

1

semigroup ring の quotient ring

石田正典

N を rank $r > 0$ の free $\mathbb{Z}$ -module, M をその dual すなわち $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ とする。 $\mathbb{K}$ を任意の体とするとき, $\mathbb{K}$ 上の affine torus embedding X_{π} ($\dim X = r$) は, cone $N_{\mathbb{R}} (= N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \ni \pi = \mathbb{R}_0 a_1 + \dots + \mathbb{R}_0 a_n$ ($a_1, \dots, a_n \in N$) により $X_{\pi} = \text{Spec}(\mathbb{K}[M \cap \pi^{\vee}])$ と書ける。但し $\mathbb{R}_0 = \{c \in \mathbb{R}; c \geq 0\}$, $M_{\mathbb{R}} \cap \pi^{\vee} = \{x; \langle x, a \rangle \geq 0 \ \forall a \in \pi\}$ である。 X_{π} には torus $T = \text{Spec}(\mathbb{K}[M]) \subset X_{\pi}$ が自然に作用している。 $\Gamma(\pi) = \{\text{faces of } \pi\}$ とおくと次の関係がある。

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(\pi) & \xleftrightarrow{1:1} & \left\{ \begin{array}{l} \text{homog. quotient} \\ \text{int. domains} \\ \text{of } \mathbb{K}[M \cap \pi^{\vee}] \end{array} \right\} & \xleftrightarrow{1:1} & \left\{ \begin{array}{l} T\text{-stable ir.} \\ \text{red. closed} \\ \text{subschemes of } X_{\pi} \end{array} \right\} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \sigma & \longmapsto & S_{\sigma} = \mathbb{K}[M \cap \pi^{\vee} \cap \sigma^{\perp}] & \longrightarrow & \text{Spec}(S_{\sigma}) \end{array}$$

但し $\sigma^\perp = \{x \in M_R ; \langle x, a \rangle = 0 \quad \forall a \in \sigma\}$ である。又 $\dim \sigma + \dim S_\sigma = r \quad (\forall \sigma \in \Gamma(\pi))$ となる。

[定義] $\Gamma(\pi)$ の部分集合 Σ について

$$\Sigma : \begin{cases} \text{star closed} & \Sigma \ni \sigma, \Gamma(\pi) \ni \tau, \tau \succ \sigma \Rightarrow \Sigma \ni \tau \\ \text{star open} & \Sigma \ni \sigma, \Gamma(\pi) \ni \tau, \sigma \succ \tau \Rightarrow \Sigma \ni \tau \\ \text{locally star closed} & \Sigma \ni \rho, \sigma, \Gamma(\pi) \ni \tau, \rho \succ \tau \succ \sigma \Rightarrow \Sigma \ni \tau \end{cases}$$

このとき次の関係がある。

$$\begin{array}{ccccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{star closed} \\ \text{subset of} \\ \Gamma(\pi) \end{array} \right\} & \xleftrightarrow{1:1} & \left\{ \begin{array}{l} \text{reduced homog.} \\ \text{quotient ring} \\ \text{of } k[M \cap \pi^\vee] \end{array} \right\} & \xleftrightarrow{1:1} & \left\{ \begin{array}{l} T\text{-stable} \\ \text{red. closed} \\ \text{subsch. of } X_\pi \end{array} \right\} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma & \longmapsto & S_\Sigma = k\left[\bigcup_{\sigma \in \Sigma} M \cap \pi^\vee \cap \sigma^\perp\right] & \longmapsto & \text{Spec}(S_\Sigma) \end{array}$$

[問題] S_Σ がいつ Cohen-Macaulay あるいは Gorenstein となるか。

star closed subset $\Sigma \subset \Gamma(\pi)$ を fix し $\Sigma = \bigcup \Sigma_i$, $\Sigma_i = \{\sigma \in \Sigma, \dim \sigma = i\}$ とする。

$$K^i = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_i} \mathbb{R}[M \cap \pi^\vee \cap \sigma^\perp] \quad (i = 0, \dots, r)$$

とおくと K^i は free $\mathbb{Z}$ -module M に grade をもつ S_Σ -module である。coboundary map δ^i を

$$\begin{array}{ccc} \delta^i: K^i & \longrightarrow & K^{i+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_i} & \longmapsto & \left(\sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_i \\ \tau \supset \sigma}} [\sigma, \tau] Q_\sigma^\tau(f_\sigma) \right)_{\tau \in \Sigma_{i+1}} \end{array}$$

により定義する。但し $[\sigma, \tau]$ は各 $\sigma \in \Gamma(\pi)$ に一つづつ orientation を定めたときの結合係数 (± 1 または 0) で Q_σ^τ は quotient map $\mathbb{R}[M \cap \pi^\vee \cap \sigma^\perp] \longrightarrow \mathbb{R}[M \cap \pi^\vee \cap \tau^\perp]$ である。

[定理] $K^\bullet = (\dots \rightarrow 0 \rightarrow K^0 \xrightarrow{\delta^0} K^1 \rightarrow \dots \xrightarrow{\delta^{r-1}} K^r \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$ は S_Σ の dualizing complex である。

dualizing complex について かくしくは
 R. Hartshorne [Residues and Duality] 参照.
 少なくとも体上 essentially of finite type の
 環には存在し, noetherian ring A が $\text{Spec } A$
 connected で $R^\bullet$ が A の dualizing complex
 とすると.

$$A : \text{C.M.} \iff \exists d, H^i(R^\bullet) = 0 \quad i \neq d$$

$$A : \text{Gorenstein} \iff \exists d, H^i(R^\bullet) = 0 \quad i \neq d$$

$$H^d(R^\bullet) : \text{rank 1 proj. } A\text{-module}$$

$H^i(K^\bullet)$ が M -graded S_Σ -module であることに注
 意すると次の系を得る。

[系 1]

$$S_\Sigma : \text{C.M.} \iff \exists d, H^i(K^\bullet) = 0 \quad i \neq d$$

$$S_\Sigma : \text{Gorenstein} \iff \exists d, H^i(K^\bullet) = 0 \quad i \neq d$$

$$H^d(K^\bullet) \simeq S_\Sigma$$

locally star closed subset $\Gamma(\pi) \supset \Phi = \bigcup_{i=0}^r \Phi_i$,
 $\Phi_i = \{\sigma \in \Phi; \dim \sigma = i\}$ に対して

$$C^i(\Phi, \mathbb{R}) = \bigoplus_{\sigma \in \Phi_i} \mathbb{R}[\sigma]$$

とあき

$$\begin{array}{ccc} C^i(\Phi, k) & \xrightarrow{\delta^i} & C^{i+1}(\Phi, k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\sigma] & \longmapsto & \sum_{\tau \in \Phi_{i+1}} [\sigma, \tau][\tau] \end{array}$$

で k -linear homomorphism δ^i を定義すると
 $C^*(\Phi, k)$ は complex となることが証明できる。

$\Sigma \ni \rho$ に対して $\Sigma_\rho = \{\sigma \in \Sigma; \rho > \sigma\}$ と
 おくと Σ_ρ は $\Gamma(\pi)$ の locally star closed subset
 である。

さて K^i は M -graded S_Σ -module で $\delta^i: K^i \rightarrow K^{i+1}$ は degree 0 の homomorphism である
 から各 $m \in M$ に対して complex K^* の m -factor K_m^* を考えることができる。

[命題] $m \notin M \cap \pi^\vee$ 又は $m \in M \cap \pi^\vee$ であ
 り $\rho = \pi \cap m^\perp \notin \Sigma$ であれば K_m^* は 0-complex
 であり $m \in M \cap \pi^\vee$ かつ $\rho = \pi \cap m^\perp \in \Sigma$ であ
 れば K_m^* は $C^*(\Sigma_\rho, k)$ と同型である。

これにより 系1の S_Σ -C.M. の条件は、次

のように言いかえられる。

[系2] S_{Σ} が Cohen-Macaulay であるための必要かつ十分条件は ある整数 d があって $H^i(\Sigma_P, \mathbb{R}) = 0$ がすべての $i \neq d$ 及び $P \in \Sigma$ に対して成立することである。

π が non-singular すなわち $\mathbb{R}[M \cap \pi^{\vee}]$ が $\mathbb{R}$ 上 r 変数の多項式環のとき、この系2は Gerald A. Reisner の [Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings] の結果と同じである。

Gorenstein性については次のことがいえる。

[系3] ある整数 d があって $\forall P \in \Sigma$ に対し

$$\dim_{\mathbb{R}} H^i(\Sigma_P, \mathbb{R}) = \begin{cases} 1 & i=d \\ 0 & i \neq d \end{cases}$$

であれば S_{Σ} は Gorenstein である。また Σ のすべての minimal face を含む Σ の元が π だけであるとき逆も成り立つ。

[例1] $\Sigma = \Gamma(\pi)$ とおけば $S_\Sigma = k[M \cap \pi]$ であり, 系2の条件を満たすことがわかるので, $k[M \cap \pi]$ の Cohen-Macaulay 性がいえる。これは M. Hochster [1] で最初に証明された事実である。

[例2] $\Sigma = \Gamma(\pi) \setminus \{0\}$ とおくと系3の条件を満たすことが要易にわかるので S_Σ は Gorenstein となる。 $\text{Spec}(S_\Sigma) = X_\pi \setminus T$ であるから, *tors embedding* から *tors* を除いたところが Gorenstein であることがわかる。

なお complex K はある特殊な場合について中村 [4] で Cohen-Macaulay 性の証明に使われている。

文 献

- [1] M. Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytope. Ann. of Math. 96 (1972), 318-337.
- [2] M. Hochster, Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes. Ring Theory II, Lecture Note in Pure and App. Math. 26 (1977), Dekker, 171-223
- [3] Gerald A. Reisner, Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings. Advances in Mathematics 21, 30-49 (1976)
- [4] I. Nakamura, On moduli of stable quasi abelian varieties. Nagoya Math. J. Vol. 58 (1975), 149-214
- [5] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Toroidal Embeddings. Springer Lecture Note 339 (1973)
- [6] R. Hartshorne, Residues and Duality. Springer Lecture Note 20 (1966)
- [7] K. Miyake, T. Oda, Torus embeddings and applications. Tata Lecture Note, to appear