

Tree上の探索問題

富山大学経済学部経営学科 菊田健作 (Kensaku Kikuta)

1. はじめに

探索状況の一つのモデルとして n 個の箱（あるいは領域）の一つに入っている静止目標物を見つけるにいたるまでの期待総費用を最小化する問題が考えられる。本稿では、さらに、(i)切り替え費用を考慮し、(ii)探索者の出発位置が特定されており、かつ(iii)見逃し確率を考慮しない、ような場合について、ミニマックス解を求めることである。本報告で扱うモデルは、リニア・グラフ上の同様なモデルを一般化したものである。

2. モデル

$n+1$ 個の点 (vertex) があり、0から n まで番号 (label) がついている。 $V = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ を点集合という。 E は V の二つの点 i, j の組 (i, j) からなる集合である。 E の元を辺 (edge) といい、 E を辺集合という。 E は $\{(i, j) : i, j \in V\}$ の部分集合である。 $G = (V, E)$ を(無向)グラフという。点 i_0 と i_s とを結ぶ道 (path) とは、順序のついた $(s+1)$ 個の V の点の組 $\pi = (i_0, i_1, \dots, i_s)$ であって、 $(i_{r-1}, i_r) \in E$ がすべての $r = 1, \dots, s$ について成り立つものである。道 π は点 i_0 と i_s を結ぶという。 i_0 を π の始点、 i_s を終点という。始点と終点とが同じであるような道を閉路という。すべての点が異なる道を単純な道という。 V の任意の二元 i, j に対し、 i と j とを結ぶ道があるとき、 G は連結であるという。

本報告では、 G は根つき木、つまり、連結でかつ閉路を含まず、点0が根であるとする。 V の二元 i, j ($i \neq j$) に対し、点0と j とを結ぶ道があつて i がこの道の成分であるとき、 i は j の先祖であるという。このとき、 j は i の子孫であるという。さらに、 $(i, j) \in E$ ならば、 i は j の子であるという。 $i \in V$ に対し、 N_i を i の子孫全体の集合、 $V_i = \{i\} \cup N_i$ 、 $N = N_0$ とおく。 N の任意の元 j に対し、 $(i, j) \in E$ なる i がただ一つある。これを $\alpha(j)$ と表わす。 $e(j) = (\alpha(j), j)$ とおく。 N の部分集合 V' に対し、 $e(V') = \{e(j) : j \in V'\}$ とおく。 $G_i = (V_i, e(N_i))$ は i を根とする木とみなすことができる。これを i を根とする G の部分木という。 V の部分集合 V' に対し、 V' が V_i に含まれると仮定する。 (V'', E') を i を根とする G の部分木であつて、 V'' は $V' \cup \{i\}$ を含むようなものとする。 (V'', E') を V' に関する i を根とする G の部分木という。 V' に関する i を根とする G の部分木のうち、辺の数が最小のものを極小な V' に関する i を根とする G の部分木という。

各辺 $(i, j) \in E$ に対し, 正数 $d(i, j)$ が対応する. $d(i, j) = d(j, i)$ と仮定する. 道 π に対し, π のすべての辺に関する $d(i, j)$ の和を π の長さという. $(i, j) \notin E$ のとき $d(i, j)$ は i と j とを結ぶ単純な道の長さを表わすものとする.

次に, グラフ $G = (V, E)$ 上の探索問題について述べる. 点 $1, \dots, n$ のどれか一つに静止目標物がある. 探索者 (以後, S と略称) は点 0 から出発して, 辺上を移動しつつ, 点の一つずつ調べていく. 見逃し確率はどの点についても 0 である. 点 i ($i = 1, \dots, n$) を調べる費用は $c(i)$ (≥ 0) ($i = 1, \dots, n$) である. $(i, j) \in E$ のとき, 点 i から j への移動費用は $d(i, j)$ (> 0) であるとする. S は目標物を発見するまでの費用が, ある意味で小さくなるように, 調べる順序を決定せねばならない.

本稿では, S が事前確率を計算できないとする. S は最悪の場合を想定し, その場合の総費用が最小になるような戦略を選ぶかも知れない. 目標物も意志を持つと想定して, S と目標物の双方がゼロ和ゲームを行なう. このとき, 目標物を $hider$ (以後, H と略称) ということにする. S は, ゲームの均衡点に対応する戦略を求めるとする立場をとる.

S の (純粋) 戦略は $N = V \setminus \{0\} = \{1, \dots, n\}$ 上の置換で表すことが出来る. N 上の置換 σ に対し, S は $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ の順に探索するとする. N 上の置換全体の集合を Σ で表す. σ に対し, σ と逆の順の探索を行なわせる置換を $r\sigma$ で表す. すなわち,

$$(2.1) \quad (r\sigma)(i) = \sigma(n-i+1), \quad i = 1, \dots, n.$$

H が点 i にいて, S が戦略 $\sigma \in \Sigma$ をとるならば, H を発見するまでの費用は, $k = \sigma^{-1}(i)$ において,

$$(2.2) \quad f(i, \sigma) = d(\sigma(0), \sigma(1)) + \dots + d(\sigma(k-1), \sigma(k)) + c(\sigma(1)) + \dots + c(\sigma(k))$$

となる. ここに, $\sigma(0) = 0$. 2人ゼロ和ゲーム $(f; N, \Sigma)$ の混合拡大を $\Gamma = (f; P, Q)$ と表わす. 各点 $i \in N$ に対し, $w(i) = 2d(\alpha(i), i) + c(i)$ とおく. N の部分集合 V' に対し, 記号 $p(V') = \sum_{i \in N} p(i)$, $c(V') = \sum_{i \in N} c(i)$, $w(V') = \sum_{i \in N} w(i)$ と定義する.

3. 最適戦略とその性質

点 0 の子点を $i_1, \dots, i_t$ ($t \geq 1$) とする. $p^* \in P$ を次のように定義する.

$$(3.1) \quad p^*(\alpha(i))/c(\alpha(i)) = p^*(V_i)/w(V_i), \quad \alpha(i) \neq 0.$$

$$(3.2) \quad p^*(V_{ix})/w(V_{ix}) = p^*(V_{iy})/w(V_{iy}), \quad x, y = 1, \dots, t.$$

(3.1), (3.2) および $p^*(N) = 1$ はただ一つの P の元を決定する.

Σ の元で, E の各辺をただか2回しか通らないような順序を指定するもの全体の集合を Σ_{DE} とおく.

$\sigma \in \Sigma_{DE}$ に対し, σ と $r\sigma$ とを $1/2$ ずつで混合するような戦略を σ^* と表わす.

定理 1. ゲーム $\Gamma = (I; P, Q)$ の値は, $v(\Gamma) = vw(N)/2 + \sum_{i \in N} p^*(i)c(i)/2$. p^* は H の唯一の最適戦略, 任意の $\sigma \in \Sigma_{DE}$ に対し, σ^* は S の最適戦略である.

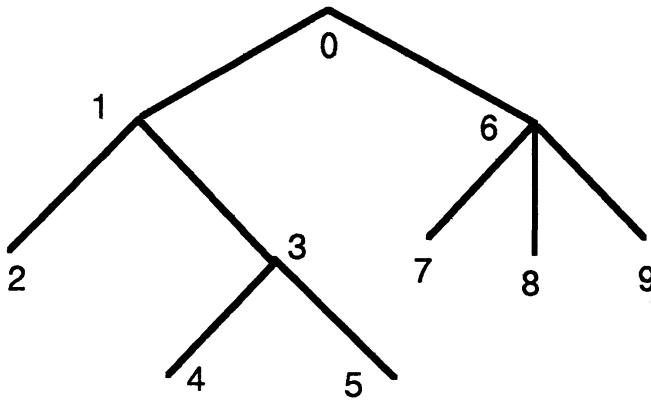
性質 2. $p^*(\alpha(i))/c(\alpha(i)) < p^*(i)/c(i)$, $\alpha(i) \in N$.

性質 3. V' が V_i の部分集合とする. (V'', E') を極小な V' に関する i を根とする G の部分木であるとする.

$$p^*(V')/p^*(V_i) \leq [w(V') + 2d(e(V'' - V'))]/w(V_i), \quad \text{if } i \in V',$$

$$p^*(V')/p^*(N_i) \leq [w(V') + 2d(e(V'' - (V' \cup \{i\})))]/w(N_i), \quad \text{otherwise.}$$

例 4.



(3.1) と (3.2) により,

$$p^*(1)/c(1) = p^*(2)/w(2) = p^*(3, 4, 5)/w(3, 4, 5),$$

$$p^*(6)/c(6) = p^*(7)/w(7) = p^*(8)/w(8) = p^*(9)/w(9),$$

$$p^*(1, 2, 3, 4, 5)/w(1, 2, 3, 4, 5) = p^*(6, 7, 8, 9)/w(6, 7, 8, 9),$$

$$\text{かつ } p^*(3)/c(3) = p^*(4)/w(4) = p^*(5)/w(5).$$

これと $p^*(N) = 1$ より p^* を計算できる。

任意の $\sigma \in \Sigma$ に対し, V_{i_X} は $V_\sigma(i_X, 1), \dots, V_\sigma(i_X, r_X)$ に分割される。即ち, S はまず, $V_\sigma(i_X, 1)$ の元を調べる, 次に点 0 を通過して別の枝に行く, 点 0 を通過して V_{i_X} に戻ってきて $V_\sigma(i_X, 2)$ の元を調べる, 次に点 0 を通過して別の枝に行く, $\dots$ 次のような性質をもつ順序の全体を Σ_{PDE} で表わす: $x = 1, \dots, t$ と $y = 1, \dots, r_x$ とに対し, S は各 $i \in V_\sigma(i_X, y)$ を S が枝 G_{i_X} を y 回目に訪れて最初に通るときに調べる。また次のような性質をもつ順序の全体を Σ_{SDE} で表わす: $x = 1, \dots, t$ と $y = 1, \dots, r_x$ とに対し, $V_\sigma(i_X, y)$ は $V_\sigma(i_X, 1) \cup \dots \cup V_\sigma(i_X, y-1)$ の先祖を含まない。

補題 5. 任意の $\sigma \in \Sigma_{DE}$ と任意の $p \in P$ に対し, $f(p, \sigma^*) = v(\Gamma)$.

補題 6. 任意の $\sigma \in \Sigma_{DE}$ に対し, $f(p^*, \sigma) = v(\Gamma)$.

上の二つの補題より, 定理 1 において p^* が最適戦略であることを示すためには, " 任意の $\sigma \in \Sigma$ に対し, $f(p^*, \sigma) \geq v(\Gamma)$ " をいえばよい。後に続く補題はそのためのものである。補題 1-3 は p^* が唯一の最適戦略であることをしめす。

補題 7. (i) $i \in V_{i_X} (1 \leq x \leq t)$ とする。 $\sigma \in \Sigma$ のもとで, S は点 i を通り, N_{i_X} のいくつかの点を調べた後, 再び点 i に戻ってきたとする。この間, S が調べた点の集合を $Y (\subset N_{i_X})$, 通過した辺の集合を $X (\subset E_{i_X})$ とする。 Y は i の先祖を含まないと仮定する。このとき, $p^*(Y)/[w(Y) + 2d(X \setminus e(Y))] \leq p^*(i)/c(i)$.

(ii) i_1 と i_2 が 0 の子であるとする。 V' は V_{i_1} の部分集合, $y \in V_{i_2}$ とする。 (V'', E') を極小な V' に関する i_1 を根とする部分木とする。このとき, $p^*(V')/[w(V') + 2d(e(V'' \setminus V'))] \leq p^*(y)/c(y)$.

補題 8. $i \in N_{i_X} (1 \leq x \leq t)$ とする。 $\sigma \in \Sigma$ のもとで, S は点 i を通り, N_{i_X} のいくつかの点を調べた後, 再び点 i に戻ってきたとする。この間, S が調べた点の集合を $Y (\subset N_{i_X})$, 通過した辺の集合を $X (\subset E_{i_X})$ とする。 Y は i の先祖を含まないと仮定する。 S が Y を調べる直前に i を調べるように変えて得られる順序を σ' とする。このとき, $f(p^*, \sigma) \geq f(p^*, \sigma')$ が成立する。

補題 9. $\sigma \in \Sigma_{\text{PDE}}$ とする. $i, j \in V_{i_X}$ とする. $i \in V_\sigma(i_X, u)$ ($u \geq 2$), かつ $j \in V_\sigma(i_X, 1)$ とする. j は i の子であるとする. $\sigma'^{-1}(i) = \sigma'^{-1}(j) - 1$ であるように σ' を定義する. このとき, $f(p^*, \sigma) \geq f(p^*, \sigma')$ が成立する.

補題 8 と 9 により, 任意の $\sigma \in \Sigma_{\text{PDE}}$ に対し, $\sigma \# \in \Sigma_{\text{SDE}} \cap \Sigma_{\text{PDE}}$ が存在し, $f(p^*, \sigma) \geq f(p^*, \sigma \#)$ が成立することがわかる. すなわち, 補題 8 と 9 を必要なだけ使いながら, 順次調べる順序を変えていけばよい.

補題 10. $\sigma \in \Sigma_{\text{SDE}} \cap \Sigma_{\text{PDE}}$ とする. $i \in N$ かつ U は N_i の部分集合で, $U = \bigcup_{j \in K} V_j$, K は i の子の集合とする. $\sigma \in \Sigma$ のもとで, S は $\cdots i Z U W$ の順に調べるとする. S は $\sigma \in \Sigma$ のもとで U においてはただか 2 回しか各辺を通過しないと仮定する. $\sigma' \in \Sigma$ を S が $\cdots i U Z W$ の順に調べるような順序と定義する. このとき, $\sigma' \in \Sigma_{\text{SDE}} \cap \Sigma_{\text{PDE}}$ であり, $f(p^*, \sigma) \geq f(p^*, \sigma')$ が成立する.

補題 11. $\sigma \in \Sigma_{\text{SDE}} \cap \Sigma_{\text{PDE}}$ とする. $x(1), \dots, x(k)$ は V_{i_1} の元で, $V_\sigma(i_1, r_1)$ に属さないが, $V_\sigma(i_1, r_1)$ の点に隣接しているもの全体とする. $V_\sigma(i_1, r_1) = N'_{x(1)} \cup \cdots \cup N'_{x(k)}$ とする. ここに, 各 $N'_{x(u)}$ ($1 \leq u \leq k$) は $N_{x(u)}$ ($1 \leq u \leq k$) の部分集合である. S は $x(u)$ ($1 \leq u \leq k$) を調べた後すぐに $N'_{x(u)}$ ($1 \leq u \leq k$) を調べるように順序を変えてえられるものを $\sigma \#$ とする. このとき, $\sigma \# \in \Sigma_{\text{SDE}} \cap \Sigma_{\text{PDE}}$ であり, $f(p^*, \sigma) \geq f(p^*, \sigma \#)$ が成立する.

系 12. $\sigma \in \Sigma_{\text{SDE}} \cap \Sigma_{\text{PDE}}$ とする. $\sigma \# \in \Sigma_{\text{SDE}} \cap \Sigma_{\text{PDE}}$ であり, $f(p^*, \sigma) \geq f(p^*, \sigma \#)$ であるような $\sigma \#$ が存在する.

補題 13. もしも, $p \in P$ が最適であれば, $p = p^*$ である.

参考文献

- [1] Ahlswede, R. and Wegener, I.: Search Problems. John Wiley & Sons, Chichester, 1987.
esp. pp. 264-265.
- [2] Bellman, R.: Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.

- [3] Ferguson, T.: private communication, 1992.
- [4] Gal, S.: Search Games. Math. in Sci. and Eng., 149, Academic Press. 1980.
esp. pp. 17-33.
- [5] Gluss, B.: Approximately Optimal One-Dimensional Search Policies in Which Search
Costs Vary through Time. Nav. Res. Log. Quart. , 8 (1961), 277-283.
- [6] Kikuta, K.: A One-Dimensional Search with Traveling Cost. Journal of the Operations
Research Society of Japan 33 (1990). 262-276.
- [7] -----: A Search Game with Traveling Cost. Journal of the Operations Research
Society of Japan 34 (1991). 365-382.
- [8] ----- and Ruckle, W.: Initial Point Search on Weighted Trees. mimeo. 1992.
- [9] Lossner, U. and Wegener, I.: Discrete Sequential Search with Positive Switch Cost.
Mathematics of Operations Research 7 (1982), 426-440.
- [10] Nakai, T.: Tansaku Riron Tenbo (In Japanese) mimeo. 1986.
- [11] Naval Research Logistics., 38, No.4, 1991.
- [12] Ruckle, W.H.: Geometric Games and Their Applications. Pitman. Mass. 1983.
esp. pp. 148-155.
- [13] ----- : A Discrete Search Game. In Stochastic Games & Related Topics, Shapley Honor
Volume 1989, 27-40.
- [14] Townsend, M. : Discrete Mathematics: Applied Combinatorics And Graph Theory.
The Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Menlo Park, CA, 1987. esp. Ch.8.