

Cohomology spheres と cohomology complex projective spaces の S^1 orbit spaces の cohomology

東大 理学部 榎田 幹也

§0 Introduction

一般に top. space X に compact Lie group G が作用しているとする。このとき、 $X_G = EG \times_G X$ とすると $H^*(X_G; \mathbb{Z})$ は 群作用の様子を比較的よく表しているが、十分とは言えない。ここでは、 $H^*(X/G; \mathbb{Z})$ がどの程度作用の様子を表しているかを、 $G = S^1$ で、 $X \simeq_{\mathbb{Z}} S^n$ 又は $X \simeq_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}P^n$ の場合にについて調べる。ただし $X \simeq_{\mathbb{Z}} Y$ とは $H^*(X; \mathbb{Z}) \simeq H^*(Y; \mathbb{Z})$ (ring として同型) のこと。

以下、§1, §2. において、 X は compact Hausdorff $\dim_{\mathbb{Z}} X < \infty$ (i.e. $\dim_{\mathbb{Z}} X = m \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall U \subset X \text{ open } H_c^s(U; \mathbb{Z}) = 0 \text{ for } s > m$) であり、異なる isotropy type は有限個の non-trivial effective S^1 -action をもつとする。

§1. Cohomology spheres の S^1 -orbit spaces の cohomology

以下 $X \cong S^n$ とする。

素数 p に対し、次のような filtration を考える。

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} X \cong X^{\mathbb{Z}_{p^r}} \cong \cdots \cong X^{\mathbb{Z}_{p^k}} \cong X^{S^1} \\ T \models L. \\ X^{\mathbb{Z}_{p^{j+1}}} = \cdots = X^{\mathbb{Z}_{p^{j+1}}} \quad (0 \leq j < k) \quad (r_0 = 0 \text{ として}) \end{array} \right.$$

Smith の Th. より、

$$X^{\mathbb{Z}_{p^{r_j}}} \cong_{\mathbb{Z}_p} S^{d_j} \quad T \models L \quad d_j \equiv n \pmod{2}$$

$$X^{S^1} \cong_{\mathbb{Z}} S^{n'} \quad T \models L \quad n' \equiv n \pmod{2}$$

注、 $X^{S^1} = \emptyset$ のときは、 $n' = -1$ と考える。

Theorem 1 (Conner-Floyd)

$$H^q(X/S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = n+3, n+5, \dots, n-1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

(証明 略)

すなわち、additive には、 $H^*(X/S^1; \mathbb{Z})$ は、 X^{S^1} によって決定される。しかし、一般に、 $X^{S^1} = \emptyset$ のときは、orbit structure の様子を少し反映して、ring structure は異なる。

Theorem 2

- $X^{S^1} \neq \emptyset$ のとき、cup product は trivial
- $X^{S^1} = \emptyset$ のとき (故に $n' = -1$, d_j, n は奇数)

$X^{\mathbb{Z}_p} \neq \emptyset$ なる素数 p に対し、 $(*)$ の filtration を考え、

$$m_p(q) = \begin{cases} r_k & 0 \leq 2q \leq d_k \\ r_j & d_{j+1} \leq 2q \leq d_j \quad (1 \leq j < k) \\ 0 & d_1 < 2q \end{cases}$$

と定義する。このとき

$\gamma_j \in H^{2q}(X_{S^1}; \mathbb{Z})$ を generator とすると

$$\gamma_1 \cup \gamma_j = \left(\prod_p p^{m_p(0) - m_p(j)} \right) \gamma_{j+1} \quad \text{となる。}$$

注. $X = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$ において

$z \in S^1 \subset \mathbb{C}$ の作用を

$$z \cdot (z_1, \dots, z_n) = (z^{a_1} z_1, \dots, z^{a_n} z_n) \quad (a_j (1 \leq j \leq n) \text{ は}$$

positive integer) と定義した場合は, Kawasaki [3]

により計算されている。

< Th. 2 の証明の outline >

• $X_{S^1} \neq \emptyset$ の場合 省略

• $X_{S^1} = \emptyset$ の場合 $X_{S^1} \xrightarrow{\pi} X_{S^1}$ とする。

$$X_{S^1} = \emptyset \text{ より } H^p(X_{S^1}; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\pi^*} H^p(X_{S^1}; \mathbb{Q})$$

Th. 1 より $H^*(X_{S^1}; \mathbb{Z})$ は torsion free $\mathbb{Z}$ から

$$H^p(X_{S^1}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^p(X_{S^1}; \mathbb{Z}) \text{ 'injection'}$$

一方, $s < m$ に対し $\mathbb{Z}$ は, $X_{S^1} \xrightarrow{f} BS^1$ の Serre spectral

$$\text{seq. より } H^s(BS^1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} H^s(X_{S^1}; \mathbb{Z}) \quad (s < m)$$

したがって $\mathbb{Z}$ degree $< m$ においては $H^*(X_{S^1}; \mathbb{Z})$ の cup

であるから, Lemma 3より, $\ell_p(g) = \sum_{j=0}^{g-1} m_p(j)$, したがって , $\gamma_h \cup \gamma_g = \cup P^x \gamma_{g+h}$ ($\cup P = 1$ とみると, 両辺に π^* を施して, P の指数を比べることによ, $\ell = \ell_p(h) + \ell_p(g) - \ell_p(g+h)$ が得られる。とくに, $h=1$ のときは, $\ell = m_p(0) - m_p(g)$, したがって, すべての素数 p について, 行うことにより, 求める結果が得られる。 q. e. d.

註1. X : smooth manifold で, smooth な non-trivial S^1 作用があるとする。 $X \cong S^n$ のとき, $\mathbb{Z}_m \subset S^1$ に對して, $H^*(X/\mathbb{Z}_m; \mathbb{Z})$ を, Conner-Floyd の方法と, ほぼ同様の方法で求めることができる。一方, $X^{S^1} = \emptyset$ のとき, isotropy group をすべて含むような $\mathbb{Z}_m \subset S^1$ に對しては, $X/\mathbb{Z}_m \rightarrow X/S^1$ は S^1 -bundle になる。したがって, ℓ の Gysin exact seq. を書くことにより, $H^*(X/S^1; \mathbb{Z})$ の cup product を求めることができる。

註2. X : smooth manifold で, smooth な non-trivial S^1 作用があるとする。 $X \cong S^n$ のとき, $\mathbb{Z}_m \subset S^1$ に對して, $p: X/\mathbb{Z}_m \rightarrow X/S^1$ (proj.) とすると, $p^*: H^*(X/S^1; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X/\mathbb{Z}_m; \mathbb{Z})$ onto for $q < n$ が示される。したがって, $H^*(X/\mathbb{Z}_m; \mathbb{Z})$ の ring structure がわかる。特に, $X^{S^1} \neq \emptyset$ のときは, $H^*(X/\mathbb{Z}_m; \mathbb{Z})$ の cup product は trivial. (cf. Kawasaki [3])

§ 2. Cohomology complex projective spaces and $\mathbb{P}^1$ -orbit spaces and cohomology

以下 $X \subset \mathbb{C}P^n$ とする。(但し $L = \mathbb{Z}_p(p: \text{素数}), \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$)

Bredon の Th. 5.1.

$$F = X^{\mathbb{P}^1} = \bigsqcup_{i=1}^l F_i \text{ (disjoint union)} \quad F_i \sim \mathbb{C}P^{m_i} \quad (1 \leq i \leq l)$$

$$\sum_{i=1}^l (m_i + 1) = n + 1.$$

Theorem. 5.

$$\tilde{H}^s(X_{\mathbb{P}^1}; L) = \begin{cases} (\sum_{j=0}^{q-1} l_j - \min(n+1, q+1)) L & \text{if } s = 2q+1, (q \geq 1) \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

但し $l_j = \#\{i \mid m_i \geq j\}$

すなわち $H^*(X_{\mathbb{P}^1}; L)$ は $X^{\mathbb{P}^1}$ によつてのみ決定される。

<証明の outline>

まず $L = \mathbb{Q}$ のとき証明する。 $X_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{\pi} X/\mathbb{P}^1$ の $\mathbb{Q}$ 係数の Leray spectral seq. を考える。 $E_2^{s,t} = \begin{cases} t=0 \text{ のとき } H^s(X/\mathbb{P}^1; \mathbb{Q}) \\ t: \text{even} > 0 \text{ のとき } H^s(F; \mathbb{Q}) \\ \text{その他} & 0 \end{cases}$

$\therefore H^{2q}(X_{\mathbb{P}^1}; \mathbb{Q}) = E_2^{2q,0} = E_{\infty}^{2q,0}$. 以下 n が 0 を示す。

Prop. 6. $F_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{i} X_{\mathbb{P}^1}$ (inclusion) とすると。

$i^*: H^*(X_{\mathbb{P}^1}; L) \longrightarrow H^*(F_{\mathbb{P}^1}; L) = H^*(F; L) \otimes H^*(B\mathbb{P}^1; L)$. 今

$x \in H^{2q}(X_{\mathbb{P}^1}; L)$ ($q \neq 0$) に對し $i^* x \in H^{2q}(F; L) \otimes H^0(B\mathbb{P}^1; L)$

ならば $x = 0$. (証明 略)

$$F_{S'} \xrightarrow{\iota} X_{S'}$$

$$\pi' \downarrow \quad \searrow \quad \downarrow \pi \quad \pi, \pi' \text{ の } \mathbb{Q} \text{ 係数 Leray spectral seq.}$$

$$F \longrightarrow X_{S'} \quad \text{に お い て, それぞれの filtration は}$$

$$H^{2g}(X_{S'}; \mathbb{Q}) = \mathcal{F}^{0,2g} \supset \mathcal{F}^{1,2g-1} \supset \cdots \supset \mathcal{F}^{2g,0} = E_{\infty}^{2g,0} \supset 0$$

$$\downarrow \iota^*$$

$$\downarrow$$

$$H^{2g}(F_{S'}; \mathbb{Q}) = \mathcal{F}^{0,2g} \supset \mathcal{F}^{1,2g-1} \supset \cdots \supset \mathcal{F}^{2g,0} = H^{2g}(F; \mathbb{Q}) \otimes H^0(S'; \mathbb{Q})$$

$$\text{したがって, } \mathbb{Z} \text{ Prop 6 より, } E_{\infty}^{2g,0} = 0 \quad \therefore H^{2g}(X_{S'}; \mathbb{Q}) = 0.$$

一方

$$\begin{aligned} l_{g-1} \mathbb{Q} = E_2^{2g-2,2} &= E_3^{2g-2,2} \xrightarrow{d_3} E_3^{2g+1,0} \\ &\quad \cup \quad E_4^{2g-2,2} = E_{\infty}^{2g-2,2} \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad E_2^{2g+1,0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{g-2} \mathbb{Q} = E_2^{2g-4,4} &= \cdots = E_5^{2g-4,4} \xrightarrow{d_5} E_5^{2g+1,0} \\ &\quad \cup \quad E_6^{2g-4,4} = E_{\infty}^{2g-4,4} \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad E_2^{2g+1,0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_0 \mathbb{Q} = E_2^{0,2g} &= \cdots = E_{2g+1}^{0,2g} \xrightarrow{d_{2g+1}} E_{2g+1}^{2g+1,0} \\ &\quad \cup \quad E_{2g+2}^{0,2g} = E_{\infty}^{0,2g} \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad E_2^{2g+1,0} \end{aligned}$$

$$E_{2g+2}^{2g+1,0} = E_{\infty}^{2g+1,0} = 0.$$

$$E_{\infty}^{2g,0} = 0 \text{ と } H^{2g}(X_{S'}; \mathbb{Q}) = \min(g+1, n+1) \mathbb{Q} \text{ より}$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} (E_{\infty}^{2g-2,2} + E_{\infty}^{2g-4,4} + \cdots + E_{\infty}^{0,2g}) = \min(g+1, n+1) \text{ より}$$

$$\text{上の図より, } \dim_{\mathbb{Q}} E_2^{2g+1,0} = \sum_{j=0}^{g-1} l_j = \min(g+1, n+1) \text{ したがって}$$

$\mathbb{Z}$. $L = \mathbb{Q}$ のときは証明され.

$L = \mathbb{Z}_p a$ とし.

$X \simeq_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{CP}^n \Rightarrow X \simeq_{\mathbb{Q}} \mathbb{CP}^n$ だから, $H^*(X/S; \mathbb{Z})$ の free part の個数は, 得られている. したがって, あと, $\tilde{H}^{ev}(X/S; \mathbb{Z}_p) = 0$ を示せばよい. 二のため, 次のような filtration を考える.

$X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_r$ 但し, X_{j+1} は X_j の S' -action を effective にしたとき, $X_j^{\mathbb{Z}_p}$ の component のうち, F の component であるものを除いたもの. X_r は S' -action を effective にしたとき, $X_r^{\mathbb{Z}_p}$ の component は, F の component ばかりからなるとする. 今, X_r の S' -action を effective にしておく. $X_r^{\mathbb{Z}_p} = X_r^{S'}$ だから, $(X_r)_{S'} \longrightarrow X_{r/S'}$ の $\mathbb{Z}_p$ 係数 Leray spectral seq. は, $\mathbb{Q}$ 係数の場合と同じで, 同様の議論が成立つ. 特に $\tilde{H}^{ev}(X/S; \mathbb{Z}_p) = 0$

Lemma 7. $\tilde{H}^{ev}(X_j/S', X_{j+1}/S'; \mathbb{Z}_p) = 0 \quad (0 \leq j < r)$

証明には, X_j の S' -action を effective にとっておい.

$(X_j - X_{j+1})_{S'} \longrightarrow X_j - X_{j+1}/S'$ の compact support の $\mathbb{Z}_p$ -Leray spectral seq と Prop 6. を用いる.

Lemma 7 より, triple の exact seq. を使って, $\tilde{H}^{ev}(X/S; \mathbb{Z}_p) = 0$ が示される. g. e. d.

参考文献

- [1] A. Borel et. al. 'Seminar on Transformation Groups'
Ann. of Math. Studies No. 46. Princeton (1960)
- [2] W.Y. Hsiang 'Cohomology Theory of Topological
Transformation Groups' Springer (1975)
- [3]. T. Kawasaki 'Cohomology of twisted projective
spaces and lens complexes' Math. Ann 206 243-248
(1973)