

# 有限単純群の素数グラフ

熊本大学・自然科学 八牧宏美 (Hiroyoshi Yamaki)<sup>†</sup>

Dept. of Math., Kumamoto Univ.

$G$  を有限群とする.  $G$  の位数を割り切る素数の集合  $\pi(G)$  を頂点集合、相異なる 2 頂点  $p, r$  は位数  $pr$  の巡回群が存在するときに辺で結んで出来るグラフを  $G$  の素数グラフと呼び  $\Gamma(G)$  で表す.  $\Gamma(G) = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cdots \cup \Delta_m$ 、ただし  $\Delta_i$  は連結成分とし  $\Delta_i$  の頂点集合を  $\pi_i$  とする.  $G$  が偶数位数のときは  $2 \in \pi_1$  とする. もっとも基本的な結果の一つは Williams と Suzuki による次の定理である.

**定理 1.**  $G$  を有限単純群とすると  $\Delta_i (i \geq 2)$  は完全グラフとなる.

定理 1 は定理 2 の系である.

**定理 2.**  $G$  を有限単純群とすると孤立巾零ホール  $\pi_i$ -部分群 ( $i \geq 2$ ) が存在する.

Williams は有限単純群の分類を用いてこの定理を証明したが、Suzuki によって分類を用いない証明が与えられた. Suzuki の証明の後半部分は Chigir  によってかなり改良された. 定理 2 の「巾零」は有限単純群の分類を応用すれば「可換」とすることが出来る. すぐに気が付く問題は

**問題.**  $G$  を有限単純群とするとき  $\Delta_1$  が完全グラフとなる  $G$  を分類せよ. すなわち、全ての連結成分が完全グラフとなる有限単純群を分類せよ.

最近 Lucido-Moghaddamfar はこの問題を分類定理を用いて解決した. Atlas より

**補題 1.** 散在群で  $\Delta_1$  が完全グラフとなるものは  $M_{11}, M_{22}, J_1, J_2, J_3, HS$ .

交代群  $A_n$  に対しては  $n \geq p \geq n/2$  となる素数  $p$  が  $n \geq 60$  となると 6 個以上存在することから

**補題 2.** 交代群  $A_n$  で  $\Delta_1$  が完全グラフとなるものは  $n = 5, 6, 7, 9, 12, 13$ .

ここでは  $A$  型の単純群について Lucido-Moghaddamfar に沿って述べたい.  $G = A_n(q) = L_{n+1}(q)$  とする.  $|G| = \prod_{i=1}^n q^{n(n+1)/2} (q^{i+1} - 1) d^{-1}$  である. ただし  $d = (n+1, q-1)$  である.  $G$  の極大トーラスを  $T$  とすれば

$$|T| = \prod_{i=1}^k (q^{s_i} - 1)$$

ただし  $\{s_1, s_2, \dots, s_k\}$  は  $n+1$  の分割である. 整数  $x$  の素因数の集合を  $\pi(x)$  で、 $G$  の元の位数の集合を  $\pi_e(G)$  であらわす. つぎの Zsigmondy の補題が重要である.

<sup>†</sup>Supported in part by Grant-in-Aid for Scientific Research (C; No.14540034), Japan Society for the Promotion of Science.

補題 3.  $q, n$  を自然数で  $q \geq 2, n \geq 3$  かつ  $(q, n) \neq (2, 6)$  とする. このとき  $\pi(q^n - 1)$  の元  $q_n$  で  $q_n \notin \pi(q^j - 1)$  ( $2 \leq j \leq n-1$ ) となるものが存在する.

$n \geq 5$  のとき.  $\Gamma(G)$  が非連結となるのは次の場合である. ただし  $p$  は 5 以上の素数.  $\pi_1$  は次の通りである.  $q$  が偶数ならば,  $A_{p-1}(q), p \geq 5, \pi_1 = \pi(2 \prod_{i=1}^{p-1} (q^i - 1))$  あるいは  $A_p(q), (q-1)|(p+1), \pi_1 = \pi(2(q^{p+1} - 1) \prod_{i=1}^{p-1} (q^i - 1))$ .  $q$  が奇数ならば,  $A_{p-1}(q), \pi_1 = \pi(q \prod_{i=1}^{p-1} (q^i - 1))$  あるいは  $A_p(q), (q-1)|(p+1), \pi_1 = \pi(q(q^{p+1} - 1) \prod_{i=1}^{p-1} (q^i - 1))$ .  $q_t$  を Zsigmondy の補題の性質を満たす  $q^t - 1$  を割る素数とする.  $q_{n-1}, q_{n-2} \in \pi_1$  となる.  $(q, n) \neq (2, 7), (2, 8)$  とする.  $\Delta_1$  は完全グラフなので  $q_{n-1}q_{n-2} \in \pi_e(G)$  のはずである.  $x$  を位数が  $q_{n-1}q_{n-2}$  となる  $G$  の元とすれば  $x$  を含む極大トーラスが存在する. しかし  $n \geq 5$  ならば  $(n-1) + (n-2) \geq n+2$  である. 従って  $x$  を含む極大トーラスが存在しない.  $(q, n) = (2, 7), (2, 8)$  のときはそれぞれ  $31, 17 \in \pi_1, 73, 127 \in \pi_1$  となって  $\Delta_1$  は完全グラフとはならない.

$n = 4$  のとき.  $q_4, q_3 \in \pi_1$  であるが  $q_4q_3 \notin \pi_e(G)$ . 従って  $\Delta_1$  は完全グラフではない.

$n = 3$  のとき.  $q_4 \in \pi_1$  である.  $b \in L_4(p^f), o(b) = q_4$  とする.  $a \in L_4(p^f), o(a) = p, ab = ba$  とすると,  $\pi(\langle b \rangle) \subseteq \pi(SL_2(q))$ . これは  $o(b) = q_4$  に矛盾する. 従って  $p$  と  $q_4$  は辺で結ばれない. すなわち  $\Delta_1$  は完全グラフではない.

$n = 2$  のとき.  $\pi_e(G)$  の極大元の集合を  $\mu(G)$  であらわす.  $d = (3, q-1), q = p^f$  とする.  $p$  が奇素数のとき,

$$\mu(L_3(q)) = \{q-1, p(q-1)/3, (q^2-1)/3, (q^2+q+1)/3\}, \quad d=3$$

$$\mu(L_3(q)) = \{p(q-1), q^2-1, q^2+q+1\}, \quad d=1.$$

$p=2, n>2$  のとき,

$$\mu(L_3(q)) = \{4, q-1, 2(q-1)/3, (q^2-1)/3, q^2+q+1\}/3, \quad d=3$$

$$\mu(L_3(q)) = \{4, 2(q-1), q^2-1, q^2+q+1\}, \quad d=1.$$

$q$  を奇数とする.  $\pi_1 = \pi(q) \cup \pi(q+1) \cup \pi(q^2-1)$  より  $p \in \pi_1$ . 任意の  $r \in \pi(q+1), r \neq 2$  に対して  $r$  は  $p$  と結ばれない. 従って  $\Delta_1$  が完全グラフとなるには  $\pi(q+1) = \{2\}$  となる必要十分である. すなわち  $L_3(q), q = 2^k - 1$  である.  $q = 2^k$  とする. 任意の  $r \in \pi(2^k+1)$  に対して  $r$  は 2 とは結ばれない. 従って  $L_3(4)$  に限る.

$n = 1$  のとき.  $q$  が偶数ならば  $\pi_1 = \{2\}$ .  $q$  を奇数とする.  $\pi_1 = \pi(q-1)$  または  $\pi_1 = \pi(q+1)$  となるので  $\Delta_1$  は完全グラフである.

$G = B_n(q) = P\Omega_{2n+1}(q), n \geq 3$  のときは極大トーラスの位数が

$$\prod_{i=1}^k (q^{r_i} - 1) \prod_{j=1}^m (q^{s_j} + 1).$$

ただし  $\{r_1, r_2, \dots, r_k, s_1, s_2, \dots, s_m\}$  は  $n$  の分割となることに注意すればよい.

他の型の群も同様にして半単純極大トーラスに注目し補題 3 を用いることによって処理出来る. Lucido-Moghaddamfar の主定理は

定理 3.  $\Delta_1$  が完全グラフとなる有限単純群は  $A_5, A_6, A_7, A_9, A_{12}, A_{13}, L_2(q), q > 3, L_3(q),$   
 $q$ : Mersenne 素数,  $L_3(4), Sz(2^{2m+1}), S_4(q), G_2(3^k), U_3(q), q$ : Fermat 素数,  $S_6(2), U_4(2),$   
 $U_4(3), U_6(2), O_8^+(2), {}^3D_4(2), M_{11}, M_{22}, J_1, J_2, J_3, HS.$

この定理は有限群  $G$  の元の位数の集合  $\pi_e(G)$  から  $G$  を決定するとき、あるいは  $G$  が可  
 解群となるか否かを判定するとき、に応用できる。