

曲げせん断型モデルと ARX モデルを用いた高層建物のシステム同定と損傷同定

その1 理論

正会員 ○桑原 誠* 同 南 良忠* 同 吉富信太* 同 竹脇 出*

2. 構造—2. 振動

システム同定, 構造ヘルスマニタリング, ARX モデル, 曲げせん断型モデル, 剛性・減衰同定

1. 序

近年、建物の損傷検出の必要性が高まりつつある中で、システム同定に多くの関心が向けられ、盛んに研究が行われている。これらの研究は、建築物の構造的な健全性や損傷度を評価する構造ヘルスマニタリング技術に応用されており、このような技術の需要がますます増大している。

中村・竹脇らは、せん断型モデルに対し同定対象層の直上直下の加速度応答のみから層毎に剛性と減衰係数を同定する手法を提案している¹⁾。しかしながら、この手法はノイズの影響により精度が不安定であり、さらに、アスペクト比の大きな高層建物に適用することが困難であるという課題が存在する。これらの課題のうちノイズの問題に対して、前田らは ARX モデルを用いて、伝達関数に関する振動数 $\omega \rightarrow 0$ における制約条件を利用したより信頼性の高い手法を提案している²⁾。

本研究では、せん断型モデルを用いた従来の手法がアスペクト比の大きな高層建物への適用が難しいという課題を克服した新たな手法を提案する。

2. 同定関数を用いた既往のシステム同定法

2.1 せん断型モデルに対する同定関数を用いた同定法

本研究の定式化において、中村・竹脇らが提案した同定法¹⁾を参考にしているため、本節ではその要点を示す。図1に示す N 層せん断型構造物モデルを同定対象とする。地動入力加速度及び、上層側床の絶対加速度のフーリエ変換を $\ddot{U}_g(\omega)$, $\ddot{U}_j(\omega)$ とし、各層の剛性 k_j 、減衰係数 c_j 、線形履歴減衰定数 β_j の同定式(1)~(4)を誘導する手順が文献1)に示されている。

以降(4)式で定義される $f_j(\omega)$ を、せん断型モデルの同定関数と呼ぶ。

$$k_j = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}\{f_j(\omega)\} \quad (1), \quad \beta_j = \frac{\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im}\{f_j(\omega)\}}{2k_j} \quad (2)$$

$$c_j = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \operatorname{Im}\{f_j(\omega)\} \quad (3), \quad f_j(\omega) = \frac{-\omega^2 \sum_{i=j}^N m_i}{\{U_{j-1}(\omega)/U_j(\omega)\} - 1} \quad (4)$$

同定に際しては、(4)式の $U_{j-1}(\omega)$, $U_j(\omega)$ に観測データの離散フーリエ変換データが代入される。それに対して次節では、有限個の ARX パラメータで伝達関数 $U_j(\omega)/U_{j-1}(\omega)$ を表現し、同定関数に代入して同定を行う既往の手法²⁾を示す。

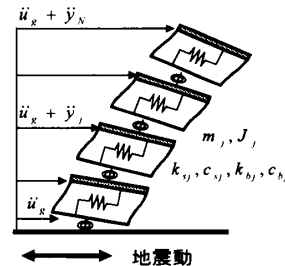
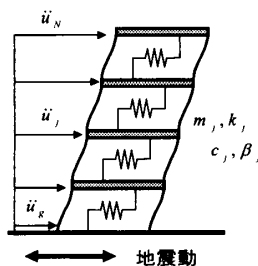


図1 せん断型モデル 図2 曲げせん断型モデル

2.2 同定関数と ARX モデルを用いた同定法

中村・竹脇らの手法では同定関数の $\omega \rightarrow 0$ における極限值を用いるが、模型実験や実際の建物で観測されたデータを適用した場合に、振動数 $\omega \rightarrow 0$ 近傍で同定関数値が乱れ、極限値の評価が困難となることがしばしば生じる。そのため、実測データを扱う場合はノイズの影響を受け易い低振動数領域において、同定関数の近似関数を設定して極限値を評価する必要がある。この場合、建物層数やノイズレベルに応じた適切な近似関数の設定が課題となる。

前田らはこの問題を解決するために、時系列モデルである ARX モデルのパラメータを用いて同定関数の極限値を表現する手法を提案している²⁾。すなわち、極限値を直接 ARX パラメータで表現することにより、同定関数をプロットして極限値を定める処理を回避することが可能となる。ただし、前田らの手法は中

SYSTEM IDENTIFICATION AND DAMAGE DETECTION OF HIGH-RISE BUILDINGS USING SHEAR-BENDING MODEL AND ARX MODEL, Part I THEORY

KUWABARA Makoto, MINAMI Yoshitada, YOSHITOMI Shinta and TAKEWAKI Izuru

村・竹脇らと同様に線形のせん断型構造物を対象としており、全体曲げ変形の影響を無視できない高層建物の場合などには直接適用することが困難である。

2.3 適合率 Fit を用いた ARX モデル次数の決定法

ARX モデルのような時系列モデルを扱う場合、パラメータの総数(モデル次数)が同定精度に大きく影響する。前田らはモデル次数を選択する指標として、次式で定義される適合率 Fit を用いている²⁾。

$$\text{Fit} = \left(1 - \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_d} [\hat{y}(k) - y(k)]^2}{\sum_{k=1}^{N_d} [y(k) - \bar{y}]^2}} \right) \times 100 [\%] \quad (5)$$

N_d はデータ数、 $y(k)$ は観測された出力データ、 $\hat{y}(k)$ は ARX パラメータによる出力データの推定値、 $\bar{y}$ は観測された出力データの平均値である。

ARX モデル次数毎に計算された適合率 Fit 及び同定関数極限値をプロットすると、安定して収束する次数区間が存在する。以降、この次数区間を安定区間、ARX モデル次数毎に適合率 Fit 及び同定関数極限値をプロットした図を Fit 図と呼ぶ。

3. 曲げせん断型モデルにおける同定関数を用いたシステム同定

3.1 曲げせん断型モデルについて

本論文で用いる曲げせん断型モデルは、建物の全体曲げを各層に付加された回転ばねにより評価し、せん断ばねと回転ばねを直列配置したモデルである。節点及び要素番号を建物最下層から順次付与し、図 2 のモデルにおける諸量をそれぞれ次のようなパラメータを用いて表すこととする。各変形量は図 3 に基づく。

この曲げせん断型モデルにおいて、第 j 層の自由体の釣合いより、運動方程式は(6)式のように得られる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_g(\omega) \quad (6)$$

$$\left(\begin{array}{l} m: \text{質量} \quad J: \text{回転慣性} \quad H': \text{床面高さ} \quad H: \text{階高} \\ c_s: \text{減衰係数} \quad c_b: \text{回転減衰} \quad k_s: \text{せん断剛性} \quad k_b: \text{回転剛性} \\ y: \text{相対変位} \quad v: \text{せん断変形} \quad \theta: \text{床回転角} \quad \phi: \text{層間相対床回転角} \end{array} \right)$$

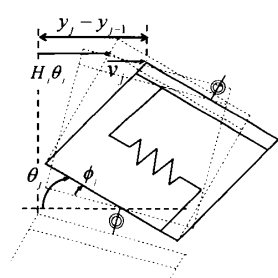


図 3 第 j 層の変形

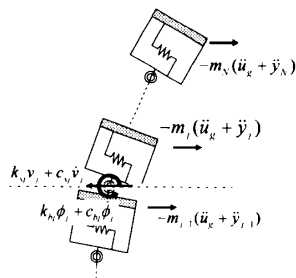


図 4 自由体の釣合い

ただし、地動入力加速度を $\ddot{u}_g(t)$ とし、各行列は以下のような成分をもつ。剛性行列 $\mathbf{K}$ は減衰行列 $\mathbf{C}$ の各減衰成分を剛性に置き換えたものである。

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, \dots, m_N \mid J_1, \dots, J_N) \quad (7)$$

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c_{s1} + c_{s2} & -c_{s2} & 0 & -H'_1 c_{s1} & H'_2 c_{s2} & 0 \\ -c_{s2} & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & -c_{sN} & 0 & 0 & H'_N c_{sN} \\ -H'_1 c_{s1} & 0 & 0 & H'_1{}^2 c_{s1} + c_{b1} + c_{b2} & -c_{b2} & 0 \\ H'_2 c_{s2} & \ddots & \ddots & -c_{b2} & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & H'_N c_{sN} & 0 & -c_{bN} & H'_N{}^2 c_{sN} + c_{bN} \end{array} \right] \quad (8)$$

$$\mathbf{u}(t) = \{y_1, \dots, y_N \mid \theta_1, \dots, \theta_N\}^T \quad (9)$$

$$\mathbf{r} = \{1, \dots, 1 \mid 0, \dots, 0\}^T \quad (10)$$

3.2 曲げせん断型モデルにおける同定関数を用いたシステム同定

前節で説明した曲げせん断型モデルを用いて、そのせん断剛性 k_s 、粘性減衰 c_s 、回転剛性 k_b 、回転減衰 c_b を同定対象のパラメータとするシステム同定の手法を提案する。本手法は観測が容易である水平方向の絶対加速度 $\ddot{u}_g + \ddot{y}$ を観測対象とする。

図 2、図 3 に示す曲げせん断型モデルにおいて、階高 H_j と床面高さ H'_j には $H'_j = \sum_{i=1}^j H_i$ の関係が成立し、第 j 層のせん断変形 v_j および床回転角 θ_j について次の関係が成立する。

$$v_j = y_j - y_{j-1} - \theta_j H_j \quad (11)$$

$$\theta_j = \sum_{m=1}^j \phi_m \quad (12)$$

図 4 の自由体について、水平方向の釣合い式および回転の釣合い式は次のように表される。

$$k_{sj} v_j + c_{sj} \dot{v}_j = \sum_{i=j}^N \{-m_i(\ddot{u}_g + \ddot{y}_i)\} \quad (13)$$

$$k_{bj} \phi_j + c_{bj} \dot{\phi}_j = \sum_{i=j}^N \{-m_i(\ddot{u}_g + \ddot{y}_i)(H'_i - H'_{j-1})\} + \sum_{i=j}^N (-J_i \ddot{\theta}_i) \quad (14)$$

ここで、(14)式の右辺について、第 2 項は第 1 項と比較して無視できるものとする。これらの式をフーリエ変換すると次式を得る。

$$V_j = Y_j - Y_{j-1} - \Theta_j H_j \quad (15)$$

$$\Theta_j = \sum_{m=1}^j \Phi_m \quad (16)$$

$$(k_{sj} + i\omega c_{sj}) V_j = \sum_{i=j}^N \{-m_i(\ddot{U}_g + \ddot{Y}_i)\} \quad (17)$$

$$(k_{bj} + i\omega c_{bj}) \Phi_j = \sum_{i=j}^N \{-m_i(\ddot{U}_g + \ddot{Y}_i)(H'_i - H'_{j-1})\} \quad (18)$$

(15)式に(16)、(18)式を代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} V_j &= Y_j - Y_{j-1} - H_j \sum_{m=1}^j \Phi_m \\ &= Y_j - Y_{j-1} - H_j \sum_{m=1}^j \left[\frac{1}{k_{bm} + i\omega c_{bm}} \sum_{i=m}^N \{-m_i(\ddot{U}_g + \ddot{Y}_i)(H'_i - H'_{m-1})\} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

(19)式を(17)式に代入して変形すると次式を得る。

$$\frac{1}{k_y + i\omega c_y} \cdot \frac{\sum_{i=j}^N \{-m_i(\ddot{U}_g + \ddot{Y}_i)\}}{(Y_j - Y_{j-1})} + H_j \sum_{m=1}^j \left[\frac{1}{k_{bm} + i\omega c_{bm}} \cdot \frac{\sum_{i=m}^N \{-m_i(H'_i - H'_{m-1})(\ddot{U}_g + \ddot{Y}_i)\}}{(Y_j - Y_{j-1})} \right] = 1 \quad (20)$$

上式に $\ddot{Y} = (i\omega)^2 Y$ の関係式を用い加速度だけを用いた表現にする。

$$\frac{1}{k_y + i\omega c_y} \cdot \frac{-\omega^2 \sum_{i=j}^N \{-m_i(\ddot{U}_g + \ddot{Y}_i)\}}{(\ddot{U}_g + \ddot{Y}_j) - (\ddot{U}_g + \ddot{Y}_{j-1})} - \omega^2 H_j \sum_{m=1}^j \left[\frac{1}{k_{bm} + i\omega c_{bm}} \cdot \frac{\sum_{i=m}^N \{-m_i(H'_i - H'_{m-1})(\ddot{U}_g + \ddot{Y}_i)\}}{(\ddot{U}_g + \ddot{Y}_j) - (\ddot{U}_g + \ddot{Y}_{j-1})} \right] = 1 \quad (21)$$

ここで、 $\omega \rightarrow 0$ の極限においては、建物は剛体的に動くため、 $\omega \rightarrow 0$ においてのみ成立する次の仮定を導入する。

$$\ddot{U}_g + \ddot{Y}_i \rightarrow \ddot{U}_g + \ddot{Y}_j \quad (\text{for all } i) \quad (22)$$

$$\ddot{\Phi}_j \rightarrow 0 \quad (23)$$

この仮定の下で、(21)式から j 層と $j-1$ 層のみの加速度により表わされたせん断型モデルの同定関数 $f_j(\omega)$ と同じ形を含む次式が得られる。

$$\frac{1}{k_{sj} + i\omega c_{sj}} \cdot \frac{-\omega^2 \sum_{i=j}^N m_i}{\ddot{U}_g + \ddot{Y}_{j-1} - 1} + \frac{H_j}{\sum_{i=j}^N m_i} \sum_{m=1}^j \left[\frac{\sum_{i=m}^N \{m_i(H'_i - H'_{m-1})\}}{k_{bm} + i\omega c_{bm}} \right] \cdot \frac{-\omega^2 \sum_{i=j}^N m_i}{\ddot{U}_g + \ddot{Y}_{j-1} - 1} = 1 \quad (24)$$

ただし、この式は $\omega \rightarrow 0$ の極限のみで等式が成立する。以下の式変形では最終的に $\omega \rightarrow 0$ の極限をとることを想定しているため、(22),(23)式の仮定は剛性・減衰の同定において問題を生じない。また、(21)式は全層の水平加速度を必要とするが、(24)式は連続2層の水平加速度のみを必要とする表現である。

ここで(24)式を、中村・竹脇らによって提案されている同定関数と比較する。この同定関数は、せん断型モデルにおいて連続2層の観測データから剛性・減衰の同定を可能にする関数である。したがって、(24)式をせん断型モデルの同定関数と同様の関数 $f_j(\omega)$ を用いて表現すると次式となる。

$$f_j(\omega) = \left(\frac{-\omega^2 \sum_{i=j}^N m_i}{\ddot{U}_g + \ddot{Y}_{j-1} - 1} \right) = \frac{\sum_{i=j}^N m_i}{\frac{\sum_{i=j}^N m_i}{k_{sj} + i\omega c_{sj}} + H_j \sum_{m=1}^j \left[\frac{\sum_{i=m}^N \{m_i(H'_i - H'_{m-1})\}}{k_{bm} + i\omega c_{bm}} \right]} \quad (25)$$

上式において分母計算を簡単にするため、(25)式の逆数を曲げせん断型モデルにおける同定関数 $F_j(\omega)$ と定める。

$$F_j(\omega) = \left(\frac{-\omega^2 \sum_{i=j}^N m_i}{\ddot{U}_g + \ddot{Y}_{j-1} - 1} \right)^{-1} = \frac{1}{k_{sj} + i\omega c_{sj}} + \frac{H_j}{\sum_{i=j}^N m_i} \sum_{m=1}^j \left[\frac{\sum_{i=m}^N \{m_i(H'_i - H'_{m-1})\}}{k_{bm} + i\omega c_{bm}} \right] \quad (26)$$

(26)式の実部の極限值から剛性の同定式を得る。また、 $\omega \rightarrow 0$ 極限を考える場合、剛性は残るが減衰のパラメータは残らない。そこで、(22),(23)式を考慮しつつ、 $\omega \rightarrow 0$ 極限をとる前に、(21)式の虚部を ω で微分することを考え、減衰の同定式を得る。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} [\text{Re}\{F_j(\omega)\}] = \frac{1}{k_{sj}} + \frac{H_j}{\sum_{i=j}^N m_i} \sum_{m=1}^j \left[\frac{\sum_{i=m}^N \{m_i(H'_i - H'_{m-1})\}}{k_{bm}} \right] \quad (27)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} [\text{Im}\{F_j(\omega)\}] = -\frac{c_{sj}}{k_{sj}^2} - \frac{H_j}{\sum_{i=j}^N m_i} \sum_{m=1}^j \left[\frac{c_{bm} \sum_{i=m}^N \{m_i(H'_i - H'_{m-1})\}}{k_{bm}^2} \right] \quad (28)$$

以上の結果から、せん断剛性に対する回転剛性の比率 $R_{kj} = k_{bj} / k_{sj}$ および粘性減衰に対する回転減衰の比率 $R_{cj} = c_{bj} / c_{sj}$ を仮定することで、(27),(28)式を同定式として用いて(29),(30)式のように剛性と減衰の各パラメータの同定が可能となる。例えば、第 j 層の剛性を同定する場合は、剛性の同定式である(27)式に同定関数の極限值および剛性比率 R_{kj} を各層毎に代入すると、(29)式から回転剛性が同定され、(30)式からせん断剛性が同定される。

$$k_{bj} = \frac{R_{kj} + \frac{H_j}{\sum_{i=j}^N m_i} \sum_{m=1}^j \{m_i(H'_i - H'_{m-1})\}}{\lim_{\omega \rightarrow 0} [\text{Re}\{F_j(\omega)\}] - \frac{H_j}{\sum_{i=j}^N m_i} \sum_{m=1}^j \left[\frac{\sum_{i=m}^N \{m_i(H'_i - H'_{m-1})\}}{k_{bm}} \right]} \quad (29)$$

$$k_{sj} = k_{bj} / R_{kj} \quad (30)$$

ただし、(29),(30)式から分かるように、システム同定を行う際は、各層毎に剛性比率 R_{kj} の指定（減衰について同定する場合は減衰比率 R_{cj} も指定）が必要であることに注意が必要である。また、同定対象層より下層の回転剛性 $k_{b1} \sim k_{bj-1}$ の値（減衰について同定する場合はさらに回転減衰 $c_{b1} \sim c_{bj-1}$ の値）が必要になるため、下層から漸化式的に同定を行うことになる。

3.3 ARX パラメータによる同定関数の極限值表現

3.2 節で提案した手法は、いずれも同定関数の極限值を用いる手法である。先述のように、実測データを用いた場合の同定関数は低振動数域において不安定であるという問題点を有する。本手法では ARX モデルを導入し、ARX モデルのパラメータによって同定関数の極限值を直接表現する手法を導入することで、この問題を回避する。

伝達関数 $G_{j,j-1}(\omega)$ を ARX パラメータで表現すると(31)式となる。また、 $G_{j,j-1}(\omega)$ を $\omega=0$ 周りでテイラー展開すると(32)式のように表現でき、その係数 A_0, A_1, A_2 は(33)~(35)式である。

$$G_{j,j-1}(\omega) = \frac{\ddot{U}_j + \ddot{Y}_j}{\ddot{U}_{j-1} + \ddot{Y}_{j-1}} = \frac{b_1 e^{-i\omega T_0} + \dots + b_n e^{-i\omega n T_0}}{1 + a_1 e^{-i\omega T_0} + \dots + a_n e^{-i\omega n T_0}} \quad (31)$$

$$G_{j,j-1}(\omega) = A_0 + A_1 \omega + A_2 \omega^2 + \dots \quad (32)$$

$$A_0 = \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) / \left(1 + \sum_{k=1}^n a_k \right) \quad (33)$$

$$A_1 = iT_0 \frac{\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) b_k \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n a_k \right\} - \sum_{k=1}^n b_k \left\{ n + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) a_k \right\}}{\left\{ 1 + \sum_{k=1}^n a_k \right\}^2} \quad (34)$$

$$A_2 = -\frac{T_0^2}{2} \left[\frac{\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 b_k}{1 + \sum_{k=1}^n a_k} - \frac{\sum_{k=1}^n b_k \left\{ n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 a_k \right\}}{\left\{ 1 + \sum_{k=1}^n a_k \right\}^2} \right. \\ \left. - 2 \frac{\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) b_k \left\{ n + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) a_k \right\}}{\left\{ 1 + \sum_{k=1}^n a_k \right\}^2} + 2 \frac{\sum_{k=1}^n b_k \left\{ n + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) a_k \right\}}{\left\{ 1 + \sum_{k=1}^n a_k \right\}^3} \right] \quad (35)$$

さらに(36)式によって係数 A_i を実部と虚部に分離し、 $\omega \rightarrow 0$ の極限における伝達関数の物理的解釈から、(37),(38)式を制約条件として付加すると、同定関数 $F_j(\omega)$ の極限值は(39)式で表せる。

$$A_j = A_j^R + iA_j^I, \quad A_0^R = 1, \quad A_1^I = 0 \quad (36), (37), (38)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} [\operatorname{Re}\{F_j(\omega)\}] = A_2^R / \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \quad (39)$$

4. 提案手法の損傷同定への適用

本節で提案する損傷同定法は(30)式で定義される同定関数 $F_j(\omega)$ の実部極限値を損傷前後において比較して損傷層を検出する手法である。損傷層においてせん断剛性が低下した場合、(31)式より同定関数 $F_j(\omega)$ の極限値が増加することがわかる。例えば、梁に損傷が生じた場合は、その梁に隣接する層の同定関数極限値が増加する。一方、柱に損傷がある場合は、当該層の同定関数極限値が増加することになる。この損傷同定の流れを、図5に示す。

以上より、曲げせん断型モデルにおける剛性の同定式(31)は、損傷前後での同定関数極限値を比較するという単純な操作で、損傷検出を可能にしていると考えられる。さらに、提案したシステム同定法において課題であった剛性比率 R_{kj} を指定する必要がないため、現実的な手法であると考えられる。

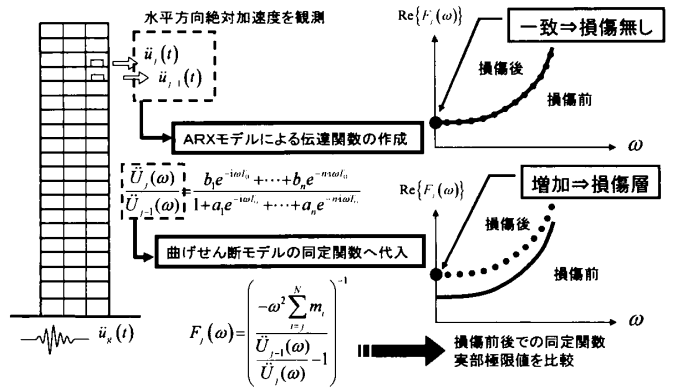


図5 提案する損傷同定法の流れ

5. 結論

高層建物についてのシステム同定法および損傷同定法を提案した。提案手法の特徴は以下のようにまとめられる。

- (1) せん断型モデルに対する既往の同定法が、高層建物に適用することが困難であるという課題を、曲げせん断型モデルを対象とする同定法を提案することで克服した。
- (2) 曲げせん断型モデルの自由体釣合い式に、せん断型モデルから類推した振動数 $\omega \rightarrow 0$ の極限で成立する仮定を導入することで、新たな同定式を誘導し、それに基づく同定法を提案した。
- (3) 本システム同定法では、全層同時計測が不要で連続2層の水平加速度だけを同時計測すればよい。
- (4) 提案したシステム同定法における同定式を応用し、損傷前後の同定関数極限値の比較による単純な操作で、損傷層を検出可能な損傷同定法を提案した。
- (5) 本損傷同定法では、提案したシステム同定法に必要な剛性比率・減衰比率の指定が不要である。また対象層上下層の計測のみで損傷検出が可能である。

参考文献

- 1) 中村充, 竹脇出, 安井謙, 上谷宏二, 限定された地震観測記録を用いた建築物の剛性と減衰の同時同定, 日本建築学会構造系論文集, No.528, pp.75-82, 2000.2.
- 2) 前田朋宏, 吉富信太, 竹脇出, 限定された地震観測記録と ARX モデルを用いた建物の剛性・減衰同定法, 日本建築学会構造系論文集, No.666, pp.1415-1423, 2011.8.