

統計力学に於ける F e y n m a n 図形の自動処理 1

岡山理科大学 理学部 応用数学科

坂本 薫 (Kaoru Sakamoto)

情報処理センター

青江 俊夫 (Toshio Aoe)

序 論

量子電気力学の自動処理についての研究され、その計算も可能になっている。¹

私達は統計力学の物理常数を計算する時使用される F e y n m a n 図形から、温度 G r e e n (松原関数)によつて求める方法を自動処理化する為の研究をした。ここでは、電子、フォノンを対象に考えたが、超電導度現象を対象にしてはいない。F e y n m a n 図形の生成と波数ベクトルおよび角周波数の法定には、I n t e r l i s p でプログラムを作成したが、数式の計算には、数理解析研の R e d u c e 3 を使用した。この小論文では、主に自動処理の方法を提案し、計算例については、簡単なものに限定した。

統計力学に於ける F e y n m a n 図形の自動処理は図 1 の流れ図を実現する
とである。

ファインマンダイアグラムの自動化

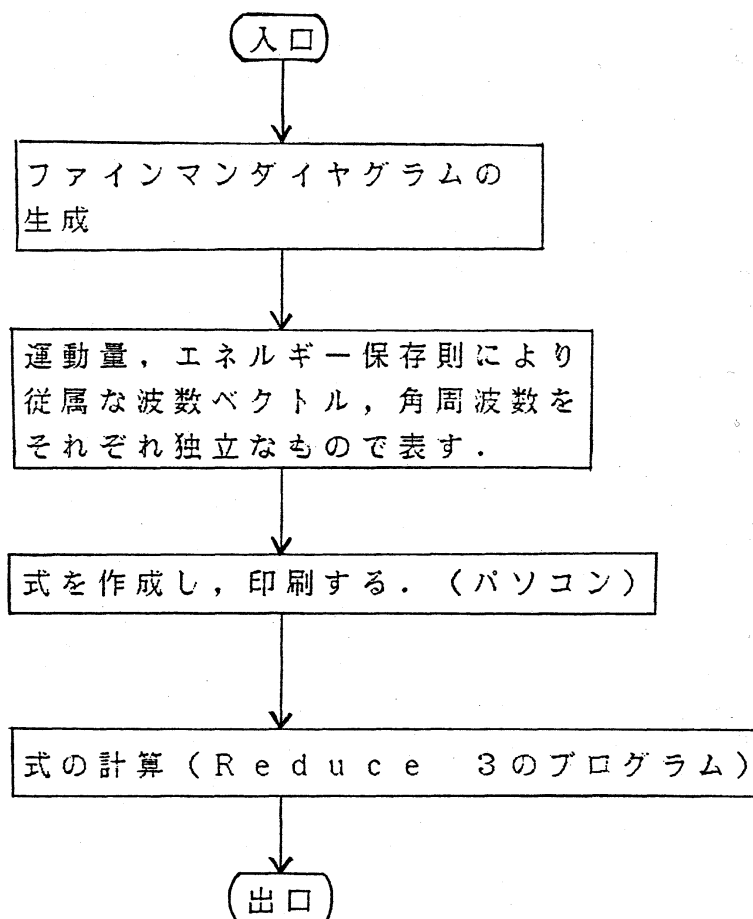


図 1

1. Feynman 図形の生成

Feynman 図形を作成するためには, Bloch-De Dominicis² 理を使用して可能なコントラクションをつくれればよい. ここでは, 量子電力学の Feynman 図形を生成するため使用されたグラフ理論に依って, トポロジ的に異なった図形を生成する方法を修正する³. 粒子間の相互作用を表す hamiltonian 演算子は, 図 2 のように, かかれる^{5,6,7,8}.

2. 波数ベクトルと角振動数の決定⁴

ベクトルは外線波数ベクトルと内線波数ベクトルの 2 種類がある. 2 のように波数ベクトルは, 左又は右バーテックスに入る又は出る. バーテックスに入る波数ベクトルをそのままのベクトルとし, 出るベクトルをマイナスの符号付けると運動量保存則に依って外線波数ベクトルの総和とすべての右又は左のバーテックスに於ける内線波数ベクトルの総和は零になる. 図 2 は従属な波数ベクトルを他の独立な波数ベクトルの線形結合で表す為の流れ図である. 電子とフォノンの波数ベクトルは同じように扱う.

角振動数は波数ベクトルと同じように, 対応する式で表す.

温度 Green 関数に対する Feynman 図形^{8,9}

1 外線とつながった 1 に依って生成したの n 次のすべての可能な Feynman 図形から，波状の線（フォノン線）には

$$D_q(i\nu_l) = |\alpha_q|^2 \left(\frac{1}{\omega_q + i\nu_l} + \frac{1}{\omega_q - i\nu_l} \right), \quad \nu_l = \frac{2\ell\pi}{\beta}$$

を対応させる．

2 そのような図形に

$$\frac{(-1)^n (-1)^{n_1}}{n! (2\beta V)^{n_c} (\beta V)^{n_p}}$$

の数係数を対応させる．但し， n_c はクローン相互作用を表す点線

の数，数 n_p はフォノン線の数，また n は摂動の次数で $n = n_c + 2n_p$

で与えられる． n_1 は電子線が閉じている図形の数である．

3 r, l の電子線に

$$g_r(i\omega_l) = (i\omega_l - \epsilon_r)^{-1}$$

を対応させ，また同時刻の点を結ぶ電子線には

$$(i\omega_l - \epsilon_r)^{-1} \exp(i\omega_l 0)$$

を対応させる．但し r は k_r を表す．

4 運動量，エネルギー保存則は，

図 2 のフローチャートのように満足されている．

5 内線の独立な波数と角周波数についての和をとる．

4. 式の計算

3で得られた，数式を計算する時，波数の大きさと角周波数とスピンについての和が現れる．それらの和は次のように等価な積分に置きかえる．^{8,9,10}

$$\sum_{\mathbf{k}\sigma} \rightarrow \frac{2V}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}$$

$$\frac{1}{\beta} \sum_m g(i\omega_m) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(z)}{e^{\beta z} + 1} dz$$

低温の近似として，絶対温度 $T=0$ の場合を考えると，次のように，和を積分に置きかえる．

$$\frac{1}{\beta} \sum_l \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx$$

得られた式は，簡単にするために，主要項のみ残し，他は捨てる．

これらの方法について個々に違うので，実際の例について考慮する．

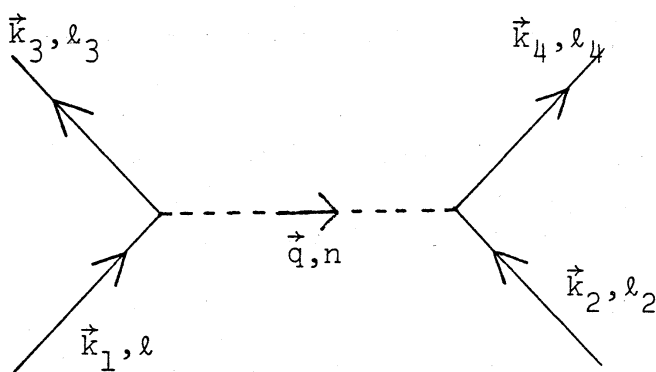


図 2

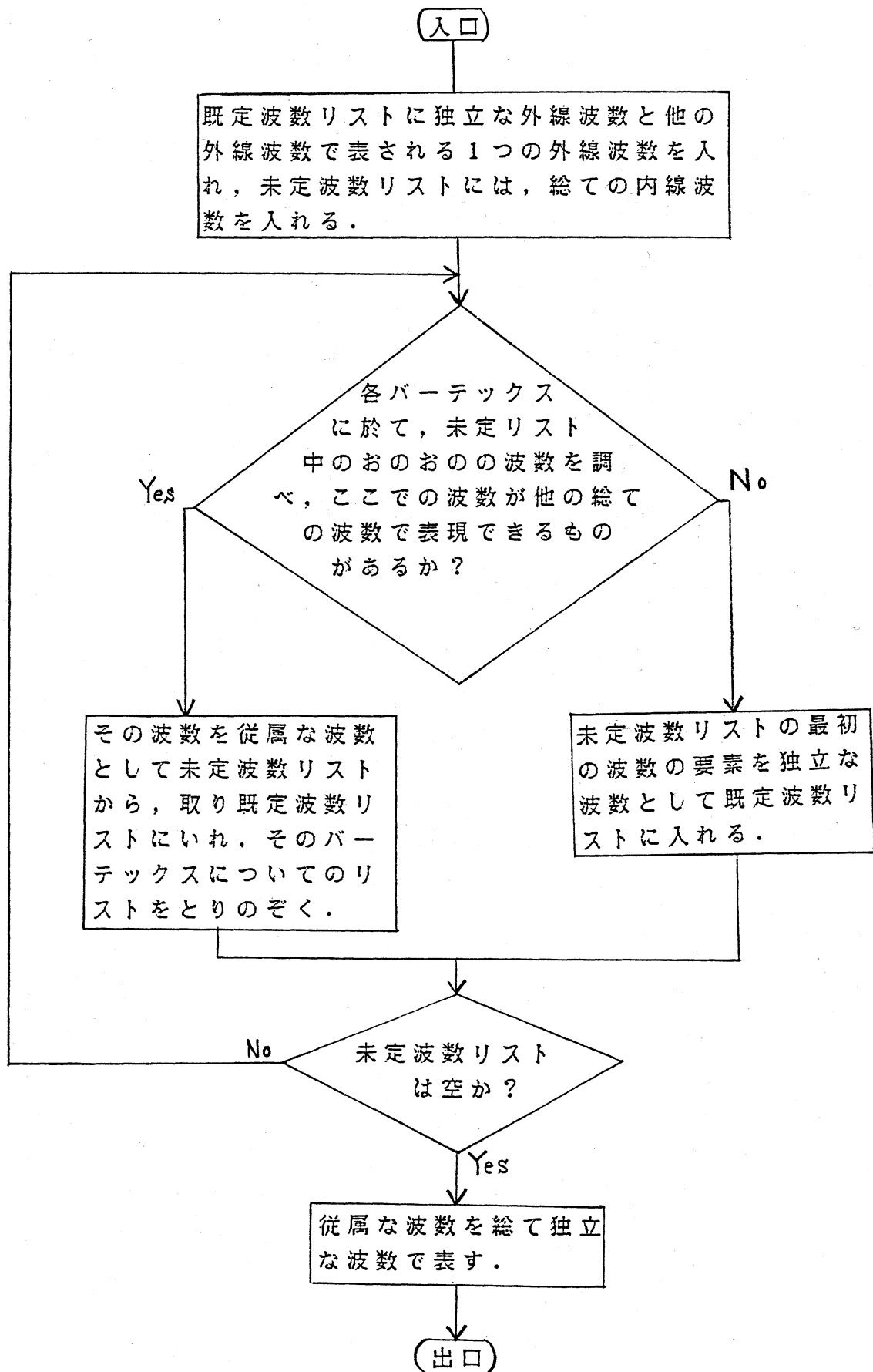


図 3

文献

1. A.C. Hearn ,REDUCE USER'S MANUAL Version 3.1(1984),The Rand Corporation
2. K.Sakamoto and Aoe,J. of Pro. vol 4 no.2 p 89-90(1981)
3. T.Sasaki, Automatic Generation of Feynman Graphs in QED,J.Comp.Phys. 22.2(1976)P189-214
4. 坂本薫, 青江俊夫, ファインマン グイヤグラムから数式への変換プログラムの作成, 情報処理学会第28会(昭和 59年前期) 6 H-7, P159-161
5. 高野文彦, 多体問題(1975), 培風館
6. Fetter and Walecke. Quantum Theory of Many Particle Systems(1971) McGraw-Hill
8. 阿部龍蔵, 統計力学, 東大出版会
9. Richard D. Mattuck A Guid to Feynman Diagrams in the Many-body Problem (Second edition) (1976). McGraw-Hill
10. 一松信, 留数解析(数学ワンポイント双書28), 共立出版