

Indeterminacy sets of rational maps and dimension of the invariant sets

Tomoko Shinohara¹

Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology

E-mail address: shinohara@s.metro-cit.ac.jp

篠原 知子

東京都立産業技術高等専門学校

1. Introduction.

この報告では、複素 n 次元射影空間 $\mathbf{P}^n$ 上の有理写像 F の固定的不定点 p における局所的な力学系構造の考察を行う。特に blow up を使って、 p において F により不変な集合 V を構成する。

第 2 章では、記号と用語を準備し、これまでに得られた複素 2 次元射影空間 $\mathbf{P}^2$ 上の結果を紹介する。第 3 章では、2 次元の結果を $\mathbf{P}^n$ のある開集合上の有理型写像 F で不定点集合 I の次元が正の場合に拡張する。特に、ある条件を満たす有理写像 F に対し、 I を含み、 F により不変な曲面 V が存在することを示すと同時に、不定点集合の次元と、不変集合の次元の間の関係の予想を述べる。

2. 2 次元の場合のまとめ

この章では記号と用語を用意し、これまでに得られた 2 次元の場合の結果を紹介する。詳しくは [3] を参照して欲しい。

$f_i(x_1, x_2, x_3) (i = 0, 1, 2)$ を次数 d の斉次多項式、 $F : [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [f_0 : f_1 : f_2]$ を $\mathbf{P}^2$ 上の有理写像、 $G : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (f_0, f_1, f_2)$ を $\mathbf{C}^3$ 上の多項式写像とする。このとき、 $\tilde{\pi} \circ G = F \circ \tilde{\pi}$ が $\mathbf{C}^3$ からある解析的集合を除いたところで成立する。ここで、 $\tilde{\pi} : \mathbf{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbf{P}^2$ は標準的射影とする。 $G(\tilde{p}) = (0, 0, 0)$ がある点 $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ に対して成り立つとき、点 $p \in \mathbf{P}^2$ は F の不定点であるという。一般に、 p が不定点であるとき、 $\cap_{N_p} \overline{F(N_p \setminus \{p\})}$ は一点にならないことに注意する。ただし N_p は p の任意の開集合とする。不定点 p が $p \in \cap_{N_p} \overline{F(N_p \setminus \{p\})}$ を満たすとき固定的不定点とよぶことにする。固定的不定点は連続写像の不動点の定義を拡張したものである。特に、 p の任意の近傍 N_p に対し、 $F(N_p \setminus \{p\}) \cap N_p \neq \emptyset$ が成り立つことから、固定的不定点においては、不動点と同様に局所的な力学系構造の存在が期待できる。[5],[6] では固定的不定点 p にある条件を与えるとき、点 p を通る 1 次元複素多様体 W_j で構成される、

¹ This research is supported by MEXT Grant-in-Aid for Young Scientists(B) No. 22740113.

点 p の局所安定多様体の族 $\{W_j\}_{j \in \{1,2\}^N}$ が存在することを示した. この集合族はコントロールブーケと呼ばれる. 2変数正則写像の場合, 鞍型不動点には1次元複素多様体である局所安定多様体と局所不安定多様体が1つずつ存在する. 一方, カントールブーケは, 有理写像の不定点に, 非加算無限個の局所安定多様体が存在するなど, より複雑な力学系構造を持っている.

この章では $\mathbf{P}^2$ の有理写像 $F : \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^2$ は点 $p = [0 : 0 : 1]$ を不定点に持つとする. $\mathbf{P}^2$ の部分集合 $\{[x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbf{P}^2 \mid x_3 \neq 0\}$ を

$$[x_1 : x_2 : x_3] \mapsto (x_1/x_3, x_2/x_3)$$

により, 今後局所座標近傍 $\mathbf{C}^2$ と同一視する. この座標で点 p は原点 $p = (0, 0)$ となることに注意する. $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}^1$ の部分集合 X_1 を次の様に定義する.

$$X_1 := \{(x_1, x_2) \times [l_1 : l_2] \in \mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}^1 \mid x_1 l_2 - x_2 l_1 = 0\}.$$

このとき, X_1 は次の2つの座標近傍系 $\{(U_1^j, \mu^j)\}_{j=1,2}$ により $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}^1$ の部分多様体となることが定義より直ちにわかる.

$$U_1^1 := \{(x_1, x_2) \times [l_1 : l_2] \in X_1 \mid l_1 \neq 0, x_2 = \frac{l_2}{l_1} x_1\},$$

$$\mu_1^1 : U_1^1 \rightarrow \mathbf{C}^2, (x_1, x_2) \times [l_1 : l_2] \mapsto (x_1, l_2/l_1),$$

$$U_1^2 := \{(x_1, x_2) \times [l_1 : l_2] \in X_1 \mid l_2 \neq 0, x_1 = \frac{l_1}{l_2} x_2\},$$

$$\mu_1^2 : U_1^2 \rightarrow \mathbf{C}^2, (x_1, x_2) \times [l_1 : l_2] \mapsto (l_1/l_2, x_2).$$

Definition 1. ([2]). 第一成分への射影 $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{C}^2$ の X_1 への制限を $\pi_1 : X_1 \rightarrow \mathbf{C}^2$ とする. この写像 π_1 を, $p = (0, 0)$ を中心とする $\mathbf{C}^2$ の blow up と定義する. また, X_1 の部分集合 $E_1 := \pi_1^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbf{P}^1$ を π_1 の除外曲線と呼ぶ.

ここで, $\pi_1 : X_1 \setminus E_1 \rightarrow \mathbf{C}^2 \setminus \{p\}$ は双正則写像であることに注意しておく.

固定的不定点における局所的な力学系構造の研究は, これまで [3], [4] などで行ってきた. ここでは, その結果を簡単に紹介する.

まず, 合成写像 $\tilde{F}_1 := F \circ \pi_1 : X_1 \rightarrow \mathbf{P}^2$ を定義し, $\tilde{F}_1$ が次の条件を満たすと仮定する.

$$(A.0) \begin{cases} \tilde{F}_1 \text{ は } E_1 \text{ の各点のある近傍上正則であり, } \tilde{F}_1^{-1}(p) \cap E_1 = \{p_1\} \text{ である.} \\ \text{点 } p_1 \text{ のある開近傍 } N_1 \text{ が存在し, } \tilde{F}_1 \text{ は } N_1 \text{ 上双正則写像となる.} \end{cases}$$

条件 (A.0) を仮定すると, 点 p は F の固定的不定点になることに注意する.

$N(E_1)$ を除外曲線 E_1 のある開近傍, $F_1 := \pi_1^{-1} \circ \tilde{F}_1 : N(E_1) \rightarrow X_1$, $\pi_2 : X_2 \rightarrow X_1$ を点 p_1 を中心とする X_1 の blow up, E_2 を X_2 の除外曲線, $\tilde{F}_2 := F_1 \circ \pi_2 : X_2 \rightarrow X_1$ とする. F が条件 (A.0) を満たすとき次の主張が成り立つ.

$$(A.1) \left\{ \begin{array}{l} (1) F_1 \text{ は } N(E_1) \text{ 上の有理型写像であり, 点 } p_1 \text{ は } F_1 \text{ の不定点である.} \\ (2) \tilde{F}_2|_{E_2} : E_2 \rightarrow E_1 \text{ は全単射であり, } p_2 := \tilde{F}_2^{-1}(p_1) \in E_2 \text{ とおく} \\ \text{ことができる. 更にこのとき, 点 } p_2 \text{ のある開近傍 } N_2 \text{ が存在し,} \\ \tilde{F}_2 \text{ は } N_2 \text{ 上双正則写像となる.} \end{array} \right.$$

この過程を帰納的に繰り返して, blow up $\pi_{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$ の列を定義することができ, 任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し, 点列 $\{p_n\}$ で $p_n \in X_n$ を満たすものを得ることができる.

議論を進めるために, 次の条件 (B) を更に仮定する.

$$(B) \text{ 任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対し } p_n \in U_n^1,$$

但し U_n^1 は X_1 の座標近傍 U_1^1 と同様に定義した, X_n の座標近傍とする. U_n^1 の座標を用いて, $p_n = (0, \alpha_n)$ とおく. 複素数列 $\{\alpha_n\}$ を用いて, 形式的べき級数

$$x_2 = \phi(x_1) := \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \cdots,$$

を定義する. この形式的べき級数 ϕ の収束半径 r が正のとき, ϕ のグラフを用いて

$$V := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid x_2 = \phi(x_1), |x_1| < r\}$$

を定義する. このとき, 次の結果を得る.

Theorem 3. ([3]). 点 p の十分小さい開近傍 N_p が存在し, 次が成り立つ.

$$p \in \overline{F(V \setminus \{p\})} \cap N_p \subset V.$$

Remark. V は F の条件により, 点 p の局所安定多様体や不安定多様体, 中心多様体などとなる.

3. n 次元の場合. n を 3 以上の自然数, k を自然数, $p := (0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$, 点 p のある開近傍を U ,

$$I := \{(x_1, \dots, x_n) \in U \mid x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$$

とおく. このとき, $\dim I = k$ である. これより先, F は $F: U \rightarrow \mathbf{P}^n$ の有理型写像で I を不定点集合に持つとする. 2次元の場合と同様に, $U \times \mathbf{P}^{n-k-1}$ の部分集合 X_1 を

$$X_1 := \{(x_1, \dots, x_n) \times [l_{k+1} : \dots : l_n] \in U \times \mathbf{P}^{n-k-1} \mid x_j l_i - x_i l_j = 0, k+1 \leq i, j \leq n\}$$

とおく. 第一成分への射影 $\pi_1: U \times \mathbf{P}^{n-k-1} \rightarrow U$ の X_1 への制限 $\pi_1: X_1 \rightarrow U$ を I に沿った U の blow up と定義する. $E_1 := \pi_1^{-1}(I)$ とおき, E_1 を π_1 の除外因子と呼ぶ. X_1 は $n-k-1$ 個の開集合による座標近傍系 $\{(U_1^j, \mu_1^j)\}_{j=k+1, \dots, n}$ により $U \times \mathbf{P}^{n-k-1}$ の部分多様体となることがわかる. ここでは, $j = k+1$ の定義を与える.

$$\begin{aligned} U_1^{k+1} &:= \{(x_1, \dots, x_n) \times [l_{k+1} : \dots : l_n] \in X_1 \mid l_{k+1} \neq 0\} \\ &= \left\{ x_j = \frac{l_j}{l_{k+1}} x_{k+1}, j = k+2, \dots, n \right\}, \end{aligned}$$

$$\mu_1^{k+1}: U_1^{k+1} \rightarrow \mathbf{C}^n, (x_1, \dots, x_n) \times [l_{k+1} : \dots : l_n] \mapsto \left(x_1, \dots, x_{k+1}, \frac{l_{k+2}}{l_{k+1}}, \dots, \frac{l_n}{l_{k+1}} \right).$$

この座標系を用いると π_1 は U_1^{k+1} 上, 次の様に表される.

$$\pi_1|_{U_1^{k+1}}: U_1^{k+1} \rightarrow U, (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_{k+1}, z_{k+2} z_{k+1}, \dots, z_n z_{k+1})$$

π_1 について次の性質が成り立つ.

Proposition.

- (1) $\pi_1: X_1 \setminus E_1 \rightarrow U \setminus I$ は双正則写像.
- (2) $E_1 = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \times [l_{k+1} : \dots : l_n] \in X_1\} \cong I_1 \times \mathbf{P}^{n-k-1}$, $\dim E_1 = n-1$.
- (3) $E_1 \cap U_1^{k+1} = \{(z_1, \dots, z_n) \in U_1^{k+1} \mid z_{k+1} = 0\}$.

また有理型写像 F と不定点集合 I に対して, 次の定理が成り立つことが知られている.

Theorem([1]). 任意の有理型写像 F と不定点集合 I に対し, ある自然数 m と blow up の列 $\pi_j: X_{j+1} \rightarrow X_j$ ($1 \leq j \leq m$) が存在し, $\tilde{F} := F \circ \pi_1 \circ \dots \circ \pi_m: X_{m+1} \rightarrow \mathbf{P}^n$ は regular 写像となる.

議論を簡単にするために, F は 1 回の blow up で不定性が解消するとする. 2次元の場合の条件 (A.0) を一般化して, ここで F に次の仮定 (B.0) をおく

$$(B.0) \left\{ \begin{array}{l} (1) \tilde{F}_1 := F \circ \pi_1 : X_1 \rightarrow \mathbf{P}^n \text{ は } E_1 \text{ の各点のある近傍上, 正則である.} \\ (2) \tilde{F}_1(E_1) \supset I. \\ (3) I_1 := \tilde{F}_1^{-1}(I) \text{ とおくと, } I_1 \text{ は } k \text{ 次元部分多様体である.} \\ (4) \text{ ある点 } p_1 \in I_1 \text{ が存在し } \tilde{F}_1(p_1) = p \text{ と } \pi_1(p_1) = p \text{ が成立する.} \\ \text{また } \tilde{F}_1 \text{ は } p_1 \text{ のある近傍上で双正則写像である.} \end{array} \right.$$

Remark. (B.0) の (4) より

$$p \in \bigcap_{N_p} \overline{F(N_p \setminus I)}, \text{ 但し, } N_p \text{ は } p \text{ の任意の開近傍,}$$

が成り立つので点 p は固定的不定点であることに注意する. (B.0) の (3), (4) は不定点集合 I の次元が正であることにより新たに必要になった条件である.

V が点 p において局所的に不変な集合であるとは, p のある近傍 N_p に対し, 次の条件 (*1) が成り立つこととする.

$$(*1) \quad p \in F(V) \cap N_p \subset V$$

除外因子 E_1 の次元が $n-1$ であることと $\dim I = k$ であることより次の予想を得た.

Conjecture. 適切な条件を F に与えると, 点 p において局所的に不変な $k+1$ 次元の複素多様体 V が存在する. 特に, 点 p のある近傍 N_p に対し, $p \in I \cap N_p \subset V$ が成り立つ.

これ以降は, この予想が成立する写像 F の例を2つ紹介する.

Example 1. 次の様な有理型写像 F を考える.

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1, x_2, x_3, \frac{x_4}{x_3} - \psi(x_1, x_2) \right).$$

但し, $\psi(x_1, x_2)$ は $(x_1, x_2) = (0, 0)$ の近傍での正則関数であり, $(0, 0)$ でのべき級数展開が

$$\psi(x_1, x_2) := \sum_{i,j \geq 0} \alpha_{ij} x_1^i x_2^j$$

であるとする. F は2次元の不定点集合 $I = \{(x_1, x_2, 0, 0)\}$ を持つ. また (B.0) の条件を満たしており, $p_1 = (0, 0, 0, 0) \in U_1^3$ である. さらに次が成立する.

$$\tilde{F}|_{U_1^3}(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4 - \psi(z_1, z_2)),$$

$$I_1 \cap U_1^3 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in U_1^3 \mid z_3 = 0, z_4 = \psi(z_1, z_2)\}.$$

このとき I_1 に沿った U_1^3 の blow up $\pi_2 : X_2 \rightarrow U_1^3$ を定義し, 2つの合成写像 $F_1 := \pi_1^{-1} \circ \tilde{F}_1$, $\tilde{F}_2 := F_1 \circ \pi_2$ を定義する. この $\tilde{F}_2$ に対し, $\tilde{F}_1$ のときと同様の条件 (B.1) が成り立つことを示すことができる. この手順を繰り返すことで帰納的に, 任意の自然数 $n \geq 2$ に対し, $\tilde{F}_n, I_n$ を定義することができ, 次が成り立つ.

$$\tilde{F}_n = id., \quad F_n = F_1, \quad I_n = I_1 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in U_1^3 \mid z_2 = 0, \quad z_4 = \psi(z_1, z_2)\}.$$

一方, この写像 F に対しては, $k = 2$ であるので Conjecture より 3 次元の複素多様体が存在することが期待される. そこで 3 変数の形式的べき級数

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) := \sum_{i,j,l \geq 0} a_{ijl} x_1^i x_2^j x_3^l$$

を用いて次の集合 V を定義する.

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_4 = \Phi(x_1, x_2, x_3)\}.$$

点 p のある開近傍 N_p に対して, $p \in I \cap N_p \subset V$ が成り立つとすると, 任意の自然数 $i, j \geq 0$ に対して

$$a_{ij0} = 0$$

が成り立つ. 更に V が (*1) の条件を満たすとする. このとき (B.0) の条件より, 点 p_1 のある開近傍 N_{p_1} が存在し

$$p_1 \in N_{p_1} \cap I_1 \subset \pi_1^{-1}(V) \cap U_1^3 \cap E_1$$

が成り立たなくてはならない. これから任意の $i, j \geq 1$ に対して

$$a_{ij1} = \alpha_{ij}$$

を得る. この手順を帰納的に繰り返すことで, 任意の自然数 $i, j, l \geq 1$ に対し

$$a_{ijl} = \alpha_{ij}$$

が成り立つことがわかる. 以上より Φ は次の形であることがわかる.

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j,l \geq 1} \alpha_{ij} x_1^i x_2^j x_3^l.$$

特に Φ の収束域が存在することから, (*1) を満たすような点 p で局所的に不変な 3 次元の集合 V が存在することがわかる.

Example 2. 次の様な有理型写像 F を考える.

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1, x_2, \frac{x_3}{x_2} - \psi_3(x_1), \frac{x_4}{x_2} - \psi_4(x_1) \right).$$

但し, $\psi_3(x_1), \psi_4(x_1)$ は $x_1 = 0$ の近傍での正則関数であり, べき級数展開は

$$\psi_3(x_1) := \sum_{i \geq 0} \alpha_i x_1^i, \quad \psi_4(x_1) := \sum_{i \geq 0} \beta_i x_1^i$$

であるとする. この写像 F は 1 次元の不定点集合 $I = \{(x_1, 0, 0, 0)\}$ を持つ. また $(B.0)$ の条件を満たしている.

$$\tilde{F}|_{U_1^2}(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2, z_3 - \psi_3(z_1), z_4 - \psi_4(z_1)),$$

$$I_1 \cap U_1^2 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in U_1^2 \mid z_2 = 0, z_3 = \psi_3(z_1), z_4 = \psi_4(z_1)\}.$$

このとき I_1 に沿った U_1^2 の blow up $\pi_2 : X_2 \rightarrow U_1^2$ を定義し, 2つの合成写像 $F_1 := \pi_1^{-1} \circ \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 := F_1 \circ \pi_2$ を定義する. この $\tilde{F}_2$ に対し, $\tilde{F}_1$ のときと同様の条件 $(B.1)$ が成り立つことを示すことができる. 更にこの手順を繰り返すことで帰納的に $\tilde{F}_n, I_n$ を定義することができる. 特に任意の $n \geq 2$ に対し

$$\tilde{F}_n = id., F_n = F_1, I_n = I_1 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in U_1^2 \mid z_2 = 0, z_3 = \psi_3(z_1), z_4 = \psi_4(z_1)\}.$$

が成り立つ. 一方, 2つの 2 変数の形式的べき級数

$$\Phi_3(x_1, x_2) := \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x_1^i x_2^j, \quad \Phi_4(x_1, x_2) := \sum_{ij} b_{ij} x_1^i x_2^j$$

を用いて次の集合 V を定義する.

$$V := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid x_3 = \Phi_3(x_1, x_2), x_4 = \Phi_4(x_1, x_2)\}.$$

点 p のある開近傍 N_p に対して, $p \in I \cap N_p \subset V$ が成り立つとすると, 任意の自然数 $i \geq 0$ に対して

$$a_{i0} = 0, \quad b_{i0} = 0$$

が成り立つ. 更に V が $(*1)$ の条件を満たすとする. このとき, 点 p_1 のある近傍 N_{p_1} が存在し

$$p_1 \in N_{p_1} \cap I_1 \subset \pi_1^{-1}(V) \cap U_1^2 \cap E_1$$

が成り立たなくてはならない. これから任意の $i \geq 1$ に対して

$$a_{i1} = \alpha_i, \quad b_{i1} = \beta_i$$

が成り立つ. この手順を帰納的に繰り返すことで, 任意の自然数 $i, j \geq 1$ に対し

$$a_{ij} = \alpha_i, \quad b_{ij} = \beta_i$$

を得る. 以上より Φ_3, Φ_4 は次の形であることがわかる.

$$\Phi_3(x_1, x_2) = \sum_{i,j \geq 1} \alpha_i x_1^i x_2^j, \quad \Phi_4(x_1, x_2) = \sum_{i,j \geq 1} \beta_i x_1^i x_2^j$$

特に Φ_3, Φ_4 の収束域が存在するので, (*1) を満たすような点 p で局所的に不変な 2 次元の集合 V が存在することがわかる.

今後は, これらの例を元に, Conjecture が成立する十分条件を定式化していきたい.

References

- [1] J. Harris, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, (1992).
- [2] I. R. Shafarevic, *Basic Algebraic Geometry Vols I and II*, Springer-Verlag, Berlin, (1994).
- [3] T. Shinohara, *Another construction of a Cantor bouquet at a fixed indeterminate point*, Kyoto J. Math. 50 (2010), no.1, 205–224.
- [4] T. Shinohara, *Maximal local invariant set in a neighborhood of a fixed indeterminate point*, submitting.
- [5] Y. Yamagishi, *Cantor bouquet of holomorphic stable manifolds for a periodic indeterminate point*, Nonlinearity, 14 (2001), 113–120.
- [6] Y. Yamagishi, *On the local convergence of Newton's method*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 55 (2003), 897–908.