

$S^2 \times \cdots \times S^2$ の 対称度 について

新場大 理

渡部 剛

可微分多様体 M 上に可微分的かつ根効果的に作用するコンパクト連結半単純リー群の最大次元を M の半単純対称度という。次の定理を証明する。

定理 A M を単連結 $2m$ 次元可微分多様体で 2 次元球面 S^2 の直積 $S^2 \times \cdots \times S^2$ (m 個) を中へ写像度 1 の連続写像をもつとする。このとき M に可微分的かつ根効果的に作用し得るコンパクト連結半単純リー群は $SU(2)$ または $SO(3)$ である。

定理 B M を定理 A と同じ、 M_0 を単連結可微分多様体で有理的ホモロジー球面となる。このとき連結和 $M \# M_0$ の半単純対称度は 0 である。

以上の結果は連続作用についてのもなりたつ。よってコンパクトリー群の作用は連続作用でさえも根効果的とする。多様体は作用相多様体と意味する。

1. Leray スペクトル系列

G をコンパクト連結 π -群, X をコンパクト連結位相空間とし G が X に作用しているとする. $\pi: X \rightarrow X/G = X^*$ を軌道写像, $\{E_r^{p,q}, d_r\} \in \pi$ の Leray スペクトル系列とする. 定義により $E_2^{p,q} = H^p(X^*, H^q(\pi))$ であり $H^q(\pi)$ は X^* 上の π -層 $U^* \mapsto H^q(\pi(U^*; \mathbb{Q}))$ (U^* は X^* の open 集合) によって生成される層である. 特異に $E_2^{0,q}$ は $H^q(\pi)$ の section の $\mathbb{Q}$ -加群である. 知られてゐる本系に $H^q(\pi)$ の $x^* = \pi(x)$ における stalk は $H^q(G(x); \mathbb{Q})$ edge homomorphism $e: H^q(x; \mathbb{Q}) \rightarrow E_2^{0,q}$ により $e(a)(x^*) = i^*(a)$, $i: G(x) \rightarrow X$ によって与えられる. 詳細は [1] を参照.

次に命題が得られる.

命題 1 ([3]) (G, X) に対して同じである. R を主理想の次数とし, 特異軌道の存在を仮定すれば edge homomorphism $e: H^R(x; \mathbb{Q}) \rightarrow E_2^{0,R}$ は同型である. 特に $E_2^{0,R} = 0$.

証明. 最初の断片は slice の存在と X の連結性よりである. 後半は $e: H^R(x; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{surj.}} E_2^{0,R} \xrightarrow{\text{inj.}} E_2^{0,R}$ と分解出来ることにより明らかである. ■

この命題より次の各命題が示される.

命題 2. M を $2m$ 次元多様体とし

$$\exists w_1, \dots, w_m \in H^2(M; \mathbb{Q}); \quad w_1 \vee \dots \vee w_m \neq 0$$

と仮定する. $SU(2)$ が M に主軌道 $SU(2)/T$ (T は 1-パラス) をもって作用すれば特異軌道は存在しない.

証明 そうなることを仮定する。命題1より $E_{\infty}^{0,2} = 0$ 。従って $x \in M$ に対して $H^1(SU(2)(x); \mathbb{Q}) = 0$ かつ $H^2(M^*; \mathbb{Q}) = E_{\infty}^{2,0} = H^2(M; \mathbb{Q})$ 。故に $\exists w'_i \in H^2(M^*; \mathbb{Q})$ $\pi^*(w'_i) = w_i$ ($1 \leq i \leq m$) $\therefore \pi^*(w'_1 \cup \dots \cup w'_m) = w_1 \cup \dots \cup w_m = 0$ 。 $\pi: M \rightarrow M^* = M/SU(2)$

■

命題3 M は $3m$ 次元多様体で

$$\exists w_1, \dots, w_m \in H^3(M; \mathbb{Q}), w_1 \cup \dots \cup w_m \neq 0$$

と仮定する。 $SU(2)$ が有限次元固定群をもつ M に作用すると特殊軌道が存在は $M(\tau) = \{x \in M : SU(2)x = \tau x\} \neq \emptyset$ 。

証明 命題1より容易に示せる。 ■

命題4 M は命題3の性質をもつ多様体とする。 $SU(3)$ が有限次元群として M に作用すれば必ず特殊軌道が存在する。

証明 仮定を仮定する。 M は複素多様体である [2], 附. 1 により。複素多様体 M の Loday sheaf $H^i(\pi)$ は自明である。従って $H^i(M^*; H^j(\pi)) = 0$ 。故に $E_{\infty}^{0,3}$ は高々1次元。従って $x \in M$ に対して $H^i(SU(3)(x); \mathbb{Q}) = 0$ ($i=1, 2$)。又 $0 \rightarrow E_{\infty}^{2,0} \rightarrow H^2(M; \mathbb{Q}) \rightarrow E_{\infty}^{0,3} \rightarrow 0$ は exact である。 $\dim E_{\infty}^{0,3} \leq 1$ より $\exists w'_1, \dots, w'_m \in H^3(M; \mathbb{Q})$ $w'_1 \cup \dots \cup w'_m \neq 0$ 。 $w'_1, \dots, w'_{m-1} \in E_{\infty}^{3,0} = H^3(M^*; \mathbb{Q})$ 。 $\dim M^* = \dim M - 8$ よりこれは不合理。 ■

2. principal S^1 -bundles

M は $2m$ 次元多様体 $f: M \rightarrow S^2 \times \dots \times S^2$ (m 個) を各線分度 L の連続写像とする。 $N_i = \underbrace{S^2 \times \dots \times S^2}_i \times \underbrace{S^2 \times \dots \times S^2}_{m-i}$ ($i=0, 1, \dots, m$) とし $N_{i+1} \rightarrow N_i$ は canonical S^1 -bundle とする。

$M_i = f_i^{-1}(N_i \rightarrow N_0)$, $f_i: M_i \rightarrow N_i$ と $f_i \in \text{cover}$ する bundle map とする. 同様のことは多様体 $M_1, M_2, \dots, M_m$ と写像 $f_1, f_2, \dots, f_m$ 及び $f_i: M_i \rightarrow N_i$ による $M_i \xrightarrow{p_i} M_{i-1}$ 及び principal S^1 -bundle $\pi: f_{i-1}^{-1} M_{i-1} \rightarrow M_{i-1}$ の列 $\{2 \in \mathbb{Z}\}$ とする様に構成される. $M_m = \tilde{M}$ とおけば M 上の T^m -bundle である. [4] の 4.1 によれば M 上の単連結コンパクト半単純リー群の作用は M_1 にも与えられる.

3. 定理 A の証明

M は単連結 $2m$ 次元多様体, $f: M \rightarrow S^2 \times \dots \times S^2$ (m 個) は写像度 1 の連続写像とする. $SU(3), Sp(2)$ が M 上に作用し $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$ を与える. $SU(3), Sp(2)$ は $\mathcal{H}$ の旗多様体 H 上を平行移動する. $SU(3)$ の $\mathcal{H}$ 上の制限 $\varphi: SU(3) \times H \rightarrow M$ を作用とす. $\psi \in SU(3)$ の $\mathcal{H}$ 上の制限 φ, ψ はそれぞれ $\mathcal{H}$ の S^2 の M への写像とす. H^4, H_4 は $\mathcal{H}$ の φ, ψ の主固定群とす. 次の各場合を別々に考へる.

Case 1 $\dim H^4 = 1$ (φ は $\tilde{M}$ への写像)

Case 2 $\dim H^4 = 0$

Subcase 1 φ が特異軌道を含む

(i) $H^4 = \mathbb{I}$ (ii) $H^4 = 1$ (H^4 は H の単位連結成分)

Subcase 2 φ が特異軌道を含む

Case 1: φ が特異軌道を含む. φ は唯一つの軌道 S^2 を含む. $\pi_1(\tilde{M}) = 1$ より $\tilde{M} = S^2 \times \tilde{M}^*$ とし $H^3(\tilde{M}; \mathbb{Q}) = H^3(\tilde{M}^*; \mathbb{Q})$. これは不合理. φ が特異軌道を含む. $\mathcal{H}$ は不動点, 従って

ψ も不動点, $\varepsilon < \tau$. これは命題 2 に反する ■

Case 2. Subcase 1 (i): ψ が不動点, $\varepsilon < \tau$ は "命題 2 より不合理, M は単連結であるから軌道型 (M, τ) は $SO(2)$, 従って $M \cong S^2 \times M^*$. 必要ならば N_0 の因子の順序を適切に選んで $p_1'(SU(2)(\alpha)) \rightarrow SU(2)(\alpha)$ が non-trivial S^1 -bundle になっている. $p_1'(SU(2)(\alpha))$ は transitive $SU(2)$ -多様体であるから ψ は特異軌道をもたない. 故に $\hat{\psi}$ も特異軌道をもたない" 仮定に反する ■

Case 2. Subcase 1 (ii): ψ が特異軌道をもたない. $M(\tau) = \emptyset$ ならば $H^2(M^*; \mathbb{Q}) \subset H^2(M; \mathbb{Q})$ は軌道写像による同型であるから不合理. 又 $\hat{\psi}$ が固定群 $T \in \mathcal{F}$ ならば命題 3 より不合理. 従って $\psi, \hat{\psi}$ は主固定群が有限群の軌道型 $(T) \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0$ である. M 要素 α による $i: SU(2)(\alpha) \rightarrow M$ が trivial homomorphism $i^*: H^2(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(SU(2)(\alpha); \mathbb{Q})$ であることは $E_{\infty}^{0,2}$ により不合理. 従って $\exists \alpha \in M: i^*: H^2(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(SU(2)(\alpha); \mathbb{Q})$ non-trivial. これは ψ による $p_1(\alpha) = \alpha$ であることは $i_1: SU(2)(\alpha) \rightarrow M$ による $i_1^*: H^2(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(SU(2)(\alpha); \mathbb{Q})$ が non-trivial である命題 1 より不合理. 故に ψ が特異軌道をもたない. したがって $H^2(M^*; \mathbb{Q}) \cong H^2(M; \mathbb{Q})$ により不合理 ■

Case 2. Subcase 2: $\hat{\psi}$ が特異軌道をもたない. $SU(2)$ のある部分群 $SU(2)$ が存在して $\hat{\psi}$ の制限作用が上に作用する場合の $\alpha \in M$ により $\hat{\psi}$ が特異軌道をもたないことは "命題 4 より不合理" ■

注意 以上の議論より次の命題が示された.

命題 5 $M \in$ 定理 A の列とある. $SU(2)$ が M に作用するとは 2 重作用の $\tilde{M}$ 上の $\tilde{M}$ の $\tilde{M}$ は almost free である. ■

4. 定理 B の証明.

$M_1 \in$ 定理 A の性質をもつて, $M = M_1 \# M_0$ とおく. $G = SU(2)$ が M に作用するとする. $\tilde{M}$ 上の $\tilde{M}$ は almost free である. $\tilde{M}$ は $(\tilde{M}_1 - \text{int } D^{2m} \times T^m) \cup \bigcup_{S^{2m-1} \times T^m} ((M_0 - \text{int } D^{2m}) \times T^m)$ と位相同型である. 命題 5 より $\tilde{M}$ 上の G の作用は almost free である. 従って (2) の $h. 1$ より $\pi: \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/G$ の Leray スペクトル系列より $E_2^{p,q} = H^p(\tilde{M}/G; \mathbb{Q}) \otimes H^q(S^3; \mathbb{Q})$ であり, このスペクトル系列は collapse する. 写像 $c: H^2(M; \mathbb{Q}) \rightarrow E_2^{0,3}$ が全射である. $\dim E_2^{0,3} = 1$ より $E_\infty^{0,3} = 0$ であり $H^3(\tilde{M}/G; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\pi^*} H^3(\tilde{M}; \mathbb{Q})$. これは不合理. $r = \min\{r': H^{r'}(M_0; \mathbb{Q}) \neq 0\}$ とおき $a', b' \in H^r(M_0; \mathbb{Q})$ と $a' \in H^r(M_0; \mathbb{Q})$ として $(a' \cup b')[M_0] \neq 0$ と仮定する. Mayer-Vietoris 完全列

$$\begin{aligned} * & \rightarrow H^i(\tilde{M}; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha} H^i(\tilde{M}_1 - \text{int } D^{2m} \times T^m; \mathbb{Q}) \oplus H^i((M_0 - \text{int } D^{2m}) \times T^m; \mathbb{Q}) \\ & \xrightarrow{\beta} H^i(S^{2m-1} \times T^m; \mathbb{Q}) \rightarrow \end{aligned}$$

を考える. $\alpha(a) = a' \times T^m \in H^{r+m}((M_0 - \text{int } D^{2m}) \times T^m; \mathbb{Q})$, $\alpha(b) = b'$ とおき $a, b \in H^r(\tilde{M}; \mathbb{Q})$ とおき. $(a \cup b)[\tilde{M}] \neq 0$ が容易に示される. 同型 $H^*(\tilde{M}; \mathbb{Q}) \cong H^*(\tilde{M}/G; \mathbb{Q}) \otimes H^*(S^3; \mathbb{Q})$ により a, b の形は $1 \otimes a'' + w \otimes a''', 1 \otimes b'' + w \otimes b'''$ (ここで w は $H^3(S^3; \mathbb{Q})$ の生成元).

$\alpha(w(0)) = y + \sum_j b_j x T^j$, $y \in H^3(\tilde{M}, -\omega \otimes T^m : \mathbb{Q})$, $\sum b_j x T^j \in H^3((M_0 - \omega \otimes T^m) \times T^m) \subset \mathfrak{g}$. $\deg b_j \geq 1$ if $j \leq 3-r$. $-\frac{1}{2} \alpha(1 \otimes a'')$
 $= \alpha + \sum a_i x T^i \in \mathfrak{g}$, $i \leq m-3$. T^m degree ≤ 1 if $\delta = 0$
 $a = 1 \otimes a''$. 同本義に $b = 1 \otimes b''$ $\text{Ex} = a \cup b = 1 \otimes (a'' \cup b'') = 0$
 不合理

参考文献

- [1] G. Bredon, *Sheaf theory*, McGraw-Hill, New York, 1967
- [2] P.E. Conner, *Orbits of uniform dimension*, Michigan Math. J. 6 (1958) 212-22
- [3] D. Burghelea and R. Schultz, *On the semi-simple degree of symmetry*, Bull. Soc. Math. France, 103 (1975) 431-440
- [4] T.E. Stewart, *Lifting group actions in fibre bundles*, Ann. of Math. 74 (1961) 192-198