

von Neumann 環の maximal abelian subalgebras
への normal ± 1 の projection の存在について

新端大理 富山 淳 (Jun Tomiyama)

M は von Neumann 環でヒルベルト空間 H に作用しているものとする. H 上の有界線形作用素の全体を $B(H)$ とかく. A は M の maximal abelian subalgebra (以下略して masa とかくことにする) とし M の元 x に対して $x \in A$ の unitary u の作用 $adu(x) = uxu^*$ であるものの σ -weakly closed な convex hull を $\overline{\text{co}}\{adu(x) \mid u \in A_u\}$ とかくことにすると, よく知られた Kakutani-Markov の不動点定理から $\overline{\text{co}}\{adu(x) \mid u \in A_u\}$ (以下略して $\overline{\text{co}}\{adu(x)\}$ とかくこともある) は不動点をもつ. よして A が masa をとつかう, この不動点は A に属する. 即ち任意の $x \in M$ について

$$\overline{\text{co}}\{adu(x) \mid u \in A_u\} \cap A \neq \emptyset.$$

このようにして M から A への ± 1 の projection e で $E(x)$ 以上の集合に属するものがあることは知られている. 又それは更に精密化して任意の有限個の $x_1, x_2, \dots, x_n$ に対し

て $y_i \in \overline{\text{cov}}\{\text{adu}(x_i)\} \cap A$ と指定して $\varepsilon(x_i) = y_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) とするよりにとることもできる。そこで今 A へ normal な projection が存在したとすると、 $\varepsilon(\overline{\text{cov}}\{\text{adu}(x)\}) = \varepsilon(z)$ とするから

$$\overline{\text{cov}}\{\text{adu}(x)\} \cap A = \{\varepsilon(x)\} \quad (-\text{点のみ})$$

となる。たとえば H が可分なとき $B(H)$ には discrete 型の masa と連続型の masa が存在するが $B(H)$ より前者の型の masa には normal な projection が存在する。このよる事柄は A の pure state の M 上への pure state extension の一意性に密接に関係している。もし A から M への pure state extension がすべて一意であれば、 M より A への normal の projection は唯一つしかないことになるが、多端上の共通部分は一点になる。又共通部分が一点とは限らない。 M の元 x が存在すれば M より A へは既に x を z とか x より 2 つ以上の projection が存在するから A の pure state の M 上への拡大は一意とは限らなくなる。実際、Kadison-Singer [1] はその先駆的な仕事で $B(H)$ の連続型の masa の pure state の pure state extension (実は state extension でもいい) は一意であることと示している。さらに $B(H)$ の discrete masa の pure state extension については、その上の normal な pure state の拡大は一意であるが singular な pure state の拡大に

ついでにはまだ未解決になっている。

さてここで先とするとこの場合は上の逆である。 $\overline{\text{cov}}\{\text{adual}\}$ と masa A との共通部分が常に一点のとき π はこの交点に射影させる projection が normal になるのではなからうかと考えたが ([3]) 解答が判明しなかった。

しかし問題は最近の次の Szücs の結果によって肯定的に (空間が可分なときには) 解決されることになる。

M を可分なヒルベルト空間上の von^n Neumann 環とする。

G を M 上の σ -weakly continuous な線形写像の有限群とし、更に次の条件 (*) をみたすとする。

(*) 任意の M の元 x について、 $\overline{\text{cov}}\{g(x) \mid g \in G\}$ は唯一つの不動点をもつ。

定理 (J. M. Szücs) 上の (*) の仮定の下で写像

$$E_G: x \in M \longrightarrow \text{不動点 } x^G$$

は σ -weakly に連続な有限群 projection である。また E_G は G の元の convex sum の列の σ -weak に極限としてかけらる。

2 つの von Neumann 環 M, N の同値な有限写像 (線形) τ は、任意の functional $\varphi \in M_*$ について $\tau(\varphi) \in M_*^+$ (singular な functional をつくる M^* の部分空間) となることを singular な写像と

おぼえてある。 τ が σ -weak 位相で連続というのは、これに
 おいて $\tau(N_*) \subset M_*$ ということであるから、singular な写像と
 いうのは単に σ -weakly に連続になるというばかりではなく、
 かつその連続性の“部分”を全然持つている写像をいえる。

さて H が可分で無限次元のとき $B(H)$ より連続型の masa への
 1ル41の projection はすべて singular なことはよく知られて
 いる。従って前述の Kadison-Singer の結果の連続型の masa
 についての部分は又次のようにも導かれる。即ち上の定理か
 らこのとき $\overline{\text{cov}}(\text{adu}(x)) \cap A$ が ∞ 以上に属する $B(H)$ の
~~元~~ x が必ず存在する。よって $B(H)$ より A への projection は必ず
 2つ以上存在するから pure state の拡大は一意では無い。こ
 の結論は実は任意の properly infinite な von Neumann 環 M に
 ついて意味をもつ。というのは、このように M の中には必ずそ
 の上への 1ル41の projection が singular になるような BUE
 の連続型に属するような masa が数多く存在するからである。

そしてこのような masa より M 上の pure state の pure
 state extension は一意では無い。([4] 参照)。

最後に定理の証明の鍵になる点を書いておく。

1° H の可分性は、 G に各点 σ -weak 収束で位相を入れると、
 G が可分になることに使われる。それは $G \in M_*$ に作用する平
 面群と見たものを G_* とすると、 H の可分性から M_* は 1ル41位相で

可分になることから G_* は各点 1 に 4 収束の位相で可分になる。従って G は前述の位相で可分になる。

2° ε_G が G からの可算列で近似できること。1° から G を可算な群と看做してもよいことになるので、 $G = \{g_1, g_2, g_3, \dots\}$ とかくと求める近似列は

$$\varepsilon_n = \frac{1}{n^n} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^n g^{i_1} g^{i_2} \dots g^{i_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で与えられる。ここで M の有界開球は σ -weak 位相で metrizable compact であるから、 $\varepsilon_n(x)$ が任意の元 x について x^G に σ -weak に収束することと示すには、任意の部分列 $\{\varepsilon_{n_k}(x)\}$ が x^G に収束する部分列を含むことを言えばよい。そこでこの部分列 $\{\varepsilon_{n_k}(x)\}$ は上の compact 性よりとにかくその極限が

$\overline{\text{cov}}(g(x))$ に入っている収束部分列をもつわけであるから、その極限が G の不動点であることと示せばよく、その証明に上の ε_n の形が利用される。 G の有界性もここで用いる。

3° ε_G が normal なこと。 $\varepsilon_n \in M_*$ に作用する写像と看做しても ε_{n_k} とかくと、 $x \in M$ について

$$(\varepsilon_{n_k} - \varepsilon_{m_k})(\varphi)(x) = \varphi((\varepsilon_n - \varepsilon_m)(x)) \rightarrow 0 \quad n, m \rightarrow \infty$$

よって $\{\varepsilon_{n_k}(\varphi)\}$ は M_* の weakly Cauchy 列である。 M_* は weakly sequentially complete であるから、 $\{\varepsilon_{n_k}\}$ の極限の写像 π が得られる。これから π は M_* の有界写像であり、 $\varepsilon = \pi$ は有界

τ normal な G -不動点の集合への projection になる。

参考文献

1. R. V. Kadison and I. M. Singer, *Extensions of pure states*, Amer. J. Math., 81 (1959), 383-400.
2. J. M. Szücs, *Some weak $*$ -ergodic theorems*, Acta Sci. Math., 45 (1983), 389-394.
3. J. Tomiyama, *Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras*, Mimeographic Note, 1970, Univ. Copenhagen.
4. J. Tomiyama, *On some types of maximal abelian subalgebras*, J. Functional Analysis, 10 (1972), 373-386.