

非正則な場合の Pitman efficiency について

大阪市大 鈴木武

§.

Pitman efficiency については E. Noether の論文
(1955, *Ann. Math. Statist.* 26) で述べられている。
そこで対象とされている統計量の列 $\{T_n\}$ には漸近正規性が
仮定されており, 検定方式も

$$T_n \geq t_n(\alpha)$$

を棄却或とするものに限定している。

我々が以下述べるのは, この様な場合を含むより一般的な
場合に於て, Pitman 式の相対効率を求めることである。

(Pitman efficiency の概念については, 前出の論文が
Puri & Sen .(1971). *Nonparametric Methods in Multivariate
Analysis*. New York, John Wiley & Sons.
等を参照して下さい。)

$\{P_{\theta,n} : \theta \in \Theta\}$ ($n \in N$, $N = \{1, 2, \dots\}$) を sample space $(\mathcal{X}_n, \mathcal{Q}_n)$ 上の prob. measure の族の列とする。 $\Theta \subset R^1$, $\theta_0 \in \Theta$ の一点, $K \in R^1$ の一つの cone, $\Theta_1 = (K + \theta_0) \cap \Theta$ は θ_0 を集積点にもつものとする。以下考える統計量 T_n は全て $\mathcal{X}_n$ からある一つの固定された Euclidean sample space $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ への $(\mathcal{Q}_n, \mathcal{B})$ -可測写像である。今次の様な性質をもつ統計量の列 $\{T_n\}$ と写像の列 $\{\pi_n\}$ を考える。

(1) 各 n に対し, $\pi_n : \Omega_n \longrightarrow \Theta_1$

$$\pi_n(w) = \theta_0 + \varphi(n) \cdot (w - \theta_0)$$

$$\theta_0 \in \Omega_n \subset \Omega_{n+1}, \quad \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \supset \Theta_1$$

ここに φ は次の様なものである。

(a) $a \geq 0$, $\varphi : (a, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$

monotone non-increasing

(b) $\forall p > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(px)}{\varphi(x)} (= a(p) \text{ とおく})$ が存在する。

(c) $\lim_{p \rightarrow +0} a(p) = \infty (= a(0))$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} a(p) = 0 (= a(\infty))$$

(d) $p \mapsto a(p)$: strictly monotone decreasing

(2) $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ 上の prob. measure の族 $\{Q_w : w \in \Omega\}$ が次の様な性質をもつものが存在する。

(a). $\exists \mu$: σ -finite measure on $\mathcal{Y}$, $\{Q_w\} \ll \mu$.

$$\frac{dQ_w}{d\mu} = g(\cdot | w) \quad \text{とおく.}$$

(b). $\forall c \in [0, \infty)$, $\forall w_1, w_2 \in \Omega$ に対し

$$\{y: g(y | w_1) \geq c \cdot g(y | w_2)\} \in \mathcal{C} \quad \text{:::}$$

$\mathcal{C} = \{C \subset \mathcal{Y}; C \text{ は } C^c (C \text{ の補集合}) \text{ が } \mathcal{Y} \text{ の可測凸集合の有限直和として表わされる}\}$

(c). $\mathcal{Y}$ の全ての凸集合は μ -continuity set.

即ち, その boundary の μ -measure が 0.

(d). $P_{\pi_n(w), n} T_n^{-1} \Rightarrow Q_w \quad (\text{in distribution})$

: Ω の各点 w の近傍で一様.

$\beta(w; \alpha)$ を 検定: Q_0 対 Q_w に対する level α -most powerful test の power とし $\alpha < \beta(w; \alpha) < 1$

(e). $\exists w \in \Omega$, $\alpha < \beta(w; \alpha) < 1$

(f). $w \rightsquigarrow \beta(w; \alpha)$ は $\alpha < \beta(w; \alpha) < 1$ なる

w に対し, $|w - w_0|$ の関数として 1 対 1.

(3). $w \rightsquigarrow Q_w$: 1 対 1 かつ 弱連続.

(4). $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ 上の prob. measure の族 $\{Q_w; w \in \Omega\}$ が存在して

$$P_{\pi_n(\omega), n} T_n^{-1} \Rightarrow Q_\omega \quad (\text{in distribution}) \\ \forall \omega \in \Omega.$$

$$\text{今 } f(P, Q) = \int_{\mathcal{Y}} \sqrt{\frac{dP}{d\nu} \cdot \frac{dQ}{d\nu}} d\nu, \quad \nu = P + Q \quad \times$$

定義する

$$(5) \quad f(P_{\pi_n(\omega), n} T_n^{-1}, P_{0_0, n} T_n^{-1}) \longrightarrow f(Q_\omega, Q_{0_0}) \\ : \Omega \text{ の各点 } \omega \text{ の近傍で一致.}$$

$$(6) \quad \exists \omega \in \Omega, \quad 0 < f(Q_\omega, Q_{0_0}) < 1$$

$$(7) \quad \omega \longmapsto f(Q_\omega, Q_{0_0}) \quad : \Omega \text{ 上連続かつ}$$

$0 < f(Q_\omega, Q_{0_0}) < 1$ をみたす $\omega \in \Omega$ に対し $|\omega - 0_0|$ の関数として 1 対 1.

このとき次の事が分る。

定理1. 一つの統計量の列 $\{T_n\}$ が与えられたとき、条件(1),(2),(3)又は条件(1),(3),(4)-(7)をみたす列 $\{\pi_n\}, n \in \mathbb{N}$ は、もし存在すれば"次の意味で一意的である。即ち他に $\{\pi_n^*\}$ があれば、各 $\omega \neq 0_0$ について

$$\lim_n \frac{\pi_n^*(\omega) - 0_0}{\pi_n(\omega) - 0_0} = k$$

が存在して、 k は ω に無関係な正数である。

(但し, $0/0 = 1$, $\infty/0 = \infty$, $0/\infty = 0$ とす.)

定理 2. $\{T_n\}$, $\{T_n^*\}$ と条件 (1), (2), (3) をみたす
統計量の列とし, 特に

$$(i) \quad Q_w^* = Q_{\pi(w)}, \quad w \in \Omega_1$$

$$\pi(w) = \theta_0 + C \cdot (w - \theta_0), \quad 0 < C < \infty$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^*(n)}{\varphi(n)} \quad (= \lambda \text{ と仮定, } 0 \leq \lambda \leq +\infty) \text{ が存在する.}$$

が成立しているものとする。今 ϕ 及び ϕ^* を其々検定:

Q_{θ_0} 対 Q_w , $Q_{\theta_0}^*$ 対 Q_w^* に対する level α -most powerful test とする。

このとき test の列 $\{\phi^*(T_n^*)\}$ の $\{\phi(T_n)\}$ に対する
Pitman - Noether efficiency $(= e(\{\phi^*(T_n^*)\}; \{\phi(T_n)\}))$
は次式で与えられる。

$$e(\{\phi^*(T_n^*)\}; \{\phi(T_n)\}) = f\left(\frac{C}{\lambda}\right)^{-1}$$

ここに $f\left(\frac{C}{\lambda}\right)$ は $Q\left(f\left(\frac{C}{\lambda}\right)\right) = \frac{C}{\lambda}$ をみたす値である。