

物性論におけるホモトピーとホロノミー¹

近畿大学理工学部数学物理学科 中原幹夫²

1 はじめに

現代の物性論においてトポロジーや微分幾何学が果たす役割を、「ホモトピー」と「ホロノミー」を例に取り解説する。まず、ホモトピー群の数学的解説をした後、それを液晶や超流体における様々な構造の分類に応用する。また、最近実現したアルカリ原子の Bose 凝縮体において、渦が無い状態から巻き数2の渦糸を連続的に生成する方法を紹介する。次に、縮退をもつ系における非アーベル的 Berry 位相(ホロノミー)を解説した後、その量子コンピュータへの応用を紹介する。

2 ホモトピー群とトポロジー [1, 2]

2.1 ホモトピー群

円 $N = S^1$ から別の円 $M = S^1$ への連続写像 $f: N \rightarrow M$ を考える。(記号 M, N は二つの円を区別するために導入した。) N 上の点 P を表す座標を $e^{i\theta}$, M 上の点 Q を表す座標を $e^{i\alpha}$ とすると、上の写像は $f: \theta \mapsto \alpha$ と表される。この連続写像 $\alpha = f(\theta)$ は、条件 $f(2\pi) - f(0) = 2n\pi$ ($n \in \mathbf{Z}$) を満たさなければならない。 f が微分可能であると、これは

$$n = \frac{1}{2\pi} \int_M d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{df}{d\theta} d\theta \quad (1)$$

と表すことが出来る。このように、連続写像 $f: S^1 \rightarrow S^1$ 全体の集合 $\mathcal{F}$ は整数 n によって分類することが出来、同じ n をもつ写像 f_1, f_2 の像は連続的に変形できる。これを

$$\pi_1(S^1) = \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (2)$$

と表し、 S^1 の1次ホモトピー群(基本群)は $\mathbf{Z}$ であるという。 π_1 の1は考えている写像の定義域 N の S^1 , (S^1) は写像の値域 $M = S^1$ を示している。群とつくのは、 $\mathbf{Z}$ が加法に関し群をなしているからである。すなわち f_1 が巻き数 m の写像、 f_2 が巻き数 n の写像であると、まず f_1 で N を写像した後、 f_2 で続けて N を写像すると、その結果は巻き数 $m+n$ の写像となる。

より一般に多様体 N から多様体 M への連続写像全体 $\mathcal{F}$ を考える。この写像を「ホモトピック」という同値関係で分類する。

定義: $f, g: N \rightarrow M$ がホモトピックというのは、 $t \in [0, 1]$ を連続パラメタとする写像 $h_t: [0, 1] \times N \rightarrow M$ が存在し、 $f = h_0, g = h_1$ を満たすことである。このとき $f \sim g$ とかく。

$\sim$ が同値関係であることは各自確かめよ。直感的には像 $f(N)$ と $g(N)$ が M の中で徐々に(すなわち切ったり貼ったりせずに)変形できるということである。定義域 N として、 n 次元球面 $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} | \|x\| = 1\}$ をとる。 $f: S^n \rightarrow M$ のうちで、ある定点 $x_0 \in S^n$ を $* \in M$ へ移すもののみを考え、その集合を $\mathcal{F}_*$ とよぶ。 $\mathcal{F}_*$ を $\sim$ で類別した商空間 $\mathcal{F}_*/\sim$ は、群としての代数構造をもつ³。それを n 次ホモトピー群といい $\pi_n(M, *)$ で表す。以下では、 $\pi_n(M, *)$ が $*$ によらない場合しか現れないので、

¹2001 年物性若手夏の学校, サブゼミ講義録

²Email: nakahara@math.kindai.ac.jp

³証明は例えば [1, 2] を見よ。 $n = 1$ に関しては以下を参照。

$*$ を省略し $\pi_n(M)$ と表す. 位相数学では, ホモトピー群は 2 つの位相空間が位相同型⁴であるかどうかをはかる (不完全ではあるが) ものさしとして用いられるが, 物性論や素粒子論ではむしろ写像の分類や欠陥の存在を調べる道具として用いられることが多い.

例として, 先に述べた $n=1$ の場合を考えよう. M の中で $*$ を通るループ l は, 連続写像 $l: S^1 \rightarrow M$ のうち $l(x_0) = *$ となるもの, 言い換えれば $l: [0, 1] \rightarrow M$ のうち, $l(0) = l(1) = *$ を満たすものである. $l \sim l'$ であれば, $h_t: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$, $(h_t(0) = h_t(1) = *)$ が存在し, $h_0 = l$, $h_1 = l'$ を満たす. l が属する同値類を $[l]$ で表すと, すべての $[l]$ の集合が $\pi_1(M)$ となる. 積 $[l_1] \circ [l_2]$ は, ループの積

$$l_1 \circ l_2(s) = \begin{cases} l_1(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ l_2(2s-1) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

の属する同値類 $[l_1 \circ l_2]$, 単位元は定値写像 $e(s) = *$ の同値類 $[e]$, 逆元 $[l]^{-1}$ は逆向きのループ $l^{-1}(s) = l(1-s)$ の同値類である.

例

(1) $\pi_1(S^1)$ は直ちに一般化され, $\pi_n(S^n) = \mathbf{Z}$ ($n \geq 1$) となる. $\pi_2(S^2) = \mathbf{Z}$ は 2 次元スピン系における Belavin-Polyakov モノポールの分類に用いられる.

(2) 2 次元球面に鉢巻をしてもすぐ外れてしまうことから, $\pi_1(S^2)$ は自明な群 $\{0\}$ となる.

(3) 複素数の位相を表す $U(1) = \{e^{i\alpha} \mid 0 \leq \alpha < 2\pi\}$ は多様体としてみると, 円 S^1 に他ならない. したがって $\pi_1(U(1)) = \mathbf{Z}$. 超流動 ^4He や通常の超伝導体の秩序変数の位相は $U(1)$ に属し, 以下に見るように, これらの系の渦糸は $\pi_1(U(1))$ で分類される.

(4) 2 次元特殊ユニタリー群 $SU(2)$ の元は

$$A = \begin{pmatrix} a+ib & -c+id \\ c+id & a-ib \end{pmatrix}, \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R}, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1)$$

と書かれる. したがって, $SU(2)$ を表す多様体は 3 次元球面 S^3 である. これから $\pi_3(SU(2)) = \mathbf{Z}$ となる. このホモトピー群は 4 次元 Yang-Mills 場のインスタントンの分類に用いられる.

(5) 少々直感から外れるかもしれないが $\pi_3(S^2) = \mathbf{Z}$ となる. このホモトピー群の非自明な元は, 3 次元空間における Dirac monopole を表す [3, 2].

さて, ホモトピー群の物性論における応用を考えよう [1, 2]. d 次元の空間を, ある秩序状態が満たしているとする. その空間のある部分空間で秩序変数が定義されないとき, その部分空間を「欠陥」とよぶ. 部分空間の次元を m とすると, $m=0, 1, 2$ のとき, それぞれ「点欠陥」, 「線欠陥」, 「面欠陥」とよぶ. 秩序変数は, 欠陥や表面以外 (バルク) ではその大きさ (振幅) が一定に保たれる. 秩序変数の空間の中で, 振幅一定の部分空間を M で表す. 例えば Heisenberg スピン系では $M = S^2$ である. これらの欠陥をホモトピー群を用いて調べるには, 欠陥の周りを円 S^1 や球 S^2 にそってぐるっと回って, 秩序変数がどのように変化しているか調べればよい. S^n を「ぐるっと回って」秩序変数の変化を調べるといことは, S^n 上の各点が M へどのように写像されているかを調べることに他ならない. それには $n = d - m - 1$ 次のホモトピー群 $\pi_n(M)$ を用いればよい. したがって, $\pi_n(M) \neq \{0\}$ であれば, その秩序状態には m 次元の欠陥が存在する可能性がある. 実際に系に準安定な欠陥が存在するかどうかは, その欠陥がエネルギー的に極小値をとるかどうかにかかっている. トポロジカルにはその存在が示されても, その (自由) エネルギーが欠陥のサイズの単調増大関数または単調減少関数では, その欠陥は安定には存在しない.

⁴ $f: M \rightarrow N$ と $f^{-1}: M \rightarrow N$ がどちらも連続となるような写像 f が存在するとき, M と N は位相同型であるという. 位相同型は同値関係である. 位相同型な空間のホモトピー群は同型であるが, 逆は成り立たない.

2.2 超流動 ^4He と $U(1)$ 超伝導体の渦糸

まず、超流動 ^4He を考えよう。この系の秩序変数 $\Psi(x) = \langle \psi(x) \rangle$ は複素スカラー場である。さて、この系に線欠陥があると、そこでは $|\Psi| = 0$ でなければならない。そのような線欠陥を渦糸とよぶ。このような渦糸を囲む閉曲線 C を考えよう。 C 上の点 p が C を1周すると、 $\Psi(p)$ の一意性から、その位相 $e^{i\alpha(p)} = \Psi(p)/|\Psi(p)|$ は $U(1)$ 上を $n(n \in \mathbb{Z})$ 周しなければならない。この n が、写像 $p \mapsto e^{i\alpha(p)}$ の巻き数を指定する整数であり、 C は S^1 であることを考えると $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ の元を特徴付ける数であることが分かる。このような秩序変数で軸対称なものは

$$\Psi(x) = \Psi_0(r)e^{in\theta} \quad (3)$$

と書かれる。 (r, θ) は x の極座標である。渦糸の中心では位相が定義されないので $\Psi_0(0) = 0$ でなければならない。これは線欠陥に他ならない。

通常の超伝導体の場合も事情はほぼ同じである。秩序変数は $\Psi(x) \propto \langle \psi_1(x)\psi_1(x) \rangle$ で、やはり $U(1)$ 位相をもち、その渦糸は $\pi_1(U(1))$ で分類される。

2.3 超流動 $^3\text{He-A}$ における渦糸とモノポール

超流動 $^3\text{He-A}$ の秩序変数を説明する前に、準備としてネマティック液晶の秩序変数を紹介する。これら2つの系は数学的に類似した秩序変数をもっている。ネマティック液晶は棒状の分子からなっており、多くの分子の平均的な方向が秩序変数となる。分子には向きを指定する矢印はついていないので、ディレクターと呼ばれる秩序変数 n は3次元ベクトルに似ているが、 n と $-n$ は同値である。すなわち、単位球面を表す極座標を (θ, ϕ) とすると (θ, ϕ) と $(\pi - \theta, -\phi)$ は同一視しなければならない。単位球面 S^2 にこの同値関係 $\sim$ を入れた多様体 $S^2/\sim$ を実射影平面 $\mathbb{RP}^2$ という。したがって、 $\mathbb{RP}^2$ を表すには S^2 の半分、例えば北半球で十分であるが、同値関係により赤道上の真反対の点は同一視しなければならない。この北半球を平面に押し広げてディスク B^2 で表すと、境界 $\partial B^2 = S^1$ 上の対蹠点は同一視される。

$\mathbb{RP}^2$ のホモトピー群は

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}_2, \pi_2(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}, \pi_3(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z} \quad (4)$$

などである。ここに $\mathbb{Z}_2 = \{e, g\}$ は2次の巡回群で $e + g = g + e = g, e + e = e, g + g = e$ を満たす。 g は渦糸を表しているが、この渦糸は2本を足し合わせると渦が無い状態に連続的に変形される。 $\pi_2(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}$ は点欠陥が存在することを示している。さらに、この2つのホモトピー群の自明でない元に対応するリング状の欠陥も存在する。 $\pi_3(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}$ は、無限遠で一樣な系の中には、一樣系と連続的に結ばれない構造が存在することを意味する。⁵

外部磁場が無いときの ^3He の超流動相は A 相、B 相の2つあり、それぞれ興味深い特性を持っているが、ここでは A 相に注目する。超流動秩序変数は

$$\Delta_{\alpha\beta} \propto \langle \psi_\alpha \psi_\beta \rangle \propto d_\mu [i\sigma_2 \sigma_\mu]_{\alpha\beta}, \quad d_\mu = A_{\mu i} \hat{k}^i \quad (5)$$

と書かれる。ここに σ_μ は Pauli 行列、 $\hat{k}$ は Cooper 対の相対運動量の方向ベクトルである。さて、A 相では $A_{\mu i}$ は

$$A_{\mu i} = \Delta_0 \frac{\hat{d}_\mu}{\sqrt{2}} (\hat{m} + i\hat{n})_i, \quad d^2 = 1 \quad (6)$$

と書かれる [5]。ここに $\hat{m}, \hat{n}$ は互いに直交する単位ベクトルである。これから $\hat{l} = \hat{m} \times \hat{n}$ を定義すると、 $L(r) = (\hat{m}(r), \hat{n}(r), \hat{l}(r))$ は空間の各点で右手系の正規直交系を定義する。この秩序変数の自由度

⁵これらの構造の図は例えば [2] を、偏光顕微鏡による写真は例えば [4] を見られたい。

を考えよう。簡単のために、スピン空間部分 $\hat{d}$ は考えない。(バルクでは双極子相互作用のために、 d と l は平行または反平行となる。) 今、 $L_0 = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ を基準に取った正規直交系とする。すると、任意の L は L_0 に剛体回転、すなわち $SO(3)$ の元を作用させて得られる。したがって、この系の秩序変数は群 $SO(3)$ の自由度をもっている。この系のトポロジカルな性質を調べるには、 $SO(3) \simeq \mathbf{RP}^3 = B^3 / \sim$ に注意するとよい。ここで、 $\sim$ は 3 次元球体の表面を同一視する同値関係である。3 次元の回転は、任意の軸 $\hat{n}$ の回りの θ 回転で指定されるが、これに「ベクトル」 $\theta\hat{n}$ を対応させる。この対応で $\pi\hat{n}$ と $-\pi\hat{n}$ は同じ回転を表す。これらの考察からこの空間のホモトピー群は

$$\pi_1(SO(3)) \simeq \mathbf{Z}_2, \pi_2(SO(3)) \simeq \{0\}, \pi_3(SO(3)) \simeq \mathbf{Z} \quad (7)$$

で与えられる。 ${}^3\text{He-A}$ で満たされた空間 X 中の秩序変数の場を考えよう。写像 $f: X \rightarrow SO(3)$ を **texture** とよぶ。 X の中にループ S^1 を考え、それが $SO(3)$ の中にどのように写像されるかは $\pi_1(SO(3)) = \mathbf{Z}_2$ で分類される。この非自明な元は、通常の渦糸以外に、液晶と同様の *disgyration* と呼ばれる渦を与える。 $\mathbf{Z}_2$ の演算 $g + g = e$ を利用して、中心付近では巻数 0、中心から十分離れたループにそっては巻数 2 の渦糸を作ることができる。これを **Anderson-Toulouse 渦糸** という。また、 X が円筒容器の中であると、Cooper 対の角運動量は容器の壁に垂直となり、Anderson-Toulouse 渦糸を $\hat{i}$ が容器の壁に垂直になったところで切り取った **Mermin-Ho 渦糸** ができる。Mermin-Ho 渦糸の存在は実験的にも確かめられている。

次に $X = \mathbf{R}^3$ とし、 $|x| \rightarrow \infty$ で秩序変数は同じ値、例えば L_0 をとるとする。(有限エネルギーの系では、無限遠でエネルギーはゼロとならなければならないので、これはもっともな仮定である。) すると texture は実質的に $S^3 \rightarrow SO(3)$ となり、その配置は $\pi_3(SO(3)) \simeq \mathbf{Z}$ で分類される。この $\mathbf{R}^3 \rightarrow S^3$ の操作を 1 点コンパクト化 (**one-point compactification**) という。 $\mathbf{Z}$ の非自明な元を与える秩序変数の場合は Shankar のモノポールとよばれ、 $\mathbf{RP}^3$ の元 ($\hat{e}$ まわりの θ 回転) で

$$\theta\hat{e}(r) = 2\pi f(r)r/r, (f(0) = 0, f(\infty) = 1) \quad (8)$$

と表される。

3 アルカリ原子のボース凝縮体における渦糸

3.1 アルカリ原子の BEC

1995 年に実現したアルカリ原子のボース凝縮 (BEC) は量子エレクトロニクスおよび超低温物理学の最近の話題の一つである。この系は、従来の BEC の典型的な例である超流動 ${}^4\text{He}$ に比べて以下の点で大きく異なる；

- [1] 希薄ボース気体の近似がよく成り立つ原子ガスである。
- [2] 原子は超微細スピン F の自由度をもち、秩序変数は $SO(3)$ で表される。したがって、アルカリ原子の BEC は超流動 ${}^3\text{He}$ に匹敵する豊富な構造をもつ。
- [3] 原子の種類や磁場の大きさを変えて 2 体相互作用を正にも負にもできる。
- [4] メゾスコピック・サイズのポテンシャルに閉じ込められた有限系である。

1. により、この系の **Gross-Pitaevskii** 方程式による解析が可能となり、2. により、この系には ${}^3\text{He}$ と同様の **texture** が存在する。

話を具体的にするために ${}^{23}\text{Na}$ の $|F| = 1$ 状態を考える。場の演算子は F_z の固有値 $m = 0, \pm 1$ の固有ベクトル $|m\rangle$ で展開でき

$$|\psi\rangle = \sum_{m=0,\pm 1} \psi_m |m\rangle \quad (9)$$

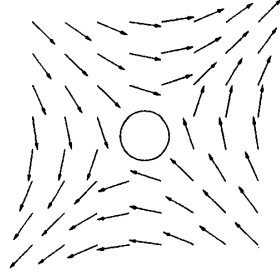


図 1: Cross disgyration. 矢印は $\hat{l}$ を表す. 中心の円は blue-detuned laser による反発ポテンシャル. 磁場 B は l と逆向きになる ([6] より).

と表される. 原子はこのスピンの付随して F と平行な磁気モーメント $\mu \simeq \mu_B/2$ をもつ. この原子に外部磁場 B が加えられると, 原子のポテンシャル・エネルギーは $U = -\mu \cdot B$ となるように思われるが, B の変化が断熱的であると, μ が B と平行か反平行かによって $U = -\mu B$ または $U = \mu B$ となる. B が空間的に極小値をとるとき, 前者は安定にトラップすることができないが, 後者は極小値付近にトラップできる. 前者を strong field seeking state (SFSS), 後者を weak field seeking state (WFSS) とよぶ.

$F = 1$ の場合は ^4He の Gross-Pitaevskii 方程式に比べ, 相互作用項が 2 つに増える. これは $F = 1$ の原子の 2 体散乱の角運動量が 0 と 2 の 2 チャンネルあるからである. 秩序変数を $\Psi_\alpha = \langle \psi_\alpha \rangle$ としよう. ここに ψ_α は $F_\alpha|\alpha\rangle = 0$ で定義される基底ベクトル $|\alpha\rangle$, ($\alpha = x, y, z$) に対する場の演算子で, その成分は空間ベクトルとして変換する. したがって

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha=x,y,z} \Psi_\alpha |\alpha\rangle \quad (10)$$

となる. 一般化された Gross-Pitaevskii 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi_\alpha + g_1 |\Psi|^2 \Psi_\alpha + g_2 \Psi^2 \Psi_\alpha^* + V(r) \Psi_\alpha + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Psi_\beta \omega_{L\gamma} \quad (11)$$

で与えられる. $V(r)$ は磁場以外のポテンシャルを表し, 最後の項は磁場との相互作用を表す.

BEC が純粋な WFSS にあるとき, 秩序変数は

$$|\Psi\rangle = \frac{f(r)}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} (\hat{m} + i\hat{n}) \quad (12)$$

と書かれる. $\hat{m}, \hat{n}$ は互いに直交する単位ベクトルで, $\hat{l} = \hat{m} \times \hat{n}$ を加えて, 3次元正規直交系となる. $\hat{l}$ は F スピンに平行な単位ベクトルとなる. $^3\text{He-A}$ と同じ議論を繰り返し, 秩序変数 $L(r) = \{m(r), n(r), l(r)\}$ の空間は $SO(3) \simeq \mathbf{RP}^3$ であることが示される.

3.2 渦糸の生成 [6]

“Cross disgyration” は渦糸の生成で重要な役割を果たす. これは BEC の閉じ込めに用いられる 4 重極磁場のもとで実現し, $\pi_1(SO(3)) \simeq \mathbf{Z}_2$ の非自明な元 g に対応する texture の一つである. 図 1 にその概略を示す. Ioffe-Pritchard 4 重極磁場で BEC を閉じ込めたとき, 原点付近における磁場は $B_\perp(r) = B_\perp(r)(\cos\phi, -\sin\phi, 0)$ で近似される. $B_\perp \propto r$ となるので, これは BEC にたいし動径方向の線型閉じ込めポテンシャルとして働く. 原点で $B_\perp = 0$ となるが, このときは WFSS と SFSS のエネ

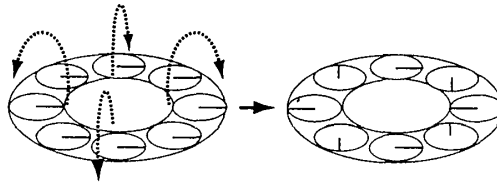


図 2: 一様な位相をもつアニュラスを反転すると巻数 2 の渦ができる. 円盤は $U(1) \subset SO(3)$ を, 線分は $U(1)$ の位相を表す ([11] より).

ルギーに縮退が起き, 系は不安定になる. そこで原子がこの領域に侵入しないように blue-detuned laser による反発ポテンシャルを導入する.

さて, 上の xy 面内の 4 重極磁場と同時に z 方向に一様な磁場 $B_z(t)$ を加える;

$$\mathbf{B} = (B_{\perp}(r) \cos \phi, -B_{\perp}(r) \sin \phi, B_z(t)). \quad (13)$$

BEC が存在する領域では $B_z(0) \gg B_{\perp}$ としよう. ここで $B_z(t) = B_0(1 - 2t/T)$ にしたがって B_z を時間 T で反転させる. その結果, 時刻 T では巻数 2 の渦糸が生成されることを以下に示す. $(\mathbf{r}, t)$ における $\mathbf{B}$ と $\hat{\mathbf{l}} \parallel -\mathbf{B}$ を

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = |\mathbf{B}| \begin{pmatrix} \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \sin \alpha \\ \cos \beta \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{l}}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} -\sin \beta \cos \alpha \\ -\sin \beta \sin \alpha \\ -\cos \beta \end{pmatrix} \quad (14)$$

と表す. 4 重極磁場に対しては $\alpha = -\phi$ である. この $\hat{\mathbf{l}}$ を与える秩序変数は

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{f}{2}(1 - \cos \beta)e^{-i(\gamma+\alpha)} \\ \Psi_0 &= -\frac{f}{\sqrt{2}}\sin \beta e^{-i\gamma} \\ \Psi_{-1} &= \frac{f}{2}(1 + \cos \beta)e^{-i(\gamma-\alpha)} \end{aligned} \quad (15)$$

で与えられる. ここに $\hat{\mathbf{l}} \parallel \mathbf{B}$ より $\tan \beta(r, t) = B_{\perp}(r)/B_z(t)$ である. $t=0$ では原点付近の磁場は z 方向を向いているので $\beta=0$ となり, Ψ_{-1} のみが有限の値をもつ. この秩序変数が nonsingular という条件から $\gamma = \alpha = -\phi$ とならなければならない.

$t=0$ でこの状態から出発すると, 時刻 T では原点付近で $\mathbf{B}$ はほぼ下向きで $\beta = \pi$ となる. すると Ψ_1 のみが有限の値をもつ. この成分の位相は $e^{-i(\gamma+\alpha)} = e^{2i\phi}$ であり, 巻数 2 の渦糸が生成されたことになる. 直感的にはアニュラスに一様な位相を与えて, それを反転すると巻数 2 の渦ができることに他ならない (図 2 を見よ).⁶ このシナリオのトポロジカルな解析について, さらに詳しくは [6,11] を見られたい.

4 非アーベル的 Berry 位相 [7,8]

Berry は連続外部パラメタ λ をもつ Hamiltonian の族 $\{H_{\lambda}\}$ が与えられたとき, λ がパラメタ空間の閉曲線を 1 周すると, 波動関数は純粋に幾何学的な位相を得ることを指摘した.

Wilczek と Zee はこれをさらに一般化し, ある準位が n 重に縮退していると, Berry 位相は $U(n)$ となることを示した [7,8]. パラメタ λ は d 次元の多様体 $\mathcal{M}$ を構成しているとする. 点 λ の局所的な座

⁶本当のシナリオではアニュラスの反転の仕方が違い, 図とは逆向きの渦となる.

標を $(\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^d)$ としよう. H_λ の i 番目のエネルギー準位を $\varepsilon_i(\lambda)$ とし, その縮重度を n_i とする. 簡単のために準位の数 は有限個 R とし, $N = \sum_{i=1}^R n_i$ とする. Hamiltonian はブロック対角 $N \times N$ 行列で与えられる. 点 $\lambda \in \mathcal{M}$ において, 固有値 $\varepsilon_i(\lambda)$ に属する n_i 次元の固有空間を $\mathcal{H}_i(\lambda)$ とし, その正規直交系を $\{|i, \alpha; \lambda\rangle\}$ ($1 \leq \alpha \leq n_i$) とする;

$$H_\lambda |i, \alpha; \lambda\rangle = \varepsilon_i(\lambda) |i, \alpha; \lambda\rangle, \langle i, \alpha; \lambda | j, \beta; \lambda \rangle = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}.$$

もちろん $\{|i, \alpha; \lambda\rangle\}$ の選び方には $U(n_i)$ の自由度がある.

さて, λ を断熱的に変化させる. 以下, 特定の部分空間 $\mathcal{H}_i$ に注目し, 添字 i は省略する. $t=0$ で系はエネルギー ε をもち, 状態は $|\psi_\alpha(0)\rangle = |\alpha; \lambda(0)\rangle$ であったとする. Schrödinger 方程式は

$$i \frac{d}{dt} |\psi_\alpha(t)\rangle = H_{\lambda(t)} |\psi_\alpha(t)\rangle \quad (16)$$

と書かれるが, その解を

$$|\psi_\alpha(t)\rangle = \sum_{\beta=1}^n \exp \left[-i \int_0^t \varepsilon(\lambda(\tau)) d\tau \right] |\beta; \lambda(t)\rangle a_{\beta\alpha}(t) \quad (17)$$

とおく. $|\psi_\alpha(t)\rangle$ の規格化条件から $a \in U(n)$ となる. 式 (18) を Schrödinger 方程式に代入すると

$$\frac{da_{\alpha\beta}}{dt} = - \sum_{\gamma=1}^n \left\langle \alpha; \lambda(t) \left| \frac{d}{dt} \right| \beta; \lambda(t) \right\rangle a_{\gamma\alpha} \quad (18)$$

が得られる. 一方, $\mathcal{H}$ における $\mathcal{H}_i$ の直交補空間の完全系を $\{|A; \lambda\rangle\}$ とすると

$$\left\langle A; \lambda(t) \left| \frac{d}{dt} \right| \alpha; \lambda(t) \right\rangle = 0 \quad (19)$$

が示される. 式 (19) の解は形式的に

$$a(t) = \mathcal{P} \exp \left[i \int_0^t A(\tau) d\tau \right], \quad A_{\alpha\beta}(t) = i \left\langle \alpha; \lambda(t) \left| \frac{d}{dt} \right| \beta; \lambda(t) \right\rangle \quad (20)$$

で与えられる. $\mathcal{P}$ は順序積を表す. ここで, 「ゲージ場」を

$$A_{\mu, \alpha\beta} = i \left\langle \alpha; \lambda(t) \left| \frac{d}{d\lambda^\mu} \right| \beta; \lambda(t) \right\rangle \quad (21)$$

で導入すると

$$a(t) = \mathcal{P} \exp \left[i \int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} A_\mu d\lambda^\mu \right] \quad (22)$$

と表される. ゲージ場 A_μ は, 反エルミート ($A_\mu^\dagger = -A_\mu$) であることに注意しよう. したがって A_μ は $U(n)$ の Lie 代数 $\mathfrak{u}(n)$ に値を取る⁷.

さて, $\lambda(t)$ として $\mathcal{M}$ におけるループ γ を考えよう; $\gamma(0) = \gamma(T)$. このときは

$$|\psi_\alpha(T)\rangle = \sum_{\beta=1}^n \exp \left[-i \int_0^T \varepsilon(\lambda(\tau)) d\tau \right] |\psi_\beta(0)\rangle a_{\beta\alpha}(T) \quad (23)$$

⁷ U がユニタリーであるとは $U^\dagger = U^{-1}$ を満たすことである. $U = \exp A$ とかかれたとしよう. すると A は反エルミートである. 実際, $U^\dagger = \exp A^\dagger = \exp(-A) = U^{-1}$. したがって, ユニタリー群のリー代数は, 反エルミート行列で与えられる. さらに U が $\det U = 1$ を満たすとき $U \in SU(n)$ である. このときは, $\det U = \det \exp A = \exp \operatorname{tr} A = 1$ であるから $\operatorname{tr} A = 0$, すなわち A は traceless 行列となる. $U(n)$ の (実) 自由度は n^2 , $SU(n)$ の (実) 自由度は $n^2 - 1$ であることに注意する.

となる．最初の指数関数は通常の力学的な位相を表すが，最後のユニタリ行列を

$$\Gamma[\gamma] \equiv a(T) = \mathcal{P} \exp \left[i \oint_{\gamma} A_{\mu} d\lambda^{\mu} \right]. \quad (24)$$

と表す． $U(n)$ 行列 $\Gamma[\gamma]$ を非アーベル的 **Berry 位相**，または量子ホロノミーと言い，次章で中心的役割を果たす． $\gamma(0) = \lambda_0$ から出発するループの集合を λ_0 におけるループ空間といい

$$L(\mathcal{M}) = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M} | \gamma(0) = \gamma(1) = \lambda_0\} \quad (25)$$

と表す．このとき

$$\text{Hol}(A) = \{\Gamma[\gamma] | \gamma \in L(\mathcal{M})\} \quad (26)$$

をホロノミー群という [2]．一般に $\text{Hol}(A) \subset U(n)$ であるが， $\text{Hol}(A) = U(n)$ のとき， A は既約 (irreducible) であるといわれる．

5 ホロノミック量子コンピュータ

5.1 量子計算 [9]

まず，量子計算の原理について簡単に紹介しよう．古典的計算で情報の単位はビット，すなわち 0 か 1 である．ところが量子系ではこれらの 重ね合わせ

$$|\psi\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle, \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_i \in \mathbb{C} \quad (27)$$

が可能となる．これを **qubit** という．各 qubit の量子状態は $\mathbb{C}^2$ のベクトルで表され， N 個の qubit 全体の量子状態は $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N} = \mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2$ のベクトルで表される．ここに $\otimes$ は Kronecker 積 (テンソル積) である．この重ね合わせと，多数の qubit があるときの絡み合い状態 (entangled state) を利用して指数関数的に速い計算を行うのが量子計算機である．量子計算機は，qubits，量子アルゴリズムを表すユニタリ演算子，結果を引き出す観測からなる．

ホロノミック量子コンピュータ (Holonomic quantum computer = HQC) は， N -qubit 系のユニタリ変換を，前章の量子ホロノミーを用いて実現するものである．

5.2 ホロノミック量子コンピュータ (HQC) [10]

HQC を実現するのに重要なのは，制御多様体 $\mathcal{M}$ の局所座標 λ でパラメタ化されたハミルトニアン族と，その縮退した固有空間 $\mathcal{H}_i(\lambda)$ である．情報は $\mathcal{H}_i$ のベクトル $|\psi_{in}\rangle$ としてコード化され， λ が $\mathcal{M}$ の中でループ上を断熱的に運動すると，このベクトルはユニタリ変換 U を受ける (図 3)．こうして得られたベクトル $|\psi_{out}\rangle = U|\psi_{in}\rangle$ は，このユニタリ変換に対応する演算の結果を与える．特定の演算は，ループの特定の選び方に対応している．

$\mathcal{F} = \{H_{\lambda} | \lambda \in \mathcal{M}\}$ を量子コンピュータを表すハミルトニアン族とする． $\mathcal{M}$ を d 次元制御多様体， $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^d)$ をその局所座標系とする． H_{λ} の各準位 $\varepsilon_i(\lambda)$ の縮退度 n_i は $\mathcal{M}$ 上不変とする．すなわち n_i は λ によらない． i 番目の固有空間 $\mathcal{H}_i(\lambda)$ は基底ベクトル $\{|i, \alpha; \lambda\rangle\}_{1 \leq \alpha \leq n_i}$ で張られる．また，縮退度を保存するために， $\mathcal{M}$ 上で準位の交差は起こらないとする； $i \neq i' \rightarrow \varepsilon_i(\lambda) \neq \varepsilon_{i'}(\lambda), \forall \lambda \in \mathcal{M}$ ．さて，ある特定の i に属する部分空間 $\mathcal{H}_i$ を考えよう．色々な計算を実行するためには，縮退度 n_i ができるだけ大きな空間を選ばばよい． N -qubit 系は $n_i = 2^N$ と選べば実現される．さて，次の問いを考え

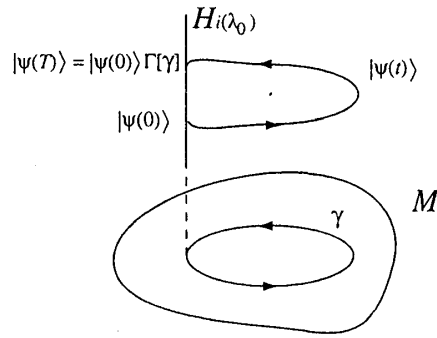


図 3: 制御多様体 $\mathcal{M}$ のループ γ を一周すると, 初期状態 (入力) はユニタリー変換 $\Gamma[\gamma]$ を受ける (出力).

よう.

問 ループ γ をうまく選ぶと, どれだけの演算が可能か?

ここで, $\text{Hol}(A)$ の群としての性質が重要となる. $\Gamma[\gamma]$ は

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Gamma[\gamma_2 \circ \gamma_1] = \Gamma[\gamma_2]\Gamma[\gamma_1] \\ (2) \quad & \Gamma[\gamma_0] = I \\ (3) \quad & \Gamma[\gamma^{-1}] = \Gamma[\gamma]^{-1} \end{aligned} \tag{28}$$

を満たす. ただし, $\gamma_0(t) = \lambda_0$ は定値写像. このように, $L(\mathcal{M})$ のループを組み合わせることにより, 各ループが表す演算を続けて行うことができる. また, ループを逆にたどることにより, 逆演算も可能となる.

もし $\text{Hol}(A)$ が既約であれば, すべてのユニタリー行列, すなわち量子計算はホロノミーをもちいて実現できる. 規約性に関しては, 以下の Ambrose-Singer の定理 [2] が重要となる.

定理 (Ambrose and Singer) $P(M, G)$ を連結多様体 M 上の G -束とする. 点 $\lambda_0 \in P$ におけるホロノミー群 $\text{Hol}(A)$ の Lie 代数 $\mathfrak{h}$ は $\Omega_u(X, Y)$, $X, Y \in H_u P$ の形のすべての元が張る部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に一致する. ただし $u \in P$ は u_0 と同じ horizontal lift の点である.

HQC の構成は本質的に幾何学的であり, たとえば (断熱性が成り立つ限り) ループ上を回る速さなどには影響されない. これらのことから HQC は decoherence などのエラーにたいし強い量子コンピュータであることが期待される.

講義では, 光学的 HQC についても触れたが, 紙面が尽きてしまったので省略する.

6 あとがき

物性論で用いられるトポロジーと微分幾何学の概念のうち, ホモトピーとホロノミーについていくつか例をあげ解説した. とくに, $\pi_1(SO(3)) \simeq \mathbf{Z}_2$ を用いてアルカリ原子の BEC 中に連続的に渦を作る方法を詳しく述べた. また量子系におけるホロノミー (非アーベル的 Berry 位相) を用いて量子コンピュータを実現する方法を紹介した. これらの2つのテーマは全く独立であるように思われるが, 密接に関係している. BEC で幾何学的に構成された渦は, 磁場の変化に伴う Berry 位相とみなせる [11]. また BEC を用いた量子計算も提唱されているのである.

最後に, 大見哲巨氏 (京都大学), 藤井一幸氏 (横浜市立大学), 佐久間一浩氏 (近畿大学) には日頃の議論を感謝したい.

参考文献

- [1] N.D.Mermin, Rev. Mod. Phys. **51** (1979) 591.
- [2] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing (Bristol and New York, 1990). 前半は中原, 佐久間訳「理論物理学のための幾何学とトポロジー I」ピアソン・エデュケーション (2000). II は近刊 (2001).
- [3] S. Minami, Prog. Theor. Phys. **62** (1979) 1128.
L.H. Ryder, J. Phys. A: Math. Gen. **13** (1980) 437.
- [4] S. Chandrasekhar, Liquid Crystals, Cambridge Univ. Press (Cambridge and New York, 1992).
H.-R. Trebin, Adv. in Phys. **31** (1982) 195.
I. Chuang *et al.* Science **251** (1991) 1336.
- [5] 恒藤敏彦, 「超伝導・超流動」岩波 (1993)
D. Vollhardt and O. Wölfle, *The Superfluid Phases of Helium 3*, Taylor and Francis (1990).
- [6] T. Isoshima, M. Nakahara, T. Ohmi and K. Machida, Phys. Rev. A **61** (2000) 063610.
- [7] 谷村 省吾, “トムとベリー”, 素粒子論研究 **85** (1992) 1.
- [8] A. Shapere and F. Wilczek, *Geometric Phases in Physics*, World Scientific (Singapore, 1989).
- [9] 量子計算に関する最近の総合報告は, 例えば,
細谷暁夫「量子コンピュータの基礎」サイエンス社 (1999)
M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge Univ. Press (2000). (ちなみに, この I. Chuang は [4] の I. Chuang と同一人物である.)
E. Rieffel and W. Polak, quant-ph/9809016, S.J. Lomonaco, Jr., quant-ph/00070445, A. Ekert, P. Hayden and H. Inamori, quant-ph/0011013 などを参照されたい.
- [10] P. Zanardi and M. Rasetti, Phys. Lett. A **264** (1999) 94.
J. Pachos, P. Zanardi and M. Rasetti, Phys. Rev. A **61** (1999) 010305(R).
J. Pachos and P. Zanardi, quant-ph/0007110.
K. Fujii, J. Math. Phys. **41** (2000) 4406, quant-ph/0004102, quant-ph/0005129, quant-ph/0101102, quant-ph/0103011, quant-ph/0107128.
- [11] 中原幹夫, 大見哲巨, “アルカリ原子の BEC における渦糸の生成”, 日本物理学会誌 出版予定.