

有限自己同型群を持つ Coble 曲面の分類

— 2021年10月29日 城崎 —

名大・多元数理 金銅誠仁

標数2は桂利行氏との共同研究

— はじめに —

本講演の主題は、任意標数で有限自己同型群を持つ Coble 曲面を分類することである。Coble 曲面は Enriques 曲面の退化として現われ、主結果は Enriques 曲面の場合を補完するものである。

私事ではあるが、30数年前に城崎で初めて講演した内容が有限自己同型群を持つ複素 Enriques 曲面の分類であった。数学的に成長していったであろう。が、正標数、特に標数2の世界は独特のおもしろさがある。それが少しでも伝えられは幸いである。

本講義では代数体 $k = \bar{k}$, $\text{char}(k) = p \geq 0$ で考える。

(1°) Coble 曲面 について

Coble 曲面の由来は, A. Coble [2] が 10 個の node を持つ
平面 6 次曲線を研究したことである。正確な定義は,

Dolgachev - De Qi Zhang [5] が与えた。

非特異有理面 V が Coble 曲面 であるとは

$$|-KV| = \phi, \quad |-2KV| = \{B_1, \dots, B_n\},$$

$$B_i \cong \mathbb{P}^1, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

と満たすときをいう。 $B_1, \dots, B_n$ は 境界成分 と呼ばれる。

定義より $B_1, \dots, B_n$ で分岐する二重被覆

$$\pi: X \longrightarrow S$$

が存在し, X は K3 曲面となる。但し, $p=2$ の場合は,

π は不分離被覆で X は必ず特異点を持つ有理曲面と

なりことも起り得る。しかし, $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$, $H^1(\mathcal{O}_X) = 0$ で

K3-like と呼ばれる曲面である。

複素数体上では 堀川 [8], [9] が, Enriques 曲面の
周期理論を確立した。10 次元有界対称領域 $\mathcal{D}$ と

その中の可算無限個の超平面の和集合 $\mathcal{H}$ が存在し,

算術商 $(\mathcal{D} \setminus \mathcal{H})/\Gamma$ が Enriques 曲面のモジュライ空間

である。除いた $\mathcal{H}/\Gamma$ が Coble 曲面のモジュライ空間に

他ならない。Coble 曲面が Enriques 曲面の退化として現れ
れる。

Dolgachev - K. [4]

5 は 212. $\mathcal{H}/\Gamma$ は有理的である。これは Dolgachev と
南紀白浜へ向う電車の中で見つけたが、テレワークでは
難しかったと思われる。

(2°) Coble-向井格子

Enriques曲面, Coble曲面の研究には格子が大切である。
Enriques曲面 S には $\text{Num}(S) := \text{NS}(S)/\text{torsion}$ は, even unimodular, 符号 $(1, 9)$ の格子と等しい (Illusie [10]). E_{10} で表わされる。



S 上の非特異有理曲線 $C \cong \mathbb{P}^1$ と "単純ルット" と呼ぶ。 $C^2 = -2$ である。一方, Coble曲面の場合, ローカル環 $\mathcal{O}(V)$ は $\mathcal{O}(V) = 10 + n$, $n \leq 10$ (n は境界成分の個数) であり, $V \supset C \cong \mathbb{P}^1$ は $C^2 = -1, -2, -4$ と等しい。 $C^2 = -4$ は境界成分のときである。 Enriques曲面の場合の類似を得るために,

$$\text{Pic}(V)_{\mathbb{Q}} \supset \langle \text{Pic}(V), \frac{1}{2}B_1, \dots, \frac{1}{2}B_n \rangle$$

の中で, 境界成分に直交する

$$\text{CM}(V) := \langle B_1, \dots, B_n \rangle^{\perp}$$

と等しいとき, $\text{CM}(V)$ は階数 10 の格子と等しい。 $\text{CM}(V)$ を Coble-Mukai lattice と呼ぶ。 $\text{CM}(V)$ は E_{10} と同型に等しいことが期待されるが, $\mathbb{Q}$ 上または $n=1, 2$ の場合はそれが成り立つことが知られている (Dolgachev-K. [3])。

Coble曲面の場合の単純ルットは, (-2) -曲線 ($\cong \mathbb{P}^1$) と

$$2E + \frac{1}{2}B_i + \frac{1}{2}B_j, E \cong \mathbb{P}^1, E^2 = -1,$$



の形のルットが 2 種類が現われる:

	Enriques 曲面	Coble 曲面
lattice	E_{10}	$\text{CM}(V)$
単純ルット	(-2) -曲線 $\mathbb{P}^1$	(-2) -曲線 $\mathbb{P}^1$, $2E + \frac{1}{2}B_i + \frac{1}{2}B_j$

(3°) 自己同型群

Coble 曲面の場合も状況は同じである。ここでは Enriques 曲面 S の場合だけ述べる。自然な写像同型

$$\rho: \text{Aut}(S) \rightarrow O(\text{Num}(S)) \quad (O(\cdot) \text{ は 対称双線形形式の直交群})$$

は $|\text{Ker}(\rho)| < \infty$ であり, $\text{Im}(\rho) \cap W(S) = \{1\}$ である。ここで

$W(S)$ は、単純ルートを引き起す 鏡映 で生成される $O(\text{Num}(S))$ の部分群である。 S が generic ならば $W(S) = \{1\}$ であり, $|\text{Aut}(S)| = \infty$

となる。もし「 S ならば」、Enriques 曲面上には genus 1 fibration が存在するが、単純ルートを 無い。この “Mordell-Weil” 群が

正の階数を持ち、 S に無限自己同型を引き起こすからである。

genus 1 fib. は重複ファイバーを持つので切断は存在せず、

Mordell-Weil 群は定義で正しいか? Jacobian fib. を与えることで回避できる。

(4°) 鏡映群

$\text{Num}(S) \otimes \mathbb{R}$, $\text{CM}(V) \otimes \mathbb{R} (\cong \mathbb{R}^{1,9})$ の中の正定値

$$P^+ = \{x \mid x^2 > 0\}^0$$

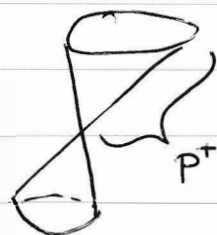
を考える。 $k=1$ の $W(S)$, $W(V)$ の作用の

基本領域として P-アール領域 (Coble の場合は k の制限) が現われる。

$$\text{Im}(\rho) \cap W(S) = \{1\} \text{ より}$$

$$[O(\text{Num}(S)) : W(S)] < \infty \Rightarrow |\text{Aut}(S)| < \infty$$

が従う。



Vinberg は $\mathbb{R}P^2$ スペースの鏡映群の研究において.

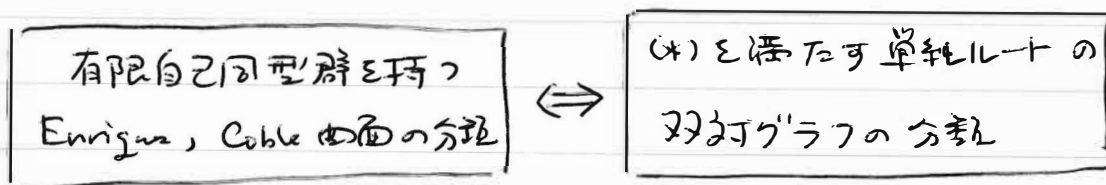
$[O(N_m(S)): W(S)] < \infty$ であるための十分条件を

与えた (Vinberg [24]). この条件は、幾何学的には.

(*) S 上の任意の genus 1 fibration の "Mordell-Weil" rank が 0 である。

と述べることで、別の言い方をすると、genus 1 fibration は全て extremal である。

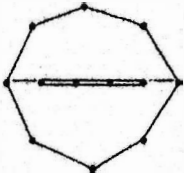
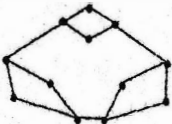
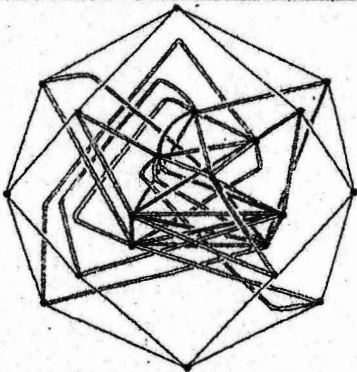
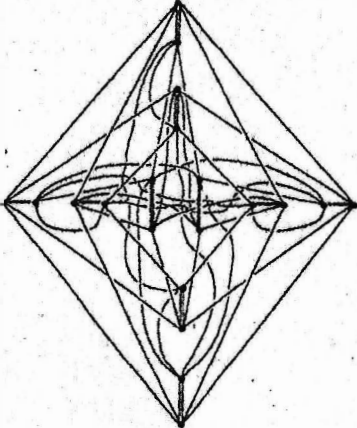
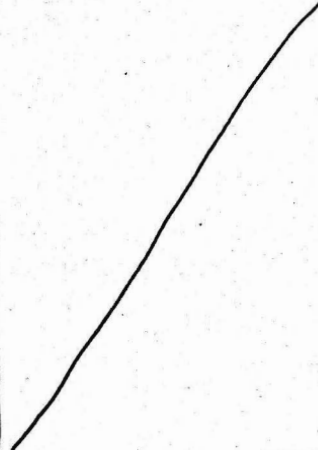
以上から、



とすることができた。存在は、具体的に構成することによって示す。

次の表が、標数 $p \neq 2$ の場合の分類を与える。

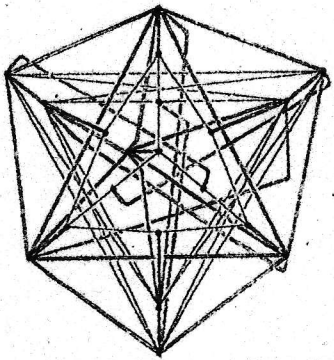
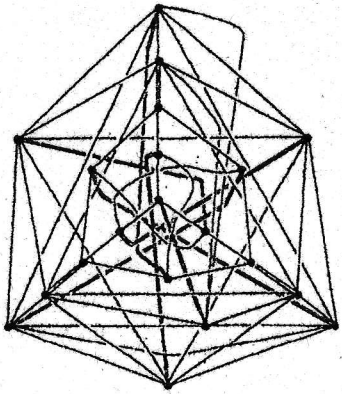
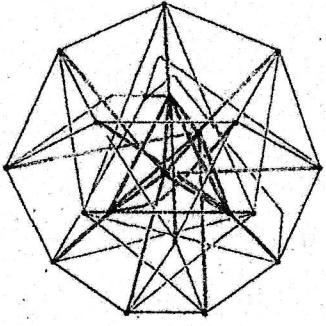
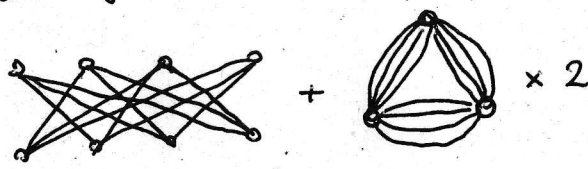
(5°) Classification ($P \neq 2$)

Type	Dual graph of (-2) -curves	Enriques	Coble
I		$P: \text{any}$ $12P^1$ 1-dim. family	$P: \text{any}, n=2$ $10P^1+2$, unique
			$P: \text{any}, n=1$ $12P^1$, unique
II		"	$P: \text{any}, n=1$ $12P^1$, unique
III		$P: \text{any}$ $20P^1$ unique	
IV		"	

Nikali-Kondo-Martin
 '84 '88 2019
 [21] [14] [17]

↑
 Kondo [15]
 (2021)

Cont:

V		$P \neq 3$ $20 P^1$ unique	$P=3 \quad n=2$ $16 P^1 + 4 = 20$ unique
VI		$P \neq 3, 5$ $20 P^1$ unique	$P=3, n=5$ $10 P^1 + 10 = 20$ unique
			$P=5, n=1$ $20 P^1$ unique
VII		$P \neq 5$ $20 P^1$ unique	$P=5, n=1$ $20 P^1$ unique
MI	$G_6 = \text{symm. group of dg 6}$ $(ij), (ij)(kl)(mn), (ijk)$ $15 + 15 + 10 = 40$		$P=3, n=2$ $15 P^1 + 15 P^1 + 10 = 40$ unique
MII	dual of  $16 + 12 + 12 = 40$		$P=3, n=8$ $16 + 12 P^1 + 12 P^1 = 40$ unique

MI, MII — Mulcaï, Ohashi [20], Kondo [15]

Cov. K3 = s.s. K3 in dim 3; $\delta=1$ = Fermat quartic

次に標数2の場合を考へる。まず標数2の Enriques 曲面から復習する。

(6°) 標数2の Enriques 曲面

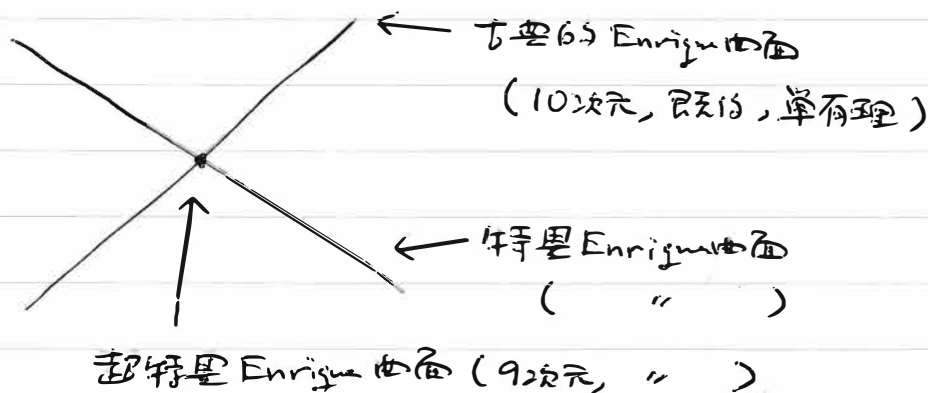
Bombieri-Mumford [1] は標数2の Enriques 曲面を3種類に分類した。

	Pic	標準的2重被覆 $\pi: X \rightarrow S$
古典的	$\mathbb{P}/2\mathbb{P}$	μ_2 -被覆 (by $K_S \neq 0, 2K_S = 0$)
特異	μ_2	$\mathbb{P}/2\mathbb{P}$ -"
超特異	α_2	α_2 -"

} by $H^1(\mathcal{O}_S) \cong k$
 $\nearrow$ Frobenius.

さらに彼らは $\mathbb{P}^5$ の内の3つの2次超曲面の交点の $\mathbb{P}/2\mathbb{P}$, μ_2 , α_2 の作用を考へ、 k 個の族の列を与えた。

その後、Liedtke [16] が、次数4の Enriques 曲面のモジュライ空間を Bombieri-Mumford の列を基にして構成した。2つの既約成分から成り次の図の形である：



定義的 Coble 曲面は古典的 Enriques 曲面の退化である。
 従って以下では断片的に限り、Enriques 曲面は古典的と可る。

(70) 標準被覆

標準被覆 $\pi: X \xrightarrow{2:1} S$ (or V) の構成は以下で与えられる。

K_S に対応するコサイクル $\{f_{ij}\} \in \mathbb{Z}^1(\{U_i, \mathcal{O}_S^*\})$ を与えたと。

$2K_S = 0$ かつ $f_{ij}^2 = g_i/g_j$ ($g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_S^*)$) と表せる。

$X \subset \mathbb{P}^2$

$$z_i^2 = g_i, \quad z_i/z_j = g_{ij} \text{ (張り合せ)}$$

で X が構成される。標数 2 かつ U_i 上の正則 1 形式 dg_i/g_i は X 上の正則 1 形式 η を引き起こし、

$$P \in X \text{ 特異点} \iff \eta(\pi(P)) = 0$$

である。generic かつ場合、 X は 12 個の node を持つ。

Coble 曲面の場合、 η は $B_1 + \dots + B_n$ に 1 の 2 極を持つ。

		Enriques	Coble
因子 (η)		$(\eta) = 2A$	$(\eta) = -(B_1 + \dots + B_n) + 2A$
孤立特異点	$A = \emptyset$	$\deg \langle \eta \rangle = 12$	$\deg \langle \eta \rangle + n = 12$
$\langle \eta \rangle$	$A \neq \emptyset$	$\deg \langle \eta \rangle = 4$	$\deg \langle \eta \rangle + n = 4$
X	$A = \emptyset$	有理 2 重点を持つ超特異 K3 曲面	
	$A \neq \emptyset$	唯一の楕円型特異点を持つ有理曲面	
$A \neq \emptyset$		非正則有理曲面	

A は conductrix と呼ばれる正因子で、 $A^2 = -2$ であり、成分は非特異有理曲線である (正交叉)。Coble 曲面の場合、

$$A \cap (B_1 + \dots + B_n) = \emptyset$$

である。

上の表の楕円型特異点を持つ場合は, Schröer [23] が存在と一意性を示した。松平雄也は具体的に構成を与えている。松平はさらに、有理2重点の詳細な研究も行っている。[10]参照。

Conductrix に關しては Ekedahl — Shepherd-Barron [6] が、 A の分岐 (Enriques 曲面の場合) まで与えている。彼らの目的は、正則ベクトル場を持つ古典的 Enriques 曲面の決定にあったが、

Coble 曲面の場合の Conductrix の研究は程 [12] が行った。

有限自同型群の分岐は、単純ルートで Vinberg の条件を満たす配置の分岐に帰着すること述べたが、

Conductrix の分岐が、有用である。

本講義の主結果が次の分岐表である。

存在証明 (例の構成) には、Rudakov — Shafarevich [22] のベクトル場による商曲面の理論を用いる。

Theorem $P=2$ Classification

Ex. 1

Type	Dual Graph of (-2) -curves	Enriques	Coble
$\tilde{E}_8$		$10 \mathbb{P}^1$ 1-dim	$n=1$, $10 \mathbb{P}^1$ unique
$\tilde{E}_7 + \tilde{A}_1^{(1)}$		$11 \mathbb{P}^1$ 2-dim	$n=1$ $11 \mathbb{P}^1$ 1-dim
$\tilde{E}_7 + \tilde{A}_1^{(2)}$		$11 \mathbb{P}^1$ 1-dim	$n=2$ $10 \mathbb{P}^1 + 1$ unique
$\tilde{E}_6 + \tilde{A}_2$		$13 \mathbb{P}^1$ 1-dim	$n=1$ $13 \mathbb{P}^1$ unique
			$n=3$ $10 \mathbb{P}^1 + 3$ unique
$\tilde{D}_8$		$10 \mathbb{P}^1$ 2-dim	$n=1$ $10 \mathbb{P}^1$ 1-dim
$\tilde{D}_4 + \tilde{D}_4$		$11 \mathbb{P}^1$ 2-dim	
VII		$20 \mathbb{P}^1$ 1-dim	$n=2$ $15 \mathbb{P}^1 + 5 = 20$ unique
			$n=10$ $5 \mathbb{P}^1 + 15 = 20$ unique
VIII		$16 \mathbb{P}^1$ 1-dim	$n=4$ $10 \mathbb{P}^1 + 6 = 16$ unique

Ex. 2

Katsura - K - Martin [13]
(2020)

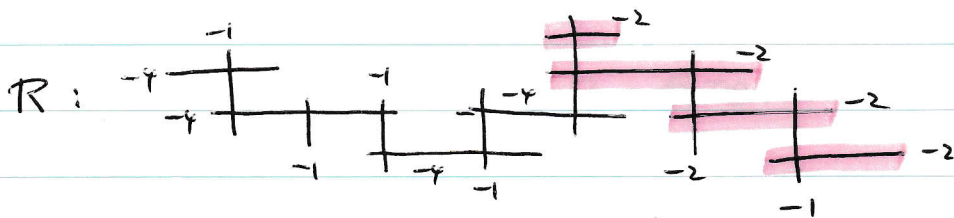
Katsura - Kondō [12]
(2021)

以下で例を2つ述べる。一つは $A \neq \emptyset$, もう一つは $A = \emptyset$ の場合である。

Example 1: $\tilde{E}_8$ 型 ([11], [12]参照)

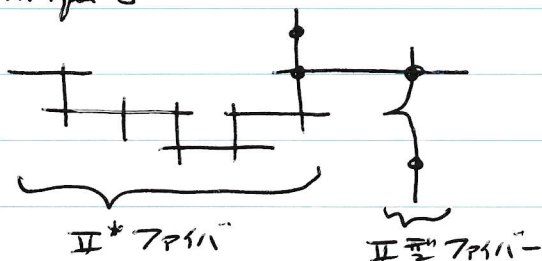
Conductrix は $A = \begin{array}{ccccccccccc} & 2 & 3 & 0 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$ である。

Enriques 曲面 S , Coble 曲面 V の構成には $\mathbb{C}^0$ -カル数 14 の有理曲面 R が用いられる:

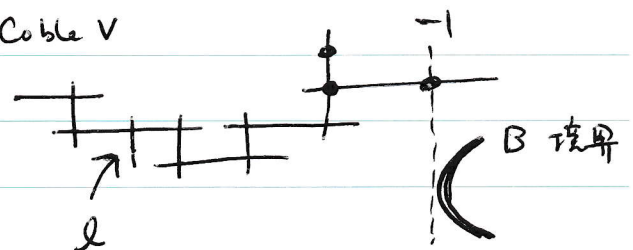


赤い 4 つの (-2) -曲線は Contract したものが S の標準被覆, 3 つは Contract した残り一つが境界成分に対応するものが V のそれである。

Enriques S



Coble V



R は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ のブロー-ア-ブと見て得られる。また $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \ni (x, y)$ 上のベクトル場

$$D = \frac{1}{x^3 y^2} \left[x^4 y^2 \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + a x^4 y^4 + y^4) \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

($a \in k, a \neq 0 \dots$ Enriques, $a = 0 \dots$ Coble)

を考へる。 D の孤立特異点 ($\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ の共通零点) を解消すると

R と R 上の孤立特異点を持つた $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ が得られる。

Cubic 曲面 V のえは. (1)-曲線 から 4 直線に. (B と ℓ を除いて)
 (2)-曲線 Σ 7D-ダウンして $\mathbb{P}^2$ に到達する. ℓ の像は.
 直線, B の像は, 有理曲線である. 同様に ℓ, B で
 (2) 表わす. 座標変換によって. ℓ と B の交点 P は

$$P = (0:0:1), \quad \ell = \{x=0\}$$

としよう. P を通る直線は ℓ を除き全て B と一点で
 4重に交わっていることから, B の有理性から定う.

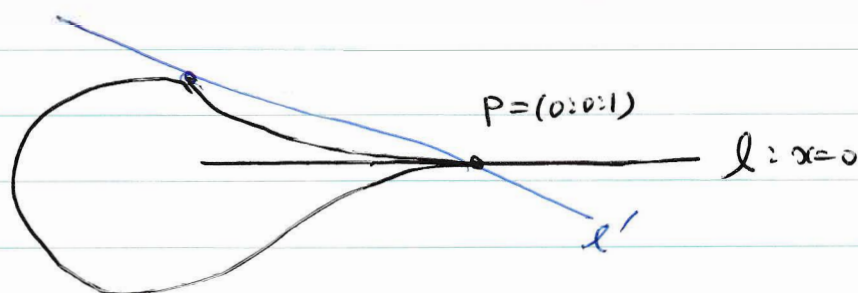
直接計算によって

$$B: y^6 + x^5y + x^2z^4 = 0$$

でよいことが分かる. 射影変換

$$(x:y:z) \rightarrow (x:\zeta y:\zeta^5 z) \quad (\zeta^5 = 1)$$

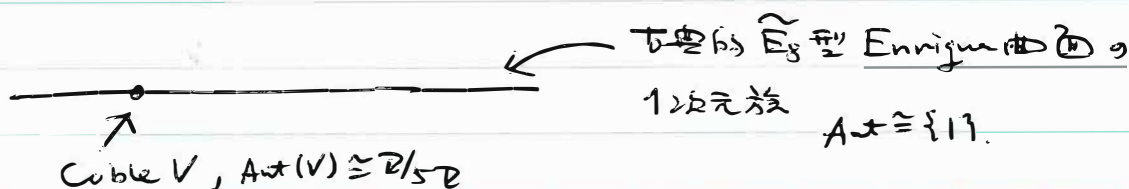
は B を保ち. V の自己同型を引き起こす.



V は $\mathbb{P}^1$ ファイバーを持つ quasi-elliptic fibration の構造を
 持つ. 6次曲線の pencil

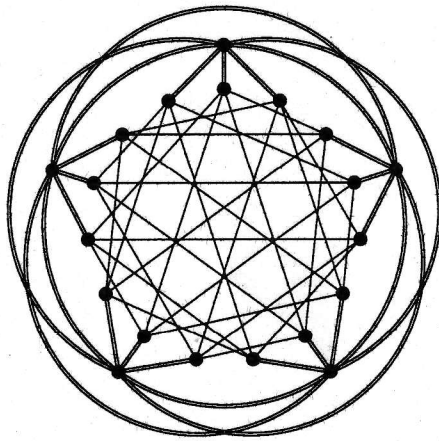
$$\left\{ s x^6 + t (y^6 + x^5 y + x^2 z^4) \right\}_{(s:t) \in \mathbb{P}^1}$$

から引き起こされるものである.



Example 2: VII₂ Enriques, Coble 曲面 ([13], [3]参照)

この曲面は丁度 20 個の単位ルートを持ち、下図の双対グラフを



持っている。 $\text{Aut} \cong G_5 \times \mathbb{Z}_2$

2つの軌道から成るが、

一つは 5 個の単位ルートが
二重線と四に持つ完全グラフ、

残りは Petersen 図形、の

双対に相当するグラフである。

まず、 $P \neq 2$ の場合を考へる。このとき $P \neq 3, 5$ ならば

Enriques 曲面が、 $P=3, 5$ のとき Coble 曲面が現れる。

どちらも unique である。この例は、Fano [7] が最初に

発見し、筆者 [14] が再考察した。構成は易しく行われた。

その後 大橋 [19] が次の構成方法を与えた：

$$\mathbb{P}^4 \supset X: \sum x_i x_j = \sum \frac{1}{x_i x_j}$$

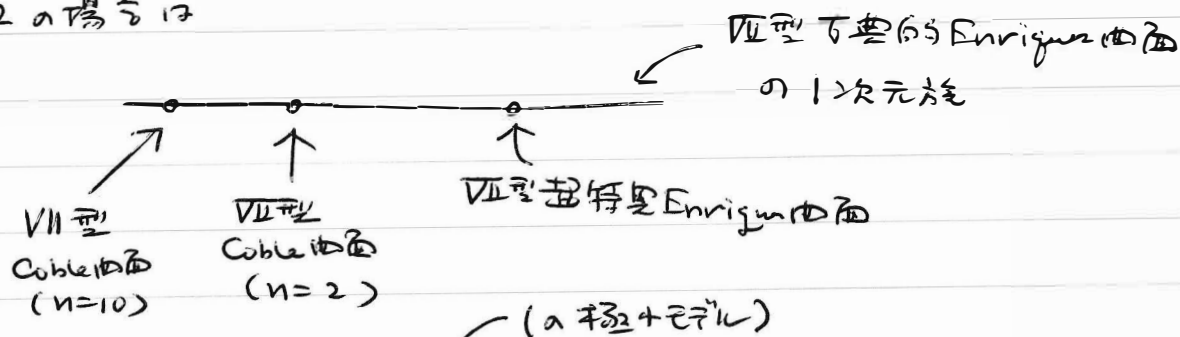
$$\sigma: (x_i) \rightarrow (1/x_i)$$

とすると、 $S = X / \langle \sigma \rangle$ で与えられる。 $P \neq 3, 5$ のとき σ は

固定点を持たず、 $P=3, 5$ の場合、固定点を持ち、

高 $X / \langle \sigma \rangle$ の特異点解消が Coble 曲面である。

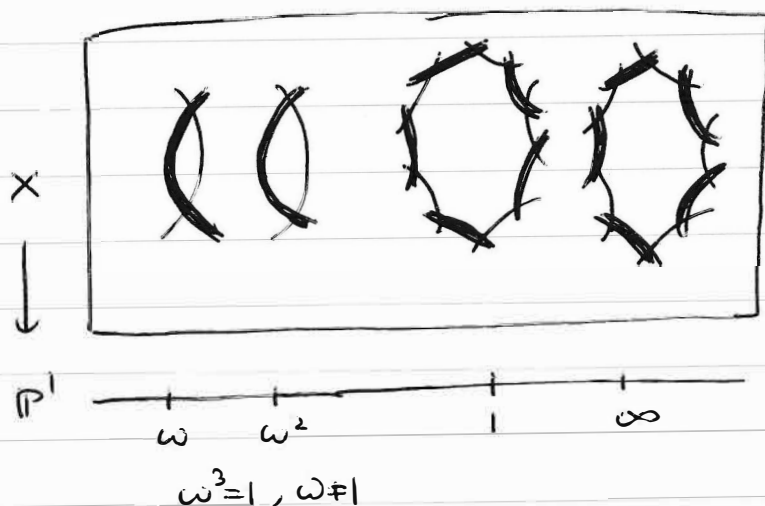
$P=2$ の場合は



が分岐点である。標準被覆は全て同型で Artin 不変量 1 の超特異 K3 曲面 X で、 $(12-n)$ 個の A_1 型特異点を持たせたものが標準被覆である。 X は

$$y^2 + t^2 xy + y = x^3 + x^2 + t^2$$

の n 極+εリルであり、10個の切断を持つ楕円曲面である:



図の 12 個の P^1 を contract し T_2 もの n Enriques 曲面の標準被覆、左の 2 個 (右の 10 個) を残して contract し T_2 もの $n=2$ ($n=10$) の Coble 曲面の標準被覆である。ベクトル場は

$$D = \frac{1}{t+1} \left[(t+1)(t+\alpha)(t+\beta) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1+t^2x}{t+1} \frac{\partial}{\partial x} \right] \quad \text{と与えられる}$$

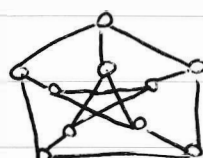
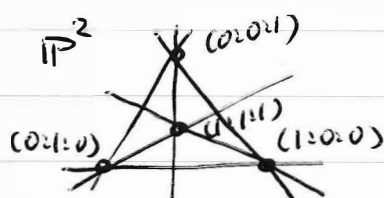
$\alpha, \beta \in k, \alpha + \beta = \alpha\beta, \alpha^3 \neq 1, \alpha \neq 0$ --- 超特異 Enriques

" $\alpha = 0$ --- 超特異 "

$\alpha^3 = 1, \alpha \neq 1$ --- $n=2$ Coble と $n=10$

" $\alpha = 1$ --- $n=10$ "

最後に、 $n=2, 10$ の VII 型 Coble 曲面の $\mathbb{P}^2$ の $\Gamma(D-P_0, \Gamma^0)$ 12 因子構成と与える。 $\mathbb{P}^2$ の 4 点 $\Gamma(D-P_0, \Gamma^0)$ は 5 次 del Pezzo 曲面である



= Petersen 図形

del Pezzo 上の 10 本の直線の
双対図形

$p=2$ の特殊性として、2 次の
非特異有理曲面の存在が全鍵となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1: x^2 + yz = 0 \\ K_2: y^2 + zx = 0 \\ K_3: z^2 + xy = 0 \\ K_4: xy + yz + zx = 0 \\ K_5: x + y + z = 0 \end{array} \right.$$

$K_1, \dots, K_5$ は全て 2 点

$$Q(\omega) = (1: \omega: \omega^2), \quad \omega^3 = 1, \quad \omega \neq 1$$

を通っている。

5 次 del Pezzo の 10 本の直線の交点 (15 点) で $\Gamma(D-P_0, \Gamma^0)$ 因子として

$n=10$ の Coble 曲面 V_{10} が得られる。10 本の直線の引き戻し
が 10 個の境界成分に他ならない。20 個の単純ループは

5 個の (-2) -曲線 ($K_1, \dots, K_5$ の引き戻し) と 15 個の

$2E + \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2$ 型の単純ループから成る。ここで

E は 15 個の例外曲線の一つである。

注意 $k=\mathbb{C}$ のときは、 V_{10} の $B_1 + \dots + B_{10}$ で分岐する 2 重被覆は

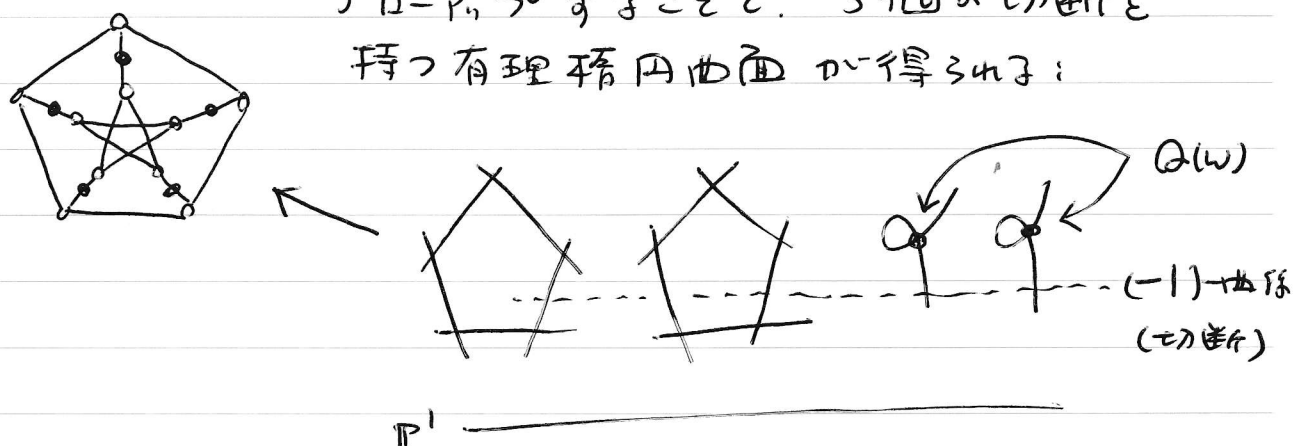
Vinberg [25] が研究した、超幾何格子 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ の K3 曲面である。

この K3 曲面の自己同型は無限群であるが、Vinberg が生成元と
与えている。これは、5 個の Cremona 変換から引き起こされて

いることを向井が指摘した。この場合、単純ループ $K_1, \dots, K_5$ は

effective である。その代りに Cremona 変換が現われ
無限群となるのが、カラクリである。

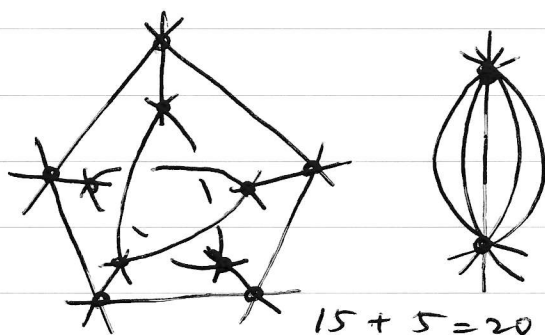
次に $M=2$ の Coble 曲面の構成と述べる。Peterson 図形の
5 個の五角形の組を考え、組同士の 5 個の交点で
ブローアップすること。5 個の切断を
持つ有理曲面が得られる：



この曲面は I_5 型ファイバー 2 個の他に、 I_1 型ファイバー 2 つ
を持つが、これらの特異点は、五角形の頂点の方
に依らず $Q(W)$ である。この 2 点 $Q(W)$ をブローアップ
すること $M=2$ の Coble 曲面が得られる。20 個の
単純ルートは 15 個の P^1 ($\star + \star + K_1, \dots, K_5$) と、5 本の切断
から作られる 5 個の単純ルートから成る。

ちなみに、 $P=2$ の VII 型 Enriques 曲面の 20 個の
 P^1 の図を書いて終りとする。([11] 参照)

$P=2$
VII 型
Enriques
上の
20 本の P^1



12 個の交点上で 12 個の
 A_1 特異点が現われる。
もちろん左と右の曲線は
VII 型図形の通りに
交わっている。

参考文献

- [1] E. Bombieri, D. Mumford, *Enriques' classification of surfaces in char. p* , III, Invent. math., **35** (1976), 197–232.
- [2] A. Coble, *The ten nodes of the rational sextic and of the Cayley symmetroid*, Amer. J. Math., **41** (1919), 243–265.
- [3] I. Dolgachev, S. Kondō, *Enriques surfaces II*. <http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/EnriquesTwo.pdf>.
- [4] I. Dolgachev, S. Kondō, *The rationality of the moduli spaces of Coble surfaces and of nodal Enriques surfaces*, Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya **77**, No.3 (2013), 77–92.
- [5] I. Dolgachev, De-Qi Zhang, *Coble rational surfaces*, Amer. J. Math., **123** (2001), 79–114.
- [6] T. Ekedahl, N. Shepherd-Barron, *On exceptional Enriques surfaces*. math/0405510.
- [7] G. Fano, *Superficie algebriche di genere zero bigenere uno e loro casi particolari*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **29** (1910), 98–118.
- [8] E. Horikawa, *On the periods of Enriques surfaces, I*, Math. Ann. **234** (1978), 73–108.
- [9] E. Horikawa, *On the periods of Enriques surfaces, II*, Math. Ann. **235** (1978), 217–246.
- [10] L. Illusie, *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **12** (1979), 501–661.
- [11] T. Katsura and S. Kondō, *On Enriques surfaces in characteristic 2 with a finite group of automorphisms*, J. Algebraic Geometry **27** (2018), 173–202.
- [12] T. Katsura, S. Kondō, *Coble surfaces in characteristic two*, arxiv:2107.14537.
- [13] T. Katsura, S. Kondō, G. Martin, *Classification of Enriques surfaces with finite automorphism group in characteristic 2*, Algebraic Geometry **7** (2020), 390–459.
- [14] S. Kondō, *Enriques surfaces with finite automorphism groups*, Japan. J. Math., **12** (1986), 191–282.
- [15] S. Kondō, *Coble surfaces with finite automorphism group*, to appear in Rend. Circ. Mat. Palermo; arxiv:2102.00591.
- [16] C. Liedtke, *Arithmetic moduli and lifting of Enriques surfaces*, J. reine angew. Math. **706** (2015), 35–65.
- [17] G. Martin, *Enriques surfaces with finite automorphism group in positive characteristic*, Algebraic Geometry **6** (2019), 592–649.
- [18] Y. Matsumoto, *Canonical coverings of Enriques surfaces in characteristic 2*, arXiv:1812.06914v1.

- [19] S. Mukai, H. Ohashi, *Finite groups of automorphisms of Enriques surfaces and the Mathieu group M_{12}* , arXiv:1410.7535, 2014.
- [20] S. Mukai, H. Ohashi, *Automorphisms of two rational surfaces in characteristic 3*, in preparation.
- [21] V. Nikulin, *On a description of the automorphism groups of Enriques surfaces*, Soviet Math. Dokl., **30** (1984), 282–285.
- [22] A. Rudakov, I. Shafarevich, *Inseparable morphisms of algebraic surfaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math., **40** (1976), 1269–1307.
- [23] S. Schröer, *Enriques surfaces with normal K3-like coverings*, J. Math. Soc. Japan **73** (2021), 433–496.
- [24] E. B. Vinberg, *Some arithmetic discrete groups in Lobachevskii spaces*, in "Discrete subgroups of Lie groups and applications to Moduli", Tata-Oxford (1975), 323–348.
- [25] E. Vinberg, *The two most algebraic K3-surfaces*, Math Ann. **26** (1983), 1–21.