

輻射場のゆらぎとその統計的性質(II)

— Laser 発振理論と非線形レスポンス —

早大理工 長 島 知 正

(1 1 月 2 0 日 受 理)

1) 序 論

前回, 光の可干渉性 (Optical Coherence) の理論から派生した輻射場の統計理論によって得られる統計力学との関連又は, 問題点を若干考察した。¹⁾

Optical Coherence の理論は未だ閉じた内容を取ってはいない。又, 更に問題が光の位相といった従来の理論形式からは, はみでた実体を相手にしているだけに (但し, 物質波の位相がマクロに現われているとする超流動及びその反響である超電導現象を除いては) 問題点が十分に理解されていないと言った方が正確であるかも知れない。今回は, Optical Coherence の理論の原点でもあり, 又その相転移現象などの物性的或いは, 化学反応に於ける振動現象の生物学的な応用の興味から ²⁾ 最近急速に注目を集めている Laser 発振理論を考察する。現在, 感覚的に理解されている coherence という概念について物理的基礎を与える一つの突破口を見い出す可能性を与えているからでもある。

Laser の理論は, 発振という非線形現象を Atomic Level で説明する事として理解されていてその意味では, かなり成功を収めている様である。則ち, Laser に依ってつくられる輻射場が古典的な発振回路 (L , C , R 発振回路) によりつくられる電波と同じ, Van der Pol eq. を満足する事に依って安定な量子論的発振器であることが H . Haken, W.E.Lamb, M.Lax といった人達によって示めされている。然ら, これ等の理論は, Optical Coherence の問題を完全に解いた訳ではない。Optical Coherence 理論は, 輻射場の位相まで含めたゆらぎを議論する事であり, 一方 Laser 発振が Van der Pol oscillation で記述されるならば, 或る threshold 以上の発振状態では, それは,

熱平衡状態とは非常に異った状態であるから、それからのゆらぎは非平衡熱力学或いは、統計力学との関連で注意深く議論されねばならない問題である。そこで、ここでは、一応 Coherence との直接的な関連は別の機会に譲る事にして、Laser 発振によって如何にして、熱平衡状態とは異なる新らしい定常状態が達成されるかを原子の非線型レスポンスとしてとらえていくことにする。

2) Laser のモデル

W. E. Lamb と M. Scully の理論³⁾—

一般に、レーザー発振をその統計性まで含めて考える時、対象となる系は、次の様なものである。(Fig.1)

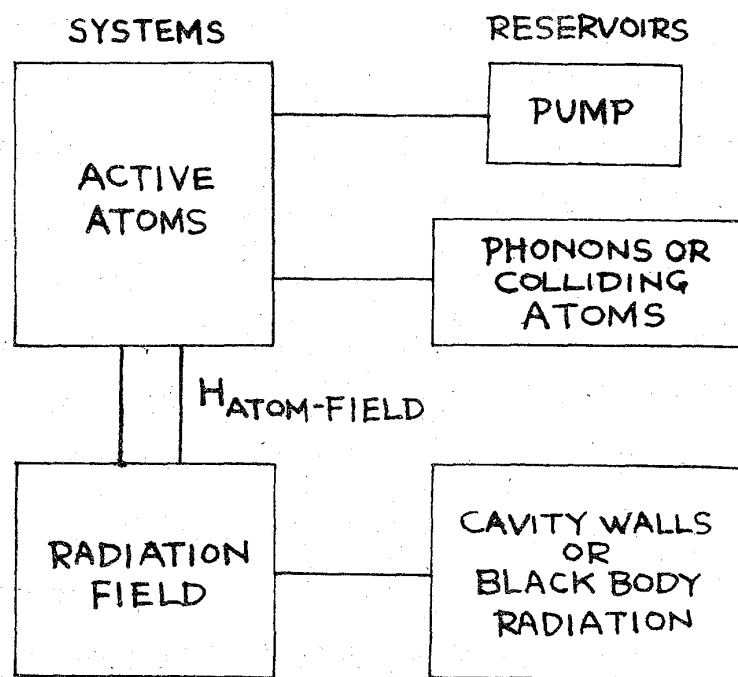


Fig.1

ここで、上のモデルを変形して、次の様に簡単化して考える事ができる。即ち、輻射場と相互作用するレーザー活性物質として、2準位系の原子群を考え、今考えている系に上の準位の原子群を入れる事に依って pumping を表わし、下の準位にある原子を入れる事によってレーザー系の dissipation を表わし、reservoir の役目をさせる事にする。(Fig.2)

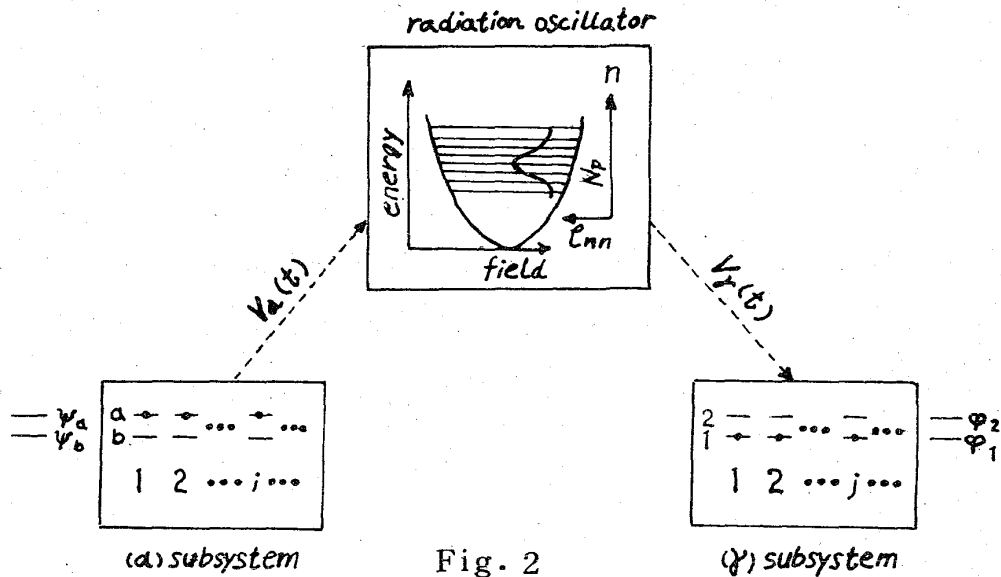


Fig. 2

ここで、原子群は、輻射場がない時、Polarization はないとする。つまり、Spontaneous (Atomic) Polarization はない物質とする。又、輻射場との相互作用は、 $\mathbf{er} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, t)$ 型のもの、つまり、induced electric dipoleと電場に依る electric dipole interactionを通じてのみ行なわれると考える。

M. Scully は、以上のモデルを用いて、W.E. Lamb のガス・レーザーの半古典的な理論を量子論的に formulation した。以下では、Scully のモデルを用いてレーザー系の輻射場の density operator に対する Glauber の p-表示された分布函数⁴⁾について、その時間発展を考える。

1原子と1つの radiation mode からなる系のハミルトニアンを次の様を書く。

$$H = H_A + H_R + H_{A-R}$$

ここで、各項は夫々次の様に定義されている operator である。($\hbar = 1$ の単位系で)

$$H_R = \omega a^\dagger a$$

$$H_A = \epsilon_a \sigma^+ \sigma + \epsilon_b \sigma \sigma^+$$

$$= \begin{pmatrix} \epsilon_a & 0 \\ 0 & \epsilon_b \end{pmatrix}$$

$$H_{A-R} = \lambda [(\sigma^+ + \sigma^-)(a^+ + a^-)]$$

ここで H_A , H_R , H_{A-R} は夫々, 原子, 輻射場, 及びその相互作用のハミルトニアン。又 (a, a^+) , (σ, σ^+) は夫々輻射場の creation, annihilation operator 及び Pauli operator。 λ は相互作用の定数である。このハミルトニアンを $H_0 \equiv H_A + H_R$, $V(t) \equiv H_{A-R}$ として相互作用表示に移ると

$$\begin{aligned} V_I(t) &= \exp(iH_0 t) V(t) \exp(-iH_0 t) \\ &\equiv \lambda \exp(iH_0 t) [\underbrace{(\sigma^+ + \sigma^-)}_{\sim} \underbrace{(a^+ + a^-)}_{\sim}] \exp(-iH_0 t) \end{aligned}$$

先ず $\sigma^+ a$ の項は, (σ, σ^+) と (a, a^+) は交換する事から

$$\begin{aligned} \sim &= \exp \{ i(H_R + H_A)t \} \sigma^+ a \exp \{ -i(H_R + H_A)t \} \\ &= \exp(iH_A t) \sigma^+ \exp(-iH_A t) \exp(iH_R t) a \exp(-iH_R t) \\ &= \begin{pmatrix} \exp(i t \omega_a) & 0 \\ 0 & \exp(i t \omega_b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} \exp(-i t \omega_a) & 0 \\ 0 & \exp(-i t \omega_b) \end{pmatrix} a \exp(-i \nu t) \\ &= \sigma^+ \exp \{ i t (\omega_a - \omega_b) \} a \exp(-i \nu t) \end{aligned}$$

同様にして, 他の項を計算すると

$$\begin{aligned} V_I(t) &= \lambda \{ \sigma^+ a \exp [i(\omega - \nu)t] + \sigma^- a^+ \exp [-i(\omega - \nu)t] \\ &\quad + \sigma^+ a^+ \exp [i(\omega + \nu)t] + \sigma^- a \exp [-i(\omega + \nu)t] \} \end{aligned}$$

となる。今, 完全に resonance する場合 ($\omega = \nu$) だけ考えれば,

$$V_I(t) = \lambda \{ \sigma^+ a + \sigma a^+ + \sigma^+ a^+ \exp(2i\omega t) + \sigma a \exp(-2i\omega t) \}$$

を得る。又、回転波近似の範囲では、

$$V_I(t) \simeq \lambda \{ \sigma^+ a + \sigma a^+ \} \\ = \lambda \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^+ & 0 \end{pmatrix}$$

の様に簡単化される。

次に、前に述べた様に相互作用を stochastic に入れる事を考慮して、系の状態関数を密度行列で考える。今、一般に相互作用する二つ (A, B) の sub-system を表わす密度行列 $\rho_{AB}(t)$ を相互作用表示で書くと、

$$\rho_I(t) = \exp(iH_0 t) \rho \exp(-iH_0 t)$$

$$\dot{\rho}_I(t) = i [V_I(t), \rho_I] \quad \dots \quad \star$$

ここで、 $H_0 = H_A + H_B$, V_I は A-B の相互作用を相互作用表示したものである。次に時間発展を考えて、(★) 式を時間に依存する摂動展開を用いて第 n 項まで求めると、それは次の公式によって与えられる。

$$\rho_{AB}^{(n)}(t) = \rho(t_0) + \sum_{s=1}^n (-i)^s \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_0}^{t_{s-1}} dt_s [V_I(t_1), [V(t_2), \dots, [V_I(t_s), \rho_{AB}(t_0)] \dots]]$$

これを今考えている系に適用すると、完全に resonance している場合は簡単に求める事ができる。先ず、初期条件として $t=t_0$ では、 $\rho_{AB}(t_0) = \rho_A(t_0) * \rho_B(t_0)$ が成り立っとして、普通やる様に、摂動の 2 次まで計算する。

$$\rho_{AB}^{(2)}(t) = \rho(t_0) + (-i) \int_{t_0}^t [V_I(t'), \rho_{AB}(t_0)] dt' \\ + (-i)^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} dt_1 dt_2 [V_I(t_2), [V_I(t_1), \rho_{AB}(t_0)]]$$

今、我々の考えている系では、

$$\begin{aligned}\rho_{AB}(t_0) &= \rho_R(t_0) \otimes \rho_A(t_0) \\ &= \rho_R(t_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_R(t_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

T を微小な時間として $(t_0, t_0 + T)$ の間の摂動を考えて、

$$\begin{aligned}\rho_{AB}^{(2)}(t_0+T) &= \rho^{(0)}(t_0) + (-i) \int_{t_0}^{t_0+T} [V_I(t'), \rho_{A,B}(t_0)] dt' \\ &\quad + (-i)^2 \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_1} dt_1 dt_2 [V_I(t_1), [V_I(t_2), \rho_{AB}(t_0)]] \\ &= \rho^{(0)}(t_0) + (-i) \lambda \int_{t_0}^{t_0+T} dt' \begin{pmatrix} 0 & -\rho_R^a \\ a^+ \rho_R & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-i)^2 \lambda^2 \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_1} dt_1 dt_2 \begin{pmatrix} aa^+ \rho_R + \rho_R aa^+ & 0 \\ 0 & -2a^+ \rho_R a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-i) \lambda T \begin{pmatrix} 0 & -\rho_R^a \\ a^+ \rho_R & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{(-i)^2}{2} \lambda^2 T^2 \begin{pmatrix} aa^+ \rho_R + \rho_R aa^+ & 0 \\ 0 & -2a^+ \rho_R a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_R - \frac{1}{2} \lambda^2 T^2 (aa^+ \rho_R + \rho_R aa^+) & i \lambda T \rho_R^a \\ -i \lambda T a^+ \rho_R & \lambda^2 T^2 a^+ \rho_R a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで、我々が注目している系についてのみの変数にする為、例えば A-subsystem についてのみ注目しているとすれば、 $\rho_A = \text{Tr}_B [\rho_{AB}]$ の様に reduce する。つまり、今の場合は輻射場にのみ注目しているので、Atomic variable について密度行列の trace をとった reduced density operator は、2 次までの項について

$$\begin{aligned}
 \rho_R^{(2)}(t_0+T) &= \text{Tr}_A [\rho_{AB}^{(2)}(t_0+T)] \\
 &= \rho_R(t_0) - \frac{1}{2} \lambda^2 T^2 (aa^+ \rho_R(t_0) + \rho_R(t_0) aa^+) \\
 &\quad + \lambda^2 T^2 a^+ \rho_R(t_0) a
 \end{aligned}$$

となる。更に相互作用が stochastic に入っているとして、coarse graining する。その為に、輻射場は、 (t_0, t_0+T) の time scale では、 $\rho_R(t_0) \approx \rho_R(t_0+T)$ が成立つとする。

即ち、

$$\delta \rho^{(2)} = -\frac{1}{2} \lambda^2 T^2 (aa^+ \rho(t) + \rho(t) a^+ a) + \lambda^2 T^2 a^+ \rho(t) a$$

そこで、この関係から、 $\Delta t \gg T$ なる time scale での density operator の変化を atomic injection rate ; r_a を用いて次の様に表わす事ができる。
(つまり、N 個の Atom と相互作用をする時間 $\approx \Delta t$ とする)

$$\begin{aligned}
 \Delta \rho &= r_a \Delta t \left[-\frac{1}{2} \lambda^2 T^2 (aa^+ \rho(t) + \rho(t) aa^+) \right. \\
 &\quad \left. + r \lambda^2 T^2 (a^+ \rho(t) a) \right]
 \end{aligned}$$

即ち、次の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\Delta \rho}{\Delta t} \right)_{\text{gain}} &= -\frac{1}{2} \lambda^2 T^2 (aa^+ \rho + \rho aa^+) + \lambda^2 T^2 a^+ \rho a \\
 &= -\frac{A}{2} (aa^+ \rho + \rho aa^+) + Aa^+ \rho a
 \end{aligned}$$

以上では、原子系の上のレベルとの相互作用のみを考えたが、同様にして、下のレベルとの相互作用を考えると、輻射場の dissipation を表わす事ができる。
結果のみ書くと、

$$\left(\frac{d\rho}{dt} \right)_{\text{loss}} = -\frac{C}{2} (a^+ a \rho + \rho a^+ a) + C a \rho a^+$$

となる。従って pumping による gain と Reservoir との相互作用による loss を合わせて、

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & -\frac{A}{2} (aa^+\rho + \rho aa^+) + Aa^+\rho a \\ & -\frac{C}{2} (a^+a\rho + \rho aa^+) + Ca^+\rho a \dots\dots \star\star \end{aligned}$$

なる微分方程式を得る。これが M. Scully らの得た結果である。我々は、この考えを Glauber の導入した density operator の P-表示 $p(\alpha)$ に対して適用することによって、及び 4 次の摂動項を考慮することに依って、少しく彼等の結果を拡張しよう。

3) 非線形レスポンスと P-表示

R. Glauber⁴⁾ の導入した, coherent state $|\alpha\rangle$ を基底として, 任意の operator を (C-number) associated function に対応させる方法は, density operator についても考えられる。density operator ρ の P-表示とは次の様に定義される。即ち,

$$\begin{aligned} \rho(a, a^+) &= \int \bar{\rho}^{(a)}(\alpha, \alpha^*) A \frac{d^2\alpha}{\pi} \\ A &= |\alpha\rangle\langle\alpha| = \exp(-\alpha\alpha^*) \exp(\alpha a^+) |0\rangle\langle 0| \exp(\alpha^*a) \end{aligned}$$

ここで, $\bar{\rho}^{(a)}(\alpha, \alpha^*)$ は Antinormal orderin された operator (a, a^+) の函数のベキ展開に対応して次式で与えられる。

$$\bar{\rho}^{(a)}(\alpha, \alpha^*) = \sum_{r,s} \rho_{rs} \alpha^r \alpha^{*s} \equiv p(\alpha)$$

この P-関数は, 古典的な確率分布函数に非常に類似した性格を備えている。これを用いると前述の operator 形式で書かれた輻射場の微分方程式を古典的な確率分布函数に対する微分方程式に書き直をすることができる。その為に, ρ と (a, a^+) の積の積分表示を考える。ここで operator の順序は, 注意して考える必要がある。先ず, その定義より

$$a \rho(a, a^+) = \int \alpha p(\alpha) A \frac{d^2\alpha}{\pi}$$

となり、密度行列のエルミート性 $\rho = \rho^\dagger$ を用いれば

$$\rho(a, a^\dagger) a^\dagger = \int \alpha^* p(\alpha) \int \frac{d^2\alpha}{\pi}$$

次に順序の異なる積 ρa は、 α と α^* を独立変数とすると

$$\begin{aligned} \int a &= \exp(-\alpha^* \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \{ \exp(\alpha a^\dagger) | 0 \rangle \langle 0 | \exp(\alpha^* a) \} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \alpha \right) \int \end{aligned}$$

であるから、

$$\rho a = \int p(\alpha) \left(\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) \int \frac{d^2\alpha}{\pi}$$

となる。第2項を部分積分して

$$= \int \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \left(\alpha - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \right) p(\alpha)$$

同様にして、(★★) 式に表われてくる operator の積 $a a^\dagger \rho, \rho a a^\dagger, a^\dagger \rho a$ は
夫々

$$a a^\dagger \rho = \int \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \left[1 + \alpha \alpha^* - \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha \right] p(\alpha)$$

$$\rho a a^\dagger = \int \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \left[1 + \alpha \alpha^* - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right] p(\alpha)$$

$$a^\dagger \rho a = \int \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \left[1 + \alpha \alpha^* - \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right] p(\alpha)$$

となる。従ってこれらの関係を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{A}{2} (a a^\dagger \rho + \rho a a^\dagger) + A a^\dagger \rho a \\ &\quad - \frac{C}{2} (a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a) + C a^\dagger \rho a \end{aligned}$$

に対応して、次の微分方程式を得る。

$$\frac{dP(\alpha)}{dt} = \frac{(A-C)}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right) P(\alpha, t) + A \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} P(\alpha, t)$$

この式は、完全に古典的な確率過程としての Fokker - Planck 方程式を表わしている。即ち、第一項は、drift - term であり、 $C > A$ であれば、緩和現象を現わし、 $C \leq A$ であれば、増巾を示めす事になる。(Fig.3)

第2項は拡散項であり、拡散係数がAのみで決まっている事は注意を要する。然ら、これらの式からは、Laser の持つ非線形性や Coherence の性質を全く説明することはできない。

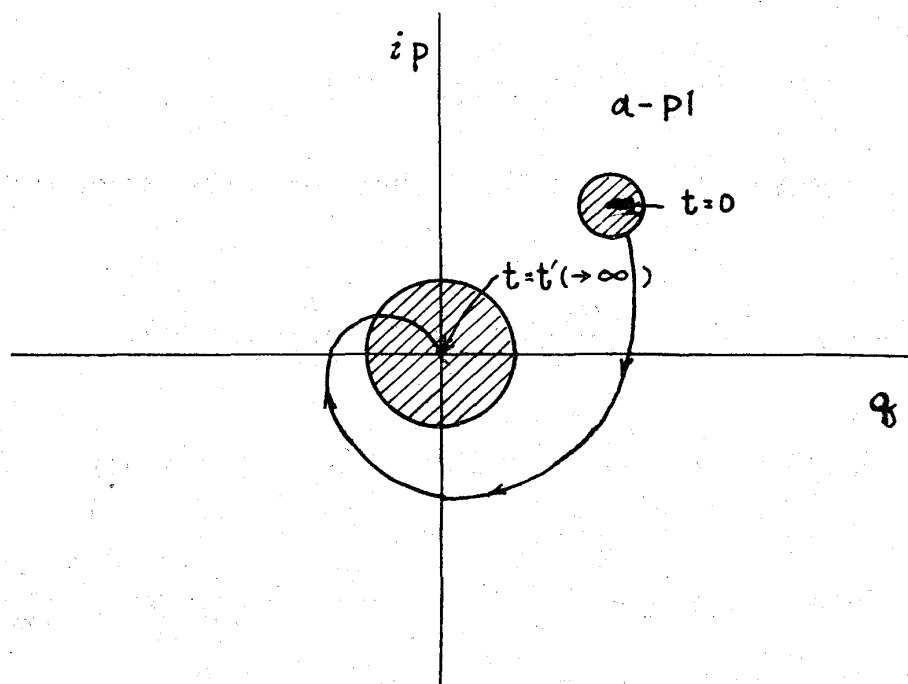


Fig.3

ここで、最近、物質と one photon process の相互作用による輻射場の統計性について、N. Chandra⁵⁾ et.al と R. London⁶⁾ の間で行なわれた議論は、我々の以上の議論で完全に説明されていることも注意したい。Laser 発振の非線形性を取り入れる為に、原子群の non - linear polarization を考慮すること

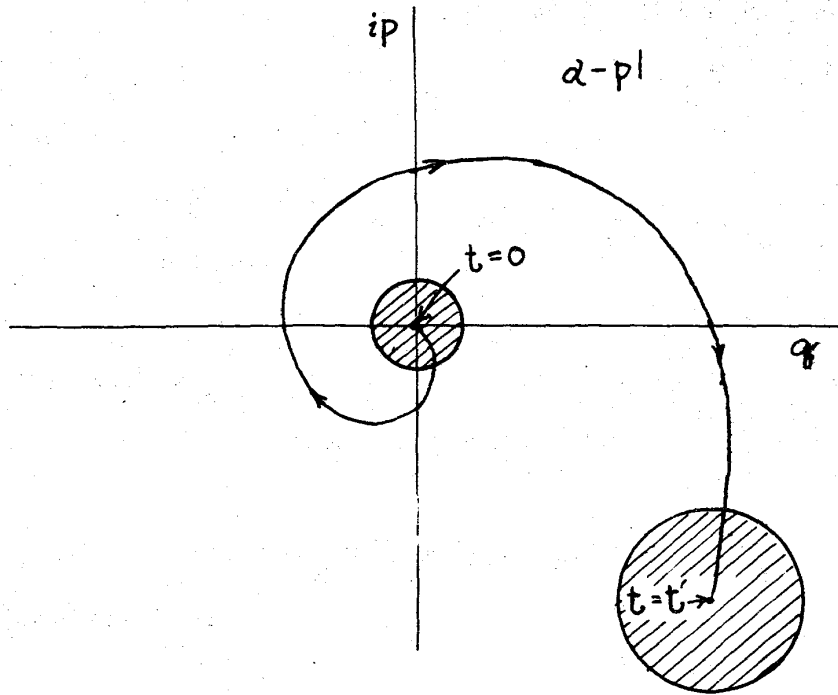


Fig. 4

にする。

即ち、輻射場に対する原子の non-linear response を考えていく。その為に上のレベルにある原子との相互作用を 4 次まで求め、下のレベルにある原子との相互作用は今迄通り 2 次までとする。

そこで、時間に依存した摂動論に戻って、4 次の項まで (polarization については、3 次の項まで) とると、

$$\begin{aligned}
 \rho^{(4)}(t_0+T) = & \rho^{(0)}(t_0) + (-i) \int_{t_0}^{t_0+T} [V_I(t_1), \rho_{AB}(t_0)] dt_1 \\
 & + (-i)^2 \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_1} dt_1 dt_2 [V_I(t_2), [V_I(t_1), \rho_{AB}(t_0)]] \\
 & + (-i)^3 \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_2} dt_1 dt_2 dt_3 [V_I(t_3), \dots, [V_I(t_1), \rho_{AB}(t_0)]] \\
 & + (-i)^4 \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_3} dt_1 \dots dt_4 [V_I(t_4), \dots, [V_I(t_1), \rho_{AB}(t_0)]]
 \end{aligned}$$

長島知正

これを以前と同じ初期条件で計算すると,

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \rho_R^{(t_0)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-i) \lambda T \begin{pmatrix} 0 & -\rho_R^a \\ a^+ \rho_R & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{(-i)^2}{2!} \lambda^2 T^2 \begin{pmatrix} aa^+ \rho_R + \rho_R aa^+ & 0 \\ 0 & -2a^+ \rho_a \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{(-i)^3}{3!} \lambda^3 T^3 \begin{pmatrix} 0 & -(\rho_R aa^+ a + 3aa^+ \rho_R^a) \\ a^+ aa^+ \rho_R + 3a^+ \rho_R aa^+ & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{(-i)^4}{4!} \lambda^4 T^4 \begin{pmatrix} aa^+ aa^+ \rho_R + 6aa^+ \rho_R aa^+ + \rho_R aa^+ aa^+ & 0 \\ 0 & -4(a^+ \rho_R aa^+ a + a^+ aa^+ \rho_a) \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} \rho_{aa}^{(4)} & \rho_{ab}^{(4)} \\ \rho_{ba}^{(4)} & \rho_{bb}^{(4)} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで, 前と同様に atomic variables について trace を取ると,

$$\begin{aligned}
&\delta^{(4)} \rho(t_0 + T; a^+, a) \\
&= \rho_{aa}(t_0 + T) + \rho_{bb}(t_0 + T) - \rho^{(0)}(t_0) \\
&= -\frac{\lambda^2 T^2}{2} (aa^+ \rho_R + \rho_R aa^+) + \lambda^2 T^2 a^+ \rho_a \\
&\quad + \frac{1}{4!} \lambda^4 T^4 (aa^+ aa^+ \rho_R + 6aa^+ \rho_R aa^+ + \rho_R aa^+ aa^+) \\
&\quad - \frac{1}{3!} \lambda^4 T^4 (a^+ \rho_R aa^+ + a^+ aa^+ \rho_R a)
\end{aligned}$$

2次までの項に対してと同じ議論で, これに対する coarse graining された微分方程式を考えると,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\Delta \rho}{\Delta t}\right)_{\text{grain}} &= r_a \left[-\frac{\lambda^2 T^2}{2} (aa^+ \rho_R + \rho_R aa^+) \right. \\
&\quad + \lambda^2 T^2 a^+ \rho_R a + \frac{\lambda^4 T^4}{4!} (aa^+ aa^+ \rho + 6aa^+ \rho aa^+ \\
&\quad + \rho aa^+ aa^+) - \frac{\lambda^4 T^4}{3!} (a^+ \rho aa^+ a + a^+ aa^+ \rho a) \left. \right] \\
&= -\frac{A}{2} (aa^+ \rho + \rho aa^+) + A a^+ \rho a + \frac{B}{24} (aa^+ aa^+ \rho \\
&\quad + 6aa^+ \rho aa^+ + \rho aa^+ aa^+) - \frac{B}{6} (a^+ \rho aa^+ a + a^+ aa^+ \rho a)
\end{aligned}$$

但し, $A = r_a \lambda^2 T^2$

$B = r_a \lambda^4 T^4$

次に, 以上の operator 形式での微分方程式を P - 表示して, loss についても考えると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p(\alpha, t)}{\partial t} &= -\frac{(A-C)}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right) p(\alpha) + A \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} p(\alpha) \\
&\quad + \frac{B}{24} \left\{ 7 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right) + 4 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha^2 \alpha^*) + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} (\alpha^{*2} \alpha) \right) \right. \\
&\quad - 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \alpha^2 + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} \alpha^{*2} \right) - 8 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} - 10 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} (\alpha \alpha^*) \\
&\quad \left. + 4 \left(\frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \alpha^*} \alpha + \frac{\partial^3}{\partial \alpha^{*2} \partial \alpha} \alpha^* \right) \right\} p(\alpha)
\end{aligned}$$

を得る。Fokker - Planck eq. と対応して考えるため α , α^* に関して 3 次以上の微分項を neg して, 変形すると,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p(\alpha, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \{ (A_1 - A_2 |\alpha|^2) \alpha p(\alpha) \} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \{ (A_1 - A_2 |\alpha|^2) \alpha^* p(\alpha) \} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \{ (B_1 - B_2 |\alpha|^2) p(\alpha) \}
\end{aligned}$$

$$- 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \alpha^2 + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^{*2}} \alpha^{*2} \right) p(\alpha)$$

を得る。この式は、H. Haken, M. Lax, etc の得た Langevin 方程式の方法による Laser 理論の結論である非線形 Langevin eq.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha (p - |\alpha|^2) + h(t)$$

$$\langle h^*(t)h(t) \rangle = 4\delta(t-t')$$

に対応する Fokker - Planck eq. に非常に類似している。即ち、threshold の近傍で (Lax と Louisell は) この非線形 Langevin eq. に対応する Fokker - Planck eq. として、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\alpha, t)}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial \alpha} \{ (p - |\alpha|^2) \alpha p(\alpha) \} - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \{ (p - |\alpha|^2) \alpha^* p(\alpha) \} \\ & + 4 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} p(\alpha) \end{aligned}$$

を得ている。これは我々の今の結果と拡散項が少しく異っているが、threshold point を含む、drift - term は exact に一致する。又 threshold 以下では非線形項を無視できて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\alpha, t)}{\partial t} = & - A_1 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right) p(\alpha) \\ & + B_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} p(\alpha) \end{aligned}$$

となり、これは、摂動の第 2 項までとった線形な理論と一致する。又 threshold の領域では、Lax の行った様に quasi-linear 近似を考えると、拡散係数は α -independent な定数となるので、ほとんど Lax の得た結果と一致する。

threshold Pt. 及びそれ以上での詳しい解析は現在進めている。(尚、上述の非線形 Langevin eq. は、少しく変形すると Van del Pol eq. になる⁷⁾。つまり、limit cycle が存在して、それが、定常状態をつくる。)

4) 結論及び反省

以上の考察を少し、まとめると次の様になる。

- 普通の不可遂過程の議論で行なわれる(密度行列を用いた)注目する sub-system(今の場合は, proper Lasing system)がまわりの heat bath と熱平衡にあるという仮定をあからさまに用いずにすんだ。
- Langevin eq. による方法とかなり一致した結果が, 簡単な方法でえられ, Laser作用に於ける相互作用の過程が分かり易い。
- Fokker - Planck eq. の形になるので, 時間発展も見通しが良い形になっている。

一方, 今後の問題として,

- Fokker - Planck eq. の係数を決める段階で Langevin eq. や他の方法によるものとの近似の相違がはっきりしない。
- もう少し, 一般的に N 原子系と輻射場のある力学系から出発すべきである。
- Coherence との関係が間接的にしか入っていない。つまり, 密度行列の diagonal part には, いつも, a^+ と a について pair の形でしか入ってこないのので, n 表示で書くと master eq. の中で matrix element の cross coupling がでてこない。
- Laser の理論全般にわたって行なわれている adiabatic 近似がどの程度の近似で行なわれているか, non - adiabatic な効果が coherence とどう結び付いているか一考を要する。

謝 辞

研究を進めるに当り, 種々御指導いただいた斉藤信彦先生及び研究室の方々に感謝いたします。

文 献

- 1) T. Nagashima ; 物性研究, 16. 166 (1971)
- 2) Glansdorf and Prigogine ; "Thermodynamic theory of Structure,

長島知正

Stability and Fluctuation " Wily Int . (1971)

3) M.O.Scully and W.E.Lamb ; Phys Rev. 159, 208 (1967)

4) R.J.Glauber ; Phys. Rev. 131, 2766 (1963), *ibid* , 130,
2529 (1963)

5) N.Chandra and H.Praksh ; Phys. Rev. Lett. 22, 1069 (1969)

6) R.London ; Phys. Rev A. 2 , 267 (1970)

7) W.Weidlich ; Nuovo Cimento (Supplement) I, 6 , 939 (1968)