

$\bar{\partial}_b$ -cohomology と Bochner-Martinelli 核

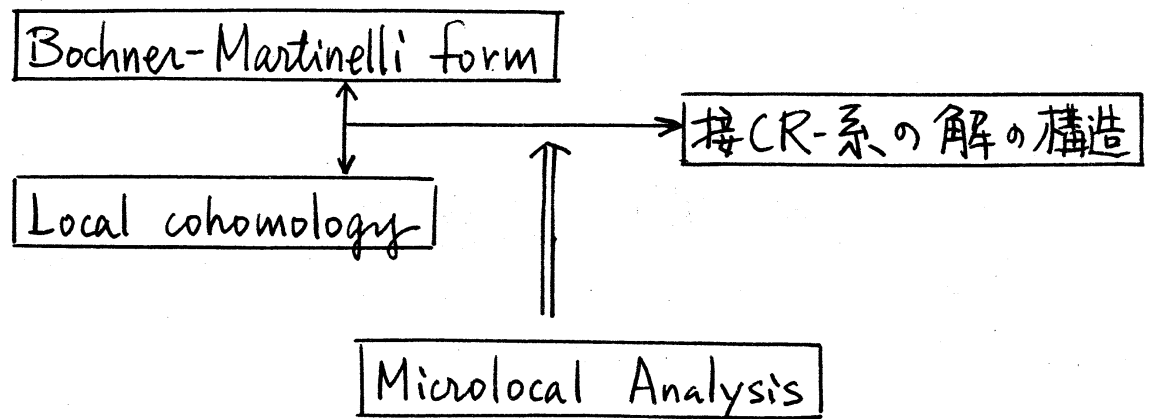
新潟大・教養 田島 慎一 (Shinichi TAJIMA)

非退化な Levi form を持つ実超曲面上の接 Cauchy-Riemann 複体に対しては Poincaré の補題が成立しないことは良く知られています (Andreotti-Hill [1]). ここでは Levi form が退化する場合も含めた一般の場合にも, microfunctions を係数とした接 Cauchy-Riemann 複体に対して Poincaré' の補題が 成立しないことを示します。

証明の基本的アイデアは次の 2 の点にあります。

- イ) (一般化された) Bochner-Martinelli form を local cohomology の立場から捉える。
- ロ) 「local cohomology」と「microfunctions 係数の接 Cauchy-Riemann 複体」との関係を利用する。

図式化すれば次の様になります。



得られた結果(定理4)を擬凸領域に適用すれば, 擬凸領域における $\bar{\partial}$ -Neumann問題に対する Catlin[4], Diederich-Pflug[5]らの結果に類似した結果(系5)が得られることをあらかじめ注意しておきたいと思います。

§1. 問題の背景

この節では, 擬凸境界面上の接Cauchy-Riemann系の場合に例をとって, 我々の考えている問題を明らかにします。

$X \subset \mathbb{C}^n$ を領域とし, ρ は X 上定義された実数値実解析的関数とします。

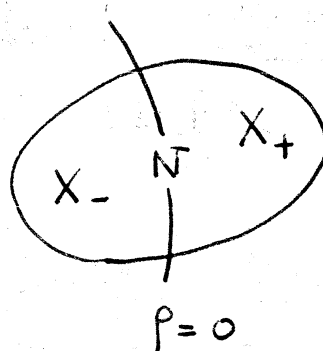
$$X_{\pm} = \{z \in X \mid \rho(z, \bar{z}) \gtrless 0\}$$

$$N = \{z \in X \mid \rho(z, \bar{z}) = 0\}$$

と定めます。但し

$$\text{grad } \rho|_N \neq 0$$

を仮定します。



N は実解析的多様体なので、 N を複素化した複素多様体 Y が自然に考えられるので、埋め込み $N \hookrightarrow Y$ に associate した spherical conormal bundle $S_N^* Y$ が構成されます。 $S_N^* Y$ 上に定義される microfunctions のなす層を C_N で表わします。

N 上に induce された 接 Cauchy-Riemann 系を考えれば、microfunctions を係数とする次の様な複体 K が自然に定義されます。

$$K: 0 \rightarrow C_N \xrightarrow{\bar{\partial}_b} C_N^{(n-1)} \xrightarrow{\bar{\partial}_b} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_b} C_N \rightarrow 0$$

複体 K に対する次の問題は基本的で、重要です。

問題 この複体 K の cohomology sheaves の構造を決定せよ。

注意 超曲面 N を実解析的多様体と見做し N 上の実解析的関数の作る層 $\mathcal{A}_N$ を層 $\mathcal{C}_N$ のかわりにとれば K と同様に複体

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_N \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_N^{(n-1)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}_N \rightarrow 0$$

を考えることが出来ます。この $\mathcal{A}_N$ 係数の複体に対しては Poincaré の補題が成立し。しかも $\text{Ker } \bar{\partial}$ は X 上の正則関数の作る層 $\mathcal{O}_X$ を N に制限して得られる層 $\mathcal{O}_X|_N$ と一致することが知られています。従って microfunctions 係数の複体 K の構造が分れば 佐藤超関数の作る層 $\mathcal{B}_N$ を係数とした次の複体

$$0 \rightarrow \mathcal{B}_N \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{B}_N^{(n-1)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{B}_N \rightarrow 0$$

の構造もわかります。

さて、超局所解析学における佐藤の基本定理により、次の結果を得ます。

基本定理 $S_N^* Y - S_N^* X$ 上で複体 K は exact.

今の場合 $N \hookrightarrow X$ は実余次元が 1 ですから
(X_- に対する) 単位外法線ベクトル全体の成す集合を N_+ , 単位内法線ベクトル全体の成す集合を N_- とおけば

$$S_N^* X = N_+ \cup N_-$$

と直和分解されます。従って複体 K の解析を行なう際には N_+ 及び N_- で別々に超局所解析をすればよいことが分ります。

以後、複体 K を N_+ (の近傍) で考えたものを K_{N_+} で表わし、 N_- (の近傍) で考えたものを K_{N_-} で表わすことにします。又、点 $P \in N$ に対応する N_+ 上の点を P_+ で表わし、点 $P \in N$ に対応する N_- 上の点を P_- で表わすことにします。

N が領域 X_- の強擬凸境界面であるときの複体 K の構造は、佐藤-河合-柏肩 [13] によって次の形で決定されています。

例 N は X_- の強擬凸境界面とする。このとき

$$\begin{cases} \mathcal{H}^0(K_{N_+}) = \text{Ker } \bar{\partial}|_{N_+} \neq 0 \\ \mathcal{H}^k(K_{N_+}) = 0 \end{cases} \quad \text{for } k \neq 0$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}^k(K_{N_-}) = 0 \\ \mathcal{H}^{n-1}(K_{N_-}) \neq 0 \end{cases} \quad \text{for } k \neq n-1$$

が成り立つ。更に $\mathcal{H}^0(K_{N_+})$ 及び $\mathcal{H}^{n-1}(K_{N_-})$ は flabby sheaf であることも知られている。

ところが、一般の弱擬凸境界面 N に対しては

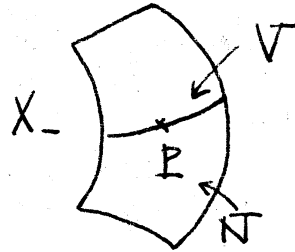
$$\begin{cases} \mathcal{H}^0(K_{N_+}) \neq 0 \\ \mathcal{H}^k(K_{N_+}) = 0 \end{cases} \quad \text{for } k \neq 0$$

は成立するのですが、 $P \in N$ が弱擬凸境界点、のとき $\mathcal{H}^k(K_{N_-})_P$ の構造は一般に複雑で 決定されておられません。

例 領域 X_- は弱擬凸で、 $P \in N$ を通る complex hypersurface (の germ) V で N に含まれる様なものが存在すると仮定する。

このとき

$$H^0(K_{N_-})_{P_-} \neq 0$$



が成り立つ。

境界面 N が強擬凸でない場合でも、点 $P \in N$ におけるその「退化の程度」が小さくであれば、複体 K_{N_-} の低次の cohomology group $H^k(K_{N_-})_{P_-}$ 達は消滅すると予想されるので、次の大胆な conjecture も自然と思われそうです。

Conjecture (cf. Kohn [10], Bedford-Fornaess [3])

N は X_- の 実解析的擬凸境界面 とする。このとき次の幾何的条件(1)と解析的条件(2)とは同値である。

- (1) 点 $P \in N$ を通る complex codimension q の subvariety の germ で N に含まれるものが存在

し、かつ、codimension が $g-1$ 以下で同じ条件を
満たすものは存在しない。

$$(2) \operatorname{Hom}_{\varepsilon_Y}(\bar{\omega}_D, C_N)_{P_-} = \cdots = \operatorname{Ext}_{\varepsilon_Y}^{g-2}(\bar{\omega}_D, C_N)_{P_-} = 0$$

かつ

$$\operatorname{Ext}_{\varepsilon_Y}^{g-1}(\bar{\omega}_D, C_N)_{P_-} \neq 0.$$

但し、ここでは記号 $\mathcal{H}^0(K_{N_-})_{P_-}$ の代りに $\operatorname{Hom}_{\varepsilon_Y}(\bar{\omega}_D, C_N)_{P_-}$, $\mathcal{H}^k(K_{N_-})_{P_-}$ の代りに $\operatorname{Ext}_{\varepsilon_Y}^k(\bar{\omega}_D, C_N)_{P_-}$ なる記号を使っている。

上記の conjecture を解くことが、我々の当初の
目的であった。

§.2. Local cohomology に関する結果.

この節では local cohomology に対して得た結果
を紹介する。§.1 とは記号を少し換えて以下の
様に定める。

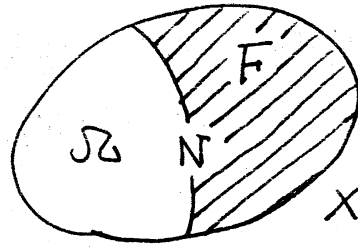
$X \subset \mathbb{C}^n$ は領域とし、 f は X 上定義された実数
値連続関数とする。更に

$$\Omega = \{z \in X \mid \rho(z, \bar{z}) < 0\}$$

$$F = \{z \in X \mid \rho(z, \bar{z}) \geq 0\}$$

$$N = \{z \in X \mid \rho(z, \bar{z}) = 0\}$$

と定めます。



X 上の正則関数のなす層を $\mathcal{O}_X$ とし、 $\mathcal{H}_F^k(\mathcal{O}_X)$ によつて ($k=1, 2, \dots, n$) F に台を持つ local cohomology を表わすことにします。

注意 $j \in \Omega \hookrightarrow X$ なる inclusion map とすれば

$$\begin{cases} j_* j^{-1} \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X \cong \mathcal{H}_F^1(\mathcal{O}_X) \\ R^k j_* j^{-1} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{H}_F^{k+1}(\mathcal{O}_X) \end{cases}$$

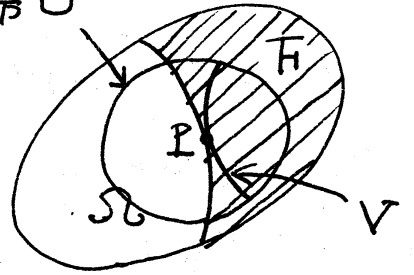
が N 上成立します。特に $\mathcal{H}_F^1(\mathcal{O}_X)$ は解析接続の obstructions を表わす層になっていることに注意します。(例えば [12] を御覧ください)

Local cohomology sheaves $\mathcal{H}_F^k(\mathcal{O}_X)$ の非消滅に関して 次の定理が証明できました。

定理1 点 $P \in N$ の あり近傍 $U \subset X$ 上で
 定義された codimension g の complex variety V
 で 次の2つの条件を満たすものが存在すると仮定
 する。

(1) V は complete intersection 近傍 U
 で 点 P を含む

(2) $V \subseteq F$



このとき、

$\mathcal{H}_F^1(\mathcal{O}_X)_P, \mathcal{H}_F^2(\mathcal{O}_X)_P, \dots, \mathcal{H}_F^g(\mathcal{O}_X)_P$ の
 何れか少くとも一つは 消滅しない。

系2 定理1の条件の下で更に

$$\mathcal{H}_F^1(\mathcal{O}_X)_P = \dots = \mathcal{H}_F^{g-1}(\mathcal{O}_X)_P = 0$$

を仮定すれば

$$\mathcal{H}_F^g(\mathcal{O}_X)_P \neq 0 \quad \text{が} \text{なりたつ}。$$

この系2 は Andreotti-Norguet [2] にある
 結果の一般化になる。

点 $\{P\}$ 自体を余次元 n の complex submanifold と見做せば、次の系を得る。

系 3. $P \in N$ において

$$\mathcal{H}_F^1(\mathcal{O}_X)_P, \mathcal{H}_F^2(\mathcal{O}_X)_P, \dots, \mathcal{H}_F^n(\mathcal{O}_X)_P$$

の全てが同時に零になることは無い。

特に

$$\mathcal{H}_F^2(\mathcal{O}_X)_P = \dots = \mathcal{H}_F^n(\mathcal{O}_X)_P = 0 \quad \text{ならば}$$

$$\mathcal{H}_F^1(\mathcal{O}_X)_P \neq 0 \quad \text{を得る。}$$

この系 3 の前半の主張は Kashiwara-Schapira [9] の $(\mathcal{O}_X \text{ に対する })$ microsupport の議論からも得られる。又後半の主張は Hörmander [7] の定理 4.2.9 —— これは $\mathbb{C}^n$ 内の擬凸領域が正則領域であることの証明において重要な Step の一つであった —— を local cohomology を使って表現したものと一致している。

定理1の証明は Bochner-Martinelli form を使って初等的にできる。§4において codimension $q=2$ の場合の証明を与える。

§.3 接 Cauchy-Riemann 系への応用

この節では、境界面 N は実解析的と仮定する。 N を複素化して得られる複素多様体を Y とおく。 $S_N^* Y$ 上に定義される microfunctions の sheaf を C_N で表わし、擬微分作用素のなす環の sheaf を $\mathcal{E}_Y$ で表わす。

N 上の接 Cauchy-Riemann 系を自然に $\mathcal{E}_Y$ -Module と見做し、 $\overline{\mathcal{D}}_b$ で表わすことにする。このとき、方程式系 $\overline{\mathcal{D}}_b$ の microfunction 解全体は $\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\overline{\mathcal{D}}_b, C_N)$ であり、高次の microfunction 解は $\mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_Y}^k(\overline{\mathcal{D}}_b, C_N)$ にほかならない。

これらの microfunction 解と local cohomology に関する次の同型定理は基本的である。
([8], [12], [16])

$$\begin{cases} \operatorname{Hom}_{\mathcal{E}_Y}(\bar{\mathcal{O}}_b, \mathcal{C}_N)|_{N_+} \cong \mathcal{H}_F^1(\mathcal{O}_X)|_N \\ \operatorname{Ext}_{\mathcal{E}_Y}^k(\bar{\mathcal{O}}_b, \mathcal{C}_N)|_{N_+} \cong \mathcal{H}_F^{k+1}(\mathcal{O}_X)|_N \\ k=1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

この同型定理を使えば、定理1の応用として次の結果が直ちに得られる。

定理4 点 $P \in N$ を通る complex codimension q の complex subvariety の germ V で 次の条件を満たすものがあるとする。

- (1) V は P のある近傍 U 上 定義され、complete intersection である。
- (2) $(V \cap U) \cap \Sigma = \emptyset$ すなわち $V \cap U \subseteq F$ 。

今、点 P における単位外法線ベクトルを $P_+ \in N_+$ で表わせば、次のことが成り立つ。

$\operatorname{Hom}_{\mathcal{E}_Y}(\bar{\mathcal{O}}_b, \mathcal{C}_N)_{P_+}, \operatorname{Ext}_{\mathcal{E}_Y}^1(\bar{\mathcal{O}}_b, \mathcal{C}_N)_{P_+}, \dots,$
 $\operatorname{Ext}_{\mathcal{E}_Y}^{q-1}(\bar{\mathcal{O}}_b, \mathcal{C}_N)_{P_+}$ の少なくとも一つは 消滅 する。

系5 定理の条件の下で、更に

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\bar{\partial}b, (N)_{\mathbb{P}_+}) = \dots = \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_Y}^{g-2}(\bar{\partial}b, (N)_{\mathbb{P}_+}) = 0$$

を仮定すれば $\mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_Y}^{g-1}(\bar{\partial}b, (N)_{\mathbb{P}_+}) \neq 0$ が成り立つ。

この系5は Catlin [4], Diederich-Pflug [5] の結果と対応する。

§.4. Bochner-Martinelli form と Local cohomology.

V を複素多様体 X の complex codimension g の submanifold (の germ) とするとき、 V に台を持つ delta-function を $\mathcal{H}_V^g(\mathcal{O}_X)$ の元と考えて $\mathcal{S}(V)$ で表わします。Dolbeault 同型で (V の補集合上で定義される) $\mathcal{S}(V)$ に対応する form が Bochner-Martinelli form になることは知られています。

従って Andreotti-Norguet [2] が local cohomology の non-vanishing を示すのに Bochner-Martinelli form を使ったのは極めて自然な idea と考えられます。

しかし、Andreotti-Norguet の与えた議論は零にならない Levi form の固有値を利用したもので、我々の目的の為には不十分と思われます。

そこで、この節では、Bochner-Martinelli form を local cohomology の元として正しく捉えることに依り定理 1 が証明出来ることを示します。

記号等が煩雑になるのをさける為、ここでは余次元が 2 の場合に限定して証明を与えます。

準備 (Bochner-Martinelli form の基本的性質)

点 P の近傍 U 上定義された正則関数 t_1, t_2 により $V = \{z \in U \mid t_1(z) = t_2(z) = 0\}$ と与えられるとしてよい。

$$U_1 = \{z \in U \mid t_1(z) \neq 0\}, \quad U_2 = \{z \in U \mid t_2(z) \neq 0\}$$

$$\theta_1 = \frac{\bar{t}_2}{t_1(t_1\bar{t}_1 + t_2\bar{t}_2)}, \quad \theta_2 = \frac{-\bar{t}_1}{t_2(t_1\bar{t}_1 + t_2\bar{t}_2)}$$

とおく。

$\theta_1 - \theta_2 = \frac{1}{t_1 t_2}$ ($= \theta$ とおく) が $U_1 \cap U_2$ において成り立つ。

$$B = \frac{\bar{t}_1 d\bar{t}_2 - \bar{t}_2 d\bar{t}_1}{(t_1 \bar{t}_1 + t_2 \bar{t}_2)^2} \quad \text{とおくとき}$$

$$\bar{\omega}(t_1 \theta_1) = t_1 B, \quad \bar{\omega}(t_2 \theta_2) = t_2 B$$

が $U-V$ において成り立つ。 準備 終り。

定理1の証明 (余次元 $q=2$ の場合)

$\mathcal{H}_F^1(\mathcal{O}_X)_P = \mathcal{H}_F^2(\mathcal{O}_X)_P = 0$ を仮定して矛盾を導く。 $j: \Sigma \rightarrow X$ を自然な inclusion とするとき。

$$(\mathcal{R}^0 j_* j^{-1} \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X)_P \cong \mathcal{H}_F^1(\mathcal{O}_X)_P$$

$$(\mathcal{R}^1 j_* j^{-1} \mathcal{O}_X)_P \cong \mathcal{H}_F^2(\mathcal{O}_X)_P \quad \text{が成り立つ}$$

から

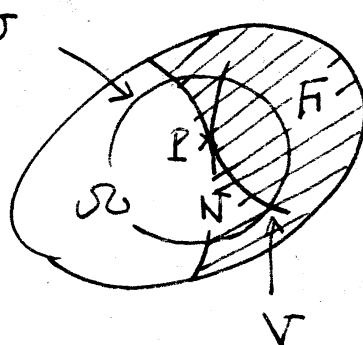
$$(j_* j^{-1} \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X)_P = (\mathcal{R}^1 j_* j^{-1} \mathcal{O}_X)_P = 0$$

を仮定したことになる。

さて、 B は $U-V$ 上定義された 1-form なので、特に B を $\Sigma \cap U$ に制限して、その上の closed 1-form と考えられる。

$$(R'_j)_* j^{-1} (\mathcal{O}_X)_E = 0$$

なる仮定より、 E の近傍 U を小さく取り直した近傍 U' 上で考えれば



$B = \bar{\partial} \beta$ をみたす $\Omega \cap U'$ 上の hyperfunction β が存在する。そこで

$$h_1 = t_1 g_1 - t_1 \beta, \quad h_2 = t_2 g_2 - t_2 \beta$$

とおく。 h_1, h_2 は共に $\Omega \cap U'$ 上定義された関数であるから

$$\bar{\partial} h_1 = t_1 B - t_1 B = 0, \quad \bar{\partial} h_2 = t_2 B - t_2 B = 0$$

を $\Omega \cap U'$ 上満たしている。もう一つの仮定

$$(j_* j^{-1} \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X)_E = 0$$

より、点 E の充分小さい近傍を考えれば、関数 h_1, h_2 はともに $\mathbb{C}^n$ の正則関数として拡張出来ることがわかる。

f_1, f_2 を解析接続して得られる函数を再び f_1, f_2 で表わすことにする。

さて

$$\begin{aligned} t_2 f_1 - t_1 f_2 &= t_2 (t_1 \phi_1 - t_1 \beta) - t_1 (t_2 \phi_2 - t_2 \beta) \\ &= t_1 t_2 (\phi_1 - \phi_2) = t_1 t_2 \phi \\ &= t_1 t_2 \frac{1}{t_1 t_2} = 1 \end{aligned}$$

が $\Omega \cap U'$ で成り立つが、点 $P \in V$ における左辺の値を考えれば、これは明らかに矛盾である。従って定理が余次元 2 の場合に証明された。一般の余次元の場合も本質的には同じ様に証明することが出来る。

以上。

References

- [1] Andreotti, A. and Hill, C.D.: E.E. Levi convexity and the Hans Lewy problem, I and II. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 26 (1972), pp. 325 - 363 and pp. 747 - 806
- [2] Andreotti, A. and Norguet, F.: Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 20 (1966), pp. 197 - 241
- [3] Bedford, E. and Fornæss, J.E.: Local extension of CR-functions from weakly pseudoconvex boundaries. Michigan Math. J., 25 (1978), pp. 259 - 262
- [4] Catlin, D.: Necessary conditions for subellipticity and hypoellipticity for the $\bar{\partial}$ -Neumann problem on pseudoconvex domains. Annals of Math. Studies 100 (1981), pp. 93 - 100
- [5] Diederich, K. and Pflug, P.: Necessary conditions for hypoellipticity of the $\bar{\partial}$ -problem. Annals of Math. Studies 100 (1981), pp. 151 - 154
- [6] Eastwood, M.G. and Suria, G.V.: Cohomologically complete and pseudoconvex domains. Comment. Math. Helvetici, 55 (1980) pp. 413 - 426
- [7] Hörmander, L.: An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. D. van Nostrand 1966
- [8] Kashiwara, M. and Kawai, T.: On the boundary value problem for elliptic system of linear differential equations I. Proc. Japan Acad. 48 (1972), pp. 712 - 715
- [9] Kashiwara, M. and Schapira, P.: Microlocal Study of Sheaves. Astérisque, 128 (1985)
- [10] Kohn, J.J.: Subellipticity of the $\bar{\partial}$ -Neumann problem on pseudoconvex domains: sufficient conditions. Acta Math. 142 (1979), pp. 79 - 122
- [11] Morimoto, M.: Sur les ultradistributions cohomologiques. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 19 (1969), pp. 129 - 153
- [12] Pallu de la Barrière, P.: Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. J. Math. Pures et Appl., 55 (1976), pp. 21 - 46

- [13] Sato, M., Kawai, T. and Kashiwara, M.: Microfunctions and pseudo-differential equations. Springer Lecture Notes in Math., 287 (1973), pp. 265 - 529
- [14] Scheja, G.: Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen. Math. Annalen, 144 (1961), pp. 345 - 360
- [15] Sorani, G.: Sulla rappresentazione delle funzioni olomorfe. Lincei Rend. Sc. fis. mat. e nat., 39 (1965), pp. 161 - 166
- [16] Tajima, S.: Analyse microlocale sur les variétés de Cauchy-Riemann et problème du prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Pub. RIMS. Kyoto Univ. 18 (1982), pp. 911 - 945
- [17] ——— : $\overline{\partial}_b$ -cohomology and the Bochner-Martinelli kernel. submitted to Prospect in Algebraic Analysis, Academic Press
- [18] Tong, Y.L.L.: Integral representation formulae and Grothendieck residue symbol. Amer. J. Math., 95 (1973), pp. 904 - 917