

氏 名	石 井 利 昌
学位(専攻分野)	博 士 (情 報 学)
学 位 記 番 号	情 博 第 9 号
学位授与の日付	平成 12 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	情 報 学 研 究 科 数 理 工 学 専 攻
学位論文題目	Studies on Multigraph Connectivity Augmentation Problems (多重グラフにおける連結度増大問題に関する研究)

論文調査委員	(主 査) 教 授 茨 木 俊 秀	教 授 上 林 彌 彦	教 授 福 嶋 雅 夫
--------	----------------------	-------------	-------------

論 文 内 容 の 要 旨

グラフの連結度増大問題とは、与えられたグラフにいくつかの辺を新たに加えることによってその辺連結度あるいは点連結度を指定された目標の値に増大させ、このとき加える辺の本数を最小にする問題である。ここで、辺連結度（点連結度）とは、グラフを非連結にするために取り除くべき辺の数（点の数）の最小値である。これはグラフに関する基本的な問題の一つであり、応用上、ネットワークの設計問題や、データセキュリティ問題等に関連して研究されてきた。これまで、辺連結度あるいは点連結度のどちらか一方のみを増大させる問題については、様々な報告がなされているが、現実社会における適用を考えた場合、両連結度を同時に扱うことが必要とされる場合が数多くみられる。この観点から、本論文では、両連結度を同時に最適増大させる問題の定式化を行い、この問題を多項式時間で解くためのアルゴリズムの存在をはじめて示している。

第1章は本論文の序論であって、グラフの連結度増大問題の応用面での背景を紹介したあと、連結度増大問題とその周辺の問題に関する従来の研究成果を紹介し、本論文で取り組む辺連結度と点連結度を同時に増大させる問題の定式化およびその意義について説明している。

第2章では、本論文で扱う用語および記号の定義を行ったあと、辺連結度と点連結度を統合させた解析を行い、後の章でのアルゴリズムの構築のために必要となる定理を与えている。特に、連結度を扱う問題を解くのに便利な道具としてよく知られている辺分離操作に関して、従来より柔軟な操作が行えることを示している。また、連結度増大問題の解の最適性の基準として重要な解の下界値に関しても、両連結度を統合させた理論式を導き出している。

第3章では、辺連結度の要求が各2点間毎に非負整数で与えられたときに、この辺連結度の要求を満たし、かつグラフ全体が2-点連結になるように増大させる問題に関して、多項式時間アルゴリズムを与えている。また、辺連結度の要求が全ての2点間で一定の場合には、このアルゴリズムをさらに高速化している。また、多重に辺を加えることを禁止するという制約条件を加えた場合においても、辺連結度が定数で抑えられる場合には、この問題が多項式時間で解けることを示している。

第4章では、辺連結度の要求として任意の非負整数 h が与えられたとき、任意の2-点連結グラフを h -辺連結かつ3-点連結にする問題の考察を行っている。この問題では、第2章で示された解の下界値と問題の最適値が必ずしも等しくならず、与えられた解の最適性がそのままでは結論づけられない場合が存在するが、この場合は最適値が $2h-3$ 以下であることを証明している。この解析により、 h を固定した場合、問題が多項式時間で厳密に解けることを示している。さらに、ある点集合内にのみ端点を持つ最適解が存在することを示すことで、このアルゴリズムの高速化を行っている。

第5章では、辺連結度の要求として任意の非負整数 h が与えられたとき、任意のグラフを h -辺連結かつ3-点連結にする問題の考察を行っている。すなわち、第3章のアルゴリズムと第4章のアルゴリズムを組み合わせることにより、多項式時間アルゴリズムの構築を目指している。しかし単純に適用するだけでは、最適解を得ることはできない。そこで、第2章で示された解の下界値を考慮することで最適性を保存しながら、第3、4章の2つのアルゴリズムを適用し、 h を固定した場

合、問題が多項式時間で解けることを示している。

第6章では、辺連結度と点連結度の要求としてそれぞれ任意の非負整数 h と k が与えられたとき、任意の $(k-1)$ -点連結グラフを h -辺連結かつ k -点連結に同時に増大させる問題の考察を行っている。 $h=k$ のとき、この問題は点連結度のみを増大させる問題となるが、 $k \geq 5$ の場合多項式時間で解けるかどうかいまだに未解決である。ここでは、最適値との誤差が $\min\{h+1, 2k\}$ 以下である解を出力する多項式時間近似アルゴリズムの存在を示している。また、このアルゴリズムは、点連結度増大問題に対するアルゴリズムとしても、辺の増大方法の選択肢が従来より増えたという意味で、より柔軟な操作を行えるアルゴリズムになっている。

第7章では、以上の結果をまとめ、研究を総括し、今後の研究課題について述べている。

論文審査の結果の要旨

本論文は、無向多重グラフにおける連結度増大問題を解く多項式時間アルゴリズムの構築を目的として行った研究をまとめたものであり、グラフの辺連結度と点連結度を同時に増大させる問題の定式化、グラフ理論的にはかなり異なる概念である辺連結度と点連結度を統合させた連結度の解析、および4つの特別な場合について両連結度を増大させる問題を解く多項式時間アルゴリズムの構築を含んでいる。得られた主な結果は次の通りである。

1. 全ての2点間毎に非負整数の辺連結度の要求が与えられたとき、任意に与えられたグラフを、辺連結度の要求を満たし、かつグラフ全体が2-点連結になるように最適増大させる問題を解く多項式時間アルゴリズムを構築した。さらに、多重に辺を加えることを禁止するという制約条件を加えても、辺連結度が定数で抑えられる場合には、多項式時間で解けることを示した。

2. 固定された非負整数 h が辺連結度の要求として与えられたとき、任意のグラフを h -辺連結かつ3-点連結に同時に最適増大させる問題を解く多項式時間アルゴリズムを構築した。特に、入力グラフが2-点連結の場合、ある特別な点集合間のみみ端点を持つ最適解が存在することを示し、この性質に基づいてアルゴリズムの高速化を行った。

3. 非負整数 h と k がそれぞれ辺連結度と点連結度の要求として与えられたとき、任意の $(k-1)$ -点連結グラフを h -辺連結かつ k -点連結に同時に増大させる問題に対して、最適解との誤差が $\min\{h+1, 2k\}$ 以下である解を出力する多項式時間近似アルゴリズムを構築した。なお、この手法は、未解決な部分が多く残されている古典的な点連結度増大問題に対する新しい手法にもなっている。

以上、本論文は、辺連結度と点連結度を統合させた解析、および両連結度を同時に増大させる問題を解く効率的な手法の提案を行ったものであり、学術上実際上寄与するところが少なくない。よって、本論文は博士（情報学）の学位論文として価値あるものと認める。

また、平成12年1月31日実施した論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。