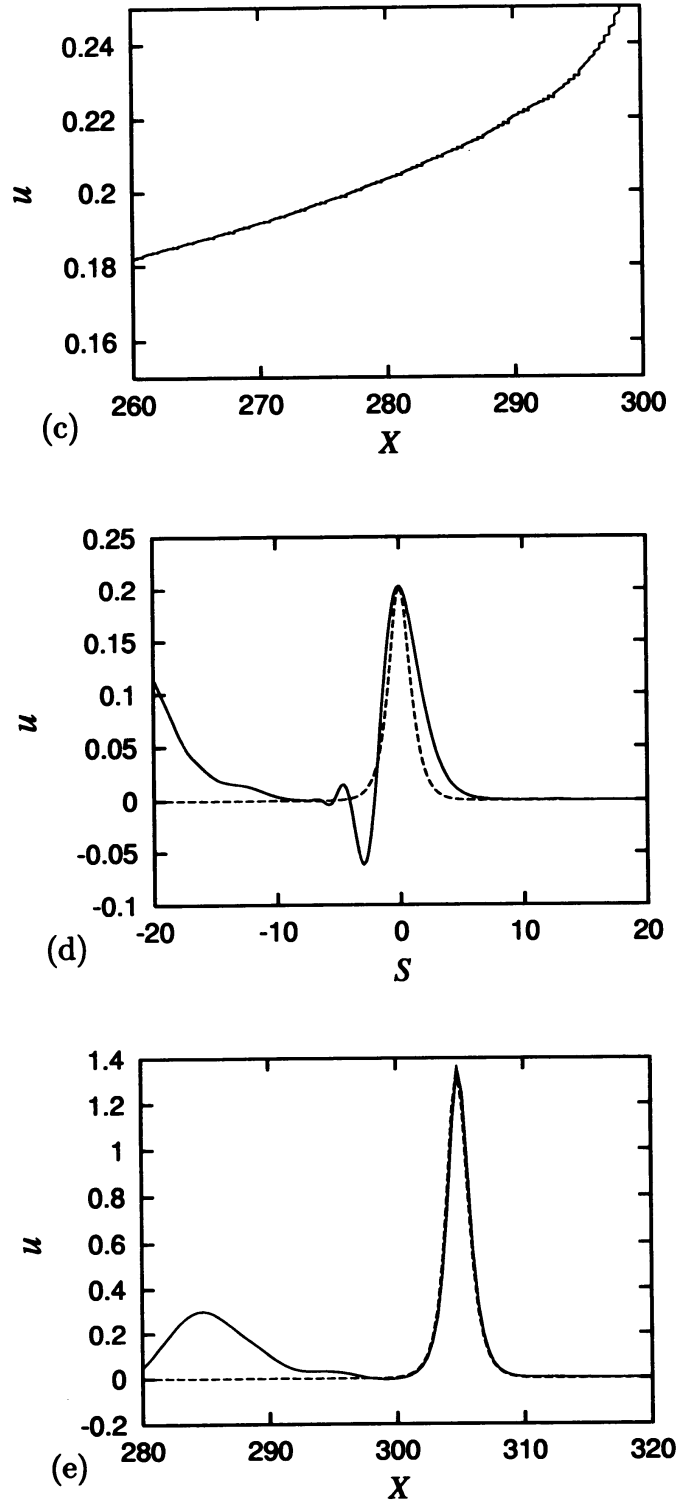


Fig.2 : Development of the wave interaction for $A = 0.5, \Omega = 1.0$. (a) Initial condition $T = 0$. (b) Wave profile at $T = 25.005$. (c) Amplitude of the solitary wave after the interaction at $T = 25.005$. (d) Profile of solitary wave after the interaction at $T = 25.005$. Axis S is indicated in the Fig.2(b) and the origin $S = 0$ is located on $(X, Y) = (280.0, 22.3)$. Solid line: Numerical result, Dashed line: MKdV Soliton solution. (e) Profile of the stem wave at $T = 25.005$. Solid line: Numerical result, Dashed line: MKdV soliton solution.

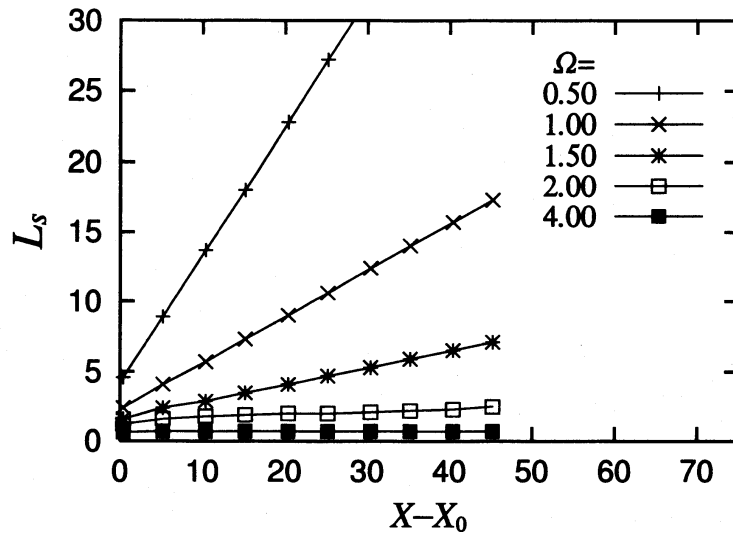


Fig.3 : Development of stem length for various Ω . $A = 0.5$.

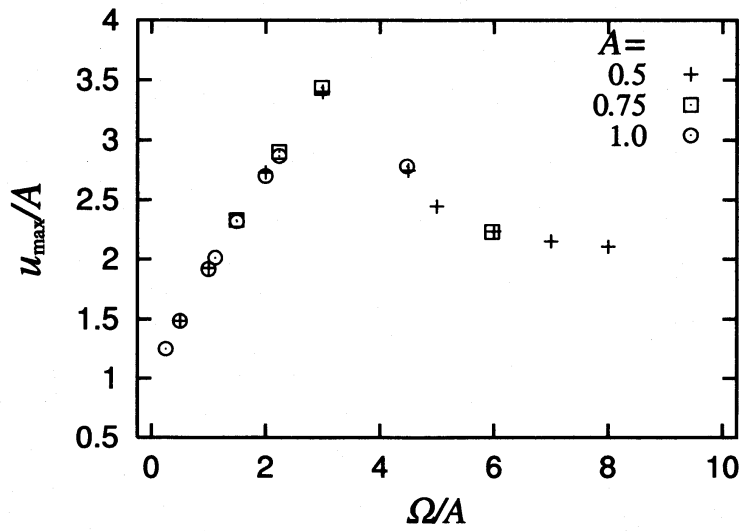


Fig.4 : Dependence of the stem amplitude at $X - X_0 = 25.0$ on Ω .

5 まとめ

本研究では、MKP 方程式を用いて MKdV ソリトンの 2 次元的相互作用を調べた。その結果、進行方向の角度の違いによって相互作用が非常に小さい場合と、初期のソリトンより高い振幅を持つ第 3 のソリトンが生成される場合とがある事が明らかになった。ソリトンの出会う角度が近づくにつれて stem の長さはより長くなるが、定常振幅は、ある程度の範囲に収まる。これらの傾向は今まで調べた空間 2 次元の方程式での結果とある程度類似している。この事を統一的に説明できるかどうかは今後の課題である。

今回、物理系が弱 2 次元という仮定の元に孤立波の相互作用を調べたが、スケーリングについて仮定の無い場合について基礎方程式を摂動論によって調べる事は興味深い。その場合には個々の孤立波が独立に進むという予想が本研究の一つの結果としてあるが、これが正しいのかを解析的に明らかにできないかと考えている。

参考文献

- 1) 及川正行: 九州大学応用力学研究所所報 **60** (1984) 467.
- 2) Y. Matsuno: Proc. R. Soc. Lond. A **454** (1998) 835.
- 3) H. Tsuji and M. Oikawa: J. Phys. Soc. Jpn. **62** (1993) 3881.
- 4) H. Tsuji and M. Oikawa: Fluid Dyn. Res. **29** (2001) 251.
- 5) B. B. Kadomtsev and V.I. Petviashvili: Sov. Phys. Dokl. **15** (1970) 539.
- 6) S. Watanabe: J. Phys. Soc. Jpn. **53** (1984) 950.
- 7) Chen Yongze and P. L.-F. Liu: Wave Motion, **27** (1998) 321.