

状態のフラクタル次元を用いたカオティックな系の特徴付け

東京理科大学 理工学部 大矢雅則 松岡隆志

序論

状態のフラクタル次元とは、Mandelbrotのフラクタル幾何学[1]とKolmogorovの確率変数の ε -エントロピー[2]の概念をベースとして、著者の一人により一般の量子力学系（ C^* -力学系）の状態に対し導入された概念[3,4,5]である。

Mandelbrotは、「The Irregular and Fragmented in Nature（自然に在る不規則かつ断片的なもの）」を科学の土台に載せるため、フラクタル幾何学を提唱した[1]。彼の着眼は、従来、純粋に数学の分野の関心事とされていた非整数値をとる次元に自然科学の息吹を吹き込んだ、という点で特筆される。彼は、Hausdorff次元などの非整数値をとり得る次元が、彼の一連のスケーリング則に関する研究を通して、自然が持つ自己相似性の構造を特徴付ける指標として採用できることを示した。彼が提唱するフラクタル幾何学も、それ自身は純粋に数学的な構造をもつものであるが、そこで彼は、数学的厳密性には欠けるものの、「自然は尺度のスケール変換に対してべき乗則を有する」ということから、近似的に求まる"effective dimension"という次元を用いて、自然の実際の形態のもつ複雑さと数学的な集合としてのフラクタル図形との対応関係を論じるのである。ここに、自然現象の有する一般的な特質をフラクタル幾何学という形で提示して見せたことによる彼の新しい概念の意義が生じるのであるが、と同時に、「フラクタル次元を用いて現象を解析するためには、その対象とする系を理想化し自己相似な図形を準備することが必要」という、その手法としての限界もまた見てとれるのである。

では、この汎用性の高いと考えられるフラクタルという概念をどうすればより広範な科学の分野に適用していくことができるだろうか。このような着眼はごく自然な発想であり、また重要なモチベーションであるともいえる。すなわち、このフラクタルという概念をいったん幾何学図形から切り離し、適切な仕方でより一般的、かつ厳密に特徴付けることができれば、そこからフラクタル的な現象の新たな数理的側面が見えてくる可能性が考えられるのである。状態のフラクタル次元の定式化は、こうした試みの一つとして位置付けることができる。実際には、状態のフラク

タル次元は、幾何学図形のフラクタル次元の一つである容量次元に着目することによって、その拡張という形で与えられる。いま、集合 X を n 次元ユークリッド空間において、直径 ε のある凸集合で被覆することを考えよう。もし、集合 X を被覆するのに必要な凸集合の最小個数を $N(\varepsilon)$ とすれば、 X の容量次元は次のように定義される[6]。

$$d_c(X) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

ここで、 $\log N(\varepsilon)$ は、Kolmogorov、Tihomirov によって導入された距離空間上の ε -エントロピー[7]と呼び得るものであるが、この距離空間上の ε -エントロピーの代わりに、やはり Kolmogorov によって定式化された確率変数の ε -エントロピー[2]を、 C^* -力学系上にその相互エントロピーを用いて拡張することにより[3]、状態のフラクタル次元は導入される[4, 5]。これは相空間上の測度や密度作用素で表現されるような状態を特殊な場合として含む十分に一般的なものであり、それ故、通常の古典系[8, 9, 10, 11]や量子系[12]の状態に対して、状態のフラクタル次元による解析が可能になるのである[13]（フラクタル次元によるガウス測度の解析は、同載の「井上啓；"ガウス状態のフラクタル次元"」に詳しい）。本稿では、古典離散系における状態のフラクタル次元の適用例[8, 9, 10, 13]を紹介する。

1. 古典離散系の状態のフラクタル次元

古典離散系は、 n 個の事象からなる集合 $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ と、その事象の生起する確率分布 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ ($\sum p_i = 1, p_i \geq 0$) の組 (X, P) （完全事象系）で表され、確率分布 P を古典離散系の状態と呼ぶ。状態 P の ε -エントロピーは完全事象系の相互エントロピーを用いて定義される。いま、二つの古典離散系 (X, P) 、 (Y, Q) の複合事象系 $X \times Y$ の合成状態 (i.e., 同時確率分布) Φ を

$$\Phi = \{r(i, j); 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

とする。このとき、 X と Y の間の相互エントロピーは以下のように定義される。

$$I(X, Y) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_{ij} \log \frac{r_{ij}}{p_i \times q_j} \quad (1.1)$$

この相互エントロピーは、 X を入力空間、 Y を出力空間とすると、状態 P の情報量（エントロピー）のうちどれ程が正確に状態 Q に伝達されたかを表す量である。以下簡単のため、 $n = m < \infty$ として議論する。

さて、合成状態 Φ は状態 P 、 Q の同時確率分布であるから、

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} = p_i, \quad \sum_{i=1}^n r_{ij} = q_j \quad (1.2)$$

を満たす。よって、相互エントロピー $I(X, Y)$ は、 P 、 Q 、 Φ の関数として、 $I(X, Y) = I(P, Q; \Phi)$ と表すことができる。このとき、状態 P の ε -エントロピー $S(P; \varepsilon)$ は次で与えられる[04]。

$$S(P; \varepsilon) = \inf \{ J(P, Q); \|P - Q\| \leq \varepsilon \} \quad (1.3)$$

ただし、 $\|P - Q\| \equiv \sum_{i=1}^n |p_i - q_i|$ かつ、

$$J(P, Q) \equiv \sup \{ I(P, Q; \Phi); \Phi \in \mathcal{P}(P, Q) \} \quad (1.4)$$

であり、集合 $\mathcal{P}(P, Q)$ は条件式 (1.2) を満たすような合成状態 Φ の全体である。また、 $J(P, Q)$ は極大相互エントロピーと呼ばれるが、これは状態 P と Q の合成状態 Φ (i.e., 条件式 (1.2) を満たす P と Q の同時確率分布) はただ一つとは限らないため、その相互エントロピーが極大となるものをして P から Q へ移すことのできる情報量と定めたものである。ここで、 $\sup$ を取るのは、例えば、通信理論などにおいては入力空間から出力空間へ移すことのできる情報量は大きいほうが好ましいからである。さらに、 $J(P, Q)$ の $\inf$ で ε -エントロピー $S(P; \varepsilon)$ が与えられるのは、距離 ε 以内の状態に移すことができる情報量としてその最低限の情報量を保証するためである。すなわち、状態 P の ε -エントロピー $S(P; \varepsilon)$ とは、状態 P のエントロピーをその状態 P から距離 ε だけ離れた状態 Q を通して、二つの状態の相互エントロピーとして評価するものであり、これはKolmogorovによって導入された確率変数の ε -エントロピーの概念 [2] の状態への拡張と見てとれるものである。

ところで、入力空間から出力空間へ状態が変移するという視点に立ったとき、相互エントロピー $I(X, Y)$ は、初期状態 P から終状態 Q への変換 (チャネル) Λ^* を用いて定式化することも可能である。すなわち、Shannon に従えば、チャネル Λ^* は P から Q への遷移確率行列 $(p(j|i))$ で与えられ、 $q_j = \sum_i p(j|i)p_i$ を満たすので、 P と Q の相関を表わす合成状態 $\{r_{ij}\}$ は、 $\{r_{ij}\} = \{p(j|i)p_i\}$ とチャネルを用いて表わすことができる。よって、初期状態 P とチャネル Λ^* に間する相互エントロピー $I(P; \Lambda^*)$ は、

$$I(P; \Lambda^*) = \sum_{i,j} p(j|i)p_i \log \frac{p(j|i)}{q_j} \quad (1.5)$$

で与えられる。これは、式 (1.1) に一致することは明らかである。このチャネル Λ^* を用いた状態の ε -エントロピーの表現を以下に与えよう[04]。

いま、 $\mathfrak{C}$ をチャネル全体の集合とし、状態 P に関するチャネル Λ^* の同値類 $\mathfrak{C}(P; \Lambda^*)$ と、その同値類の $\sup$ を取ることによって、 P と Λ^* に関する極大相互エントロピー $J(P; \Lambda^*)$ を次のように与える。

$$\mathfrak{C}(P; \Lambda^*) \equiv \{\Gamma^* \in \mathfrak{C}; \Gamma^* P = \Lambda^* P\} \quad (1.6)$$

$$J(P; \Lambda^*) \equiv \sup \{I(P; \Gamma^*); \Gamma^* \in \mathfrak{C}(P; \Lambda^*)\} \quad (1.7)$$

状態 P とチャネル Λ^* を用いた ε -エントロピー $S_{\Lambda^*}(P; \varepsilon)$ は、式(1.7)を用いて、

$$S_{\Lambda^*}(P; \varepsilon) \equiv \inf \{J(P; \Lambda^*); \Lambda^* \in \mathfrak{C}, \|P - \Lambda^* P\| \leq \varepsilon\} \quad (1.8)$$

と定義できる。このとき、古典離散系においては、

$$S_{\Lambda^*}(P; \varepsilon) = S(P; \varepsilon)$$

が成立する[O4]。従って、状態の ε -エントロピーは、式(1.3)、(1.8)のどちらの表現を用いても同じになるが、一般にこれら二つの ε -エントロピーが等しいとは限らない。特に、量子系においては、チャネル表現による ε -エントロピーの方が、情報量の尺度としてはより適しているようである。以下、これら二つの ε -エントロピーは区別せず、ともに $S(P; \varepsilon)$ として用いることにする。

この状態の ε -エントロピー $S(P; \varepsilon)$ を用いて、古典離散系の状態のフラクタル次元は、次のように与えられる[5]。

[定義1-1] (1) オーダー ε の容量次元；

$$d_c(P; \varepsilon) \equiv \frac{S(P; \varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \quad (1.9)$$

(2) オーダー ε の情報次元；

$$d_I(P; \varepsilon) \equiv \frac{S(P; \varepsilon)}{S(P)} \quad (1.10)$$

ただし、 $S(P)$ は状態 P のエントロピー (i.e., $S(P) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$)。

ここで、 $\|P - \Lambda^* P\| = \|P - Q\| = \varepsilon$ のとき、チャネル Λ^* に対応する推移確率行列 $(p(j|i))$ を、

$$\sum_{i=1}^n p(j|i)p_i = \begin{cases} q_j = p_j & (j \neq k, l) \\ q_k = p_k + \frac{\varepsilon}{2} \\ q_l = p_l - \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad (1.11)$$

と与えられるものに制限すると、次の定理が成立する[9, 13, 14]。

< 定理 1 - 2 > チャネル Λ^* を式 (1. 11) で与えられるチャネルに限れば、

$$S(P; \varepsilon) = S(P) - \left(p_{\max} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \log \left(p_{\max} + \frac{\varepsilon}{2} \right) + p_{\max} \log p_{\max} + \frac{\varepsilon}{2} \log \frac{\varepsilon}{2} \quad (1. 12)$$

ただし、 $p_{\max} = \max\{p_1, \dots, p_n\}$ 、 $0 < \frac{\varepsilon}{2} < \min\{p_1, \dots, p_n\}$ 。

一般に、任意のチャネルは、式 (1. 11) のチャネルの組み合わせとして書けるので、式 (1. 12) は、 ε -エントロピー $S(P; \varepsilon)$ の基本的な特性を表わすものと見ることができ。また現在、筆者達の間では、より一般的なチャネルにおけるその計算式の導出も試みている[14]が、本稿では、式 (1. 12) を用いた状態のフラクタル次元によるカオティックな系の解析結果[8, 9, 10, 13]を紹介する。

2. 状態のフラクタル次元によるクレータ及び河川の解析[8, 13]

月の海には様々な大きさのクレータが存在する。表 (2. 1) は Baldwin によってまとめられた、月のいろいろな海におけるクレータの頻度データである[15]。その直径が 2^{i-1} マイルから 2^i マイル ($i=1, 2, \dots, 7$) に入るクレータの個数がそれぞれ示されている。

	直径 (マイル=1.6km)							面積 (km ²)
	1 ~ 2	~ 4	~ 8	~ 16	~ 32	~ 64	~ 128	
雨の海	199	117	37	10	5	1	0	864000
晴の海	88	41	7	1	1	0	0	318000
豊かの海	66	34	28	6	3	1	1	311000
静かの海	89	57	39	11	6	0	1	402000
湿りの海	111	64	27	11	0	1	0	656000
神酒の海	26	16	2	1	0	0	0	96400
危機の海	39	15	6	4	0	0	0	165000
嵐の海	60	31	11	3	2	0	0	31500
寒気 of 海	103	68	41	15	5	2	0	503500

表 (2. 1) 各々の月の海に於けるクレータの直径の頻度データ

いま、縦軸を直径 r 以上のクレータの個数 $N(r)$ (10^5 km^2 あたり)、横軸を直径 r として、その両対数グラフ上にデータをプロットをすると、全ての海で、それはほ

は一直線上に並び、式(2.1)の関係式が成立する。

$$N(r) \propto r^{-D} \quad (2.1)$$

このとき、直線の傾きは全ての海で $D \approx 2.0$ となる[15]。この D が、Mandelbrot のいうところの "effective dimension" であり、自然の形状から実際に求められるフラクタル次元である。すなわち、月面クレータのフラクタル次元は全ての海で等しく、ほぼ2.0といえることができる。ただし、この例からもわかるように、それはあくまで有限範囲の r における近似的な値であり、数学的な厳密さは犠牲にされている。

次に、月面クレータの状態のフラクタル次元を計算するために、表(2.1)を用いて、完全事象系を設定する。すなわち、事象 X_i を直径が 2^{i-1} マイルから 2^i マイルのクレータ、確率分布 p_i をクレータ X_i の頻度分布とする。表(2.2)は、表(2.1)を用いて作成した、各々の海における完全事象系の一覧である。状態 $\{p_i\}$ は様々な大きさのクレータの生成状況を特徴付ける分布となっている。

完全事象系	X_1 p_1	X_2 p_2	X_3 p_3	X_4 p_4	X_5 p_5	X_6 p_6	X_7 p_7
雨の海	($\frac{199}{369}$	$\frac{117}{369}$	$\frac{37}{369}$	$\frac{10}{369}$	$\frac{5}{369}$	$\frac{1}{369}$	0)
晴の海	($\frac{88}{138}$	$\frac{41}{138}$	$\frac{7}{138}$	$\frac{1}{138}$	$\frac{1}{138}$	0	0)
豊かの海	($\frac{66}{139}$	$\frac{34}{139}$	$\frac{28}{139}$	$\frac{6}{139}$	$\frac{3}{139}$	$\frac{1}{139}$	$\frac{1}{139}$)
静かの海	($\frac{89}{193}$	$\frac{57}{193}$	$\frac{39}{193}$	$\frac{11}{193}$	$\frac{6}{193}$	0	$\frac{1}{193}$)
湿りの海	($\frac{111}{214}$	$\frac{64}{214}$	$\frac{27}{214}$	$\frac{11}{214}$	0	$\frac{1}{214}$	0)
神酒の海	($\frac{26}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{45}$	0	0	0)
危機の海	($\frac{39}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{4}{64}$	0	0	0)
嵐の海	($\frac{60}{107}$	$\frac{31}{107}$	$\frac{11}{107}$	$\frac{3}{107}$	$\frac{2}{107}$	0	0)
寒気 of 海	($\frac{103}{234}$	$\frac{68}{234}$	$\frac{41}{234}$	$\frac{15}{234}$	$\frac{5}{234}$	$\frac{2}{234}$	0)

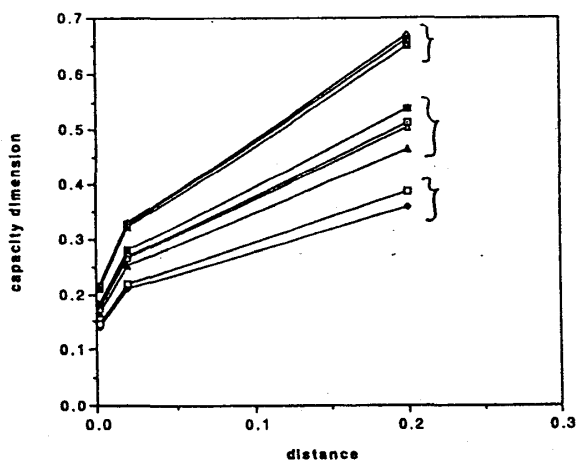
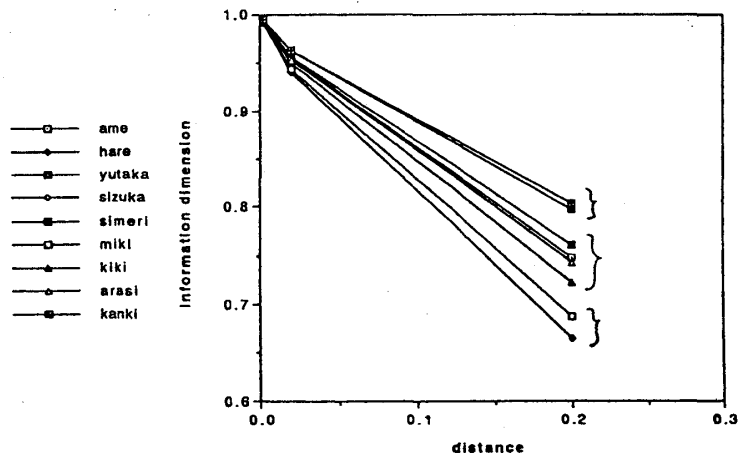
表(2.2) 月の海の完全事象系

表(2.2)を用いて、状態 $\{p_i\}$ のエントロピー、 $\varepsilon = 0.002$ の容量次元、情報次元を計算し、まとめたものが表(2.3)である。

海の名前	エントロピー	容量次元	情報次元
静かの海	1.338742	0.2142705	0.9946705
寒気の家	1.324491	0.2119848	0.9946483
豊かの海	1.310290	0.2096875	0.9945325
湿りの海	1.140318	0.1823230	0.9936401
雨の家	1.099905	0.1758138	0.9933711
嵐の家	1.091770	0.1744986	0.9932860
危機の家	1.037080	0.1656849	0.9928518
神酒の家	0.9075908	0.1448572	0.9918906
晴の家	0.8701271	0.1388130	0.9914281

表(2.3) 月の海のエントロピーと状態のフラクタル次元

さらに、 ε を $\varepsilon = 0.002, 0.02, 0.2$ と変化させたときの容量次元、情報次元の変化の様子をそれぞれ示したものが、図(2.4)、(2.5)である。

図(2.4) ε に対する容量次元の変化図(2.5) ε に対する情報次元の変化

表(2.3)、図(2.4)、(2.5)から、次のことが言える。

(1) 各々の海のクレータのエントロピーとフラクタル次元は、容量次元、情報次元ともに、そのオーダーは等しい。

(2) フラクタル次元の漸近的な挙動を調べると、その変化の仕方によってクレータは、上から順に「静かの海、寒気の家、豊かの海」、「湿りの海、雨の家、嵐の家、危機の家」、「神酒の家、晴の家」の三つのグループに分けられる。

以上の結果は、エントロピー、フラクタル次元どちらの指標を用いても、その複雑さのオーダーについては、等しい評価ができるのであるが、その複雑さの程度の違いをフラクタル次元まで考えることによって、クレータを三つのグループに分類

できる可能性が示唆されており、すなわち、エントロピーとは異なるフラクタル次元特有の複雑さの一面を示すものだと考えられる。さらに、フラクタル次元によって得られた分類と、そのクラスターの物理的な状況との関連を明らかにすることは、今後の課題である。

以上、従来のフラクタル次元と状態のフラクタル次元の違いを次にまとめる。

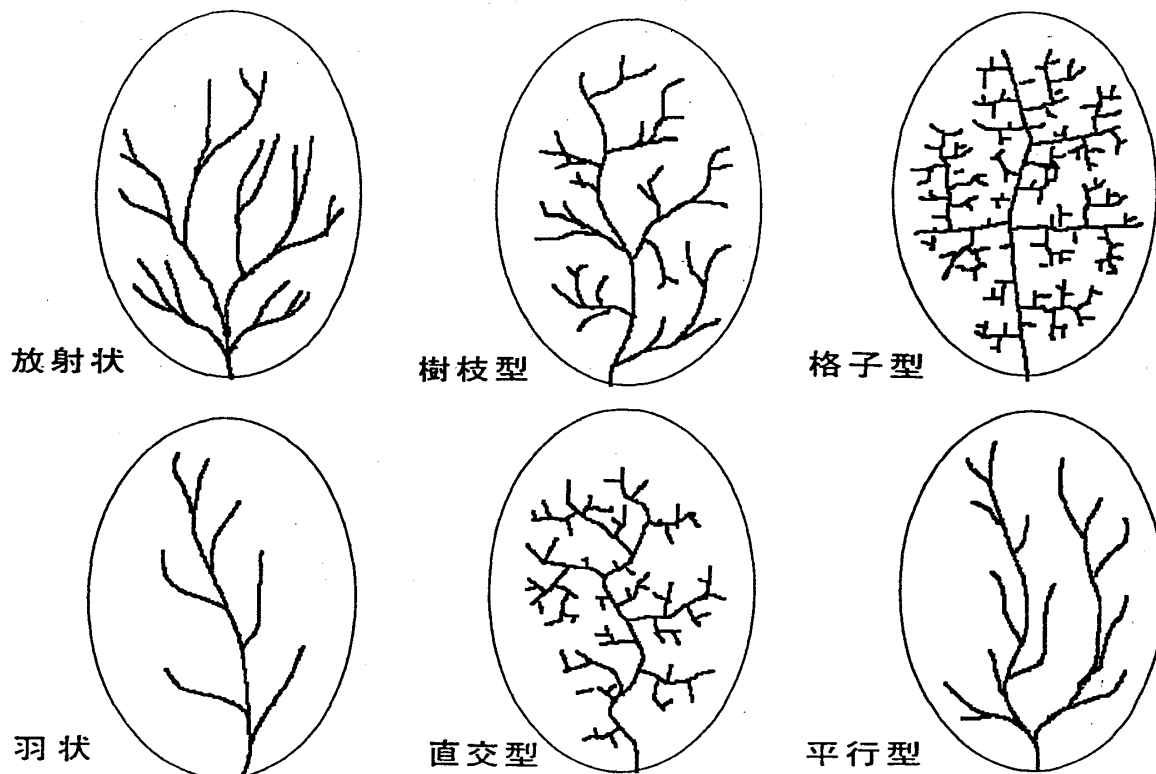
(1) 従来のフラクタル次元は、その値が近似的にしか求められないのに対し、状態のフラクタル次元は、その値を厳密に求めることができる。

(2) 従来のフラクタル次元では、各々の海のクレータの違いを細かく区別することはできないが、状態のフラクタル次元を用いると、その微妙な違いを区別することができ、クレータを大きく三つのグループに分類することができる。

次に、状態のフラクタル次元を用いた日本の河川の形状の複雑さの特徴付けについて説明しよう。

この節では日本の代表的な10の河川を取り上げ、その状態のフラクタル次元を計算する。ここで用いるデータは文献[16]に依るものである。

日本の河川の形状には、図(2.6)に示すように、樹枝型、平行型、直交型、格子型、羽状、放射状などがある[17,18]。実際の河川の流域は、これらの形状の組み合わせたものであり複合流域と呼ばれる。そこで、例えば、全日本道路地図に



図(2.6) 日本の河川の形状

よる天塩川の全体図を河川の典型的な形状に分けて、各々の部分を8mmの格子で覆うのに必要な正方形の数を数え上げる。それを百分率として表したのが、表(2.7)である。すなわち、表(2.7)は河川を形作るいくつかの形状の構成比率である。

河川名	形状	樹枝型 (%)	平行型 (%)	直交型 (%)	格子型 (%)	羽状 (%)	放射状 (%)
雄物川		72	6				22
淀川		14		32	29		25
天竜川		15		21		13	51
紀ノ川		23	18	9		50	
石狩川		18		18			64
天塩川			24	76			
最上川		14	6	8		9	63
富士川		27		14		6	53
江の川		9		34			57
大淀川			31				69

表(2.7) 河川の形状の構成比率

この分布を用いて、状態のフラクタル次元を計算することができるが、その結果を示す前に、Kamiyaによる従来のフラクタル次元の計算結果[Ka]を示そう。

Kamiyaは以下の手順に従って河川のフラクタル次元を計算した。格子の辺の長さ r を3mm、4mm、5mm、6mm、7mm、8mm、9mm、10mmと区切り、河川との交わりを持つ正方形の数 $N(r)$ を数え上げ、各々の河川において、式(2.1)が成立するのを確認して、その傾き D (フラクタル次元)を求めた。その結果をまとめたものが、表(2.8)である。

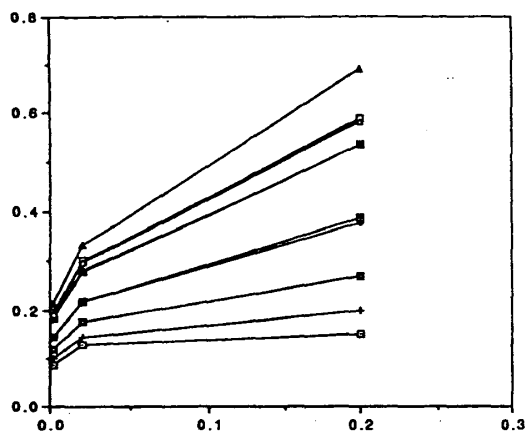
河川名	升目 $N(r)$	3 (mm)	4 (mm)	5 (mm)	6 (mm)	7 (mm)	8 (mm)	9 (mm)	10 (mm)	フラクタル 次元
雄物川	2519	1749	1400	1092	885	757	608	566		1.26
淀川	2519	1830	1354	1161	924	760	661	547		1.25
天竜川	2076	1496	1178	959	778	661	579	497		1.22
紀ノ川	1214	784	643	577	438	374	313	254		1.22
石狩川	1402	905	746	693	551	467	392	319		1.14
天塩川	396	293	216	202	153	136	118	98		1.13
最上川	4218	2996	2381	2141	1739	1417	1259	1016		1.13
富士川	1513	1093	866	825	651	562	470	387		1.08
江の川	1650	1136	928	866	707	590	521	429		1.05
大淀川	1020	698	574	560	448	377	326	263		1.04

表(2.8) 河川のフラクタル次元 (effective dimension)

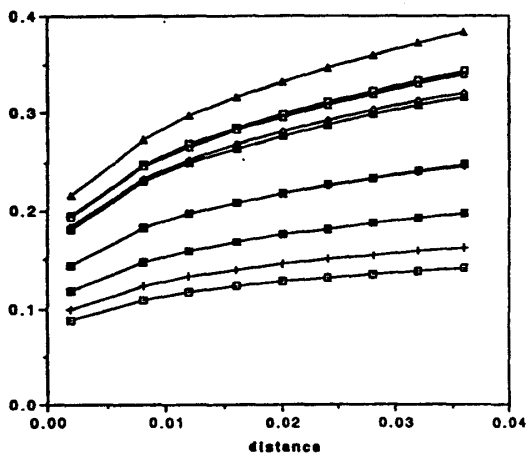
クレータの時と同様に、表(2.7)の分布を用いて、状態のフラクタル次元を計算した結果が、表(2.9)、図(2.10)、(2.11)、(2.12)、(2.13)である。特に、図(2.12)、(2.13)は、 $0.002 \leq \varepsilon \leq 0.036$ の範囲のフラクタル次元の詳しい変化の様子を示したものである。

河川名	エントピー	容量次元	情報次元
淀川	1.345432	0.2154057	0.9949682
天竜川	1.220938	0.1952984	0.9940739
紀ノ川	1.209978	0.1935379	0.9940366
最上川	1.153916	0.1844798	0.9935467
富士川	1.134066	0.1813135	0.9935861
江の川	0.9039182	0.1442684	0.9918726
石狩川	0.9029512	0.1440942	0.9917357
雄物川	0.7384357	0.1176029	0.9897351
大淀川	0.6191007	0.09840737	0.9878252
天塩川	0.5510799	0.08744654	0.9861472

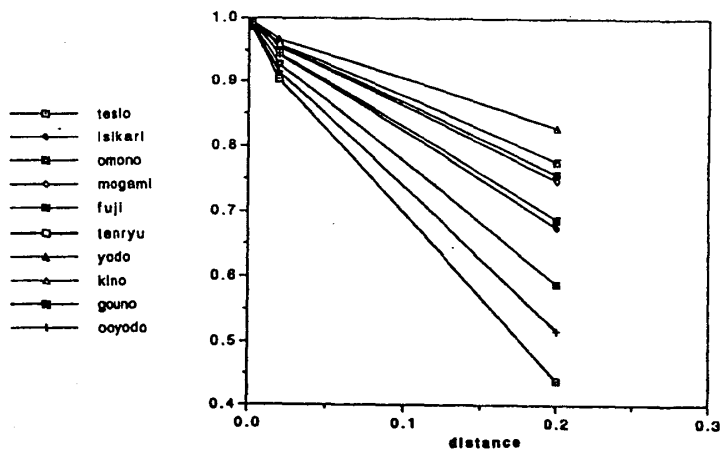
表(2.9) 河川のエントロピーと状態のフラクタル次元



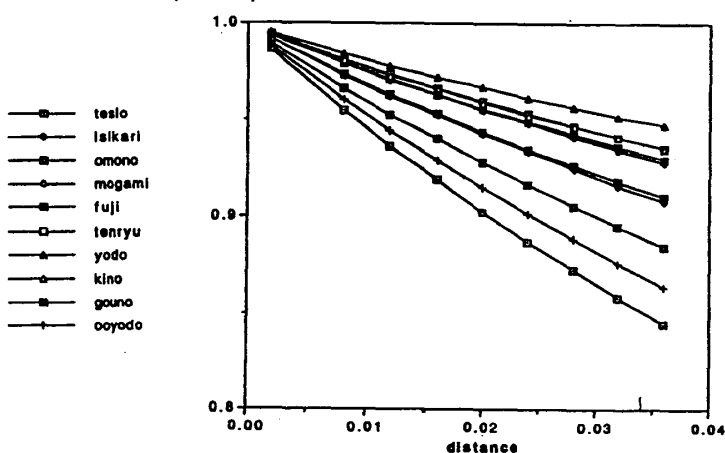
図(2.10) ε に対する容量次元の変化



図(2.12) 容量次元の変化($0.002 \leq \varepsilon \leq 0.0036$)



図(2.11) ε に対する情報次元の変化



図(2.13) 情報次元の変化($0.002 \leq \varepsilon \leq 0.0036$)

以下その結果をまとめる。

(1) 表(2.9)を見ると、富士川、最上川のところで、エントロピーのオーダーと情報次元のオーダーに違いが生じている。

(2) 図(2.12)、(2.13)を見ると、天竜川、紀ノ川と富士川、最上川のそれぞれのペアにおいて、非常に近い範囲の中で近づいたり離れたりしながら変化している。

(3) 図(2.10)、(2.11)のグラフの傾きから、複雑さの大きい順に、次のように河川を分類できる。{淀川}、{天竜川、紀ノ川、最上川、富士川}、{江の川、石狩川}、{雄物川}、{大淀川、天塩川}。

クレータのケースと異なり、河川はかなり細かく分類されており、(1)、

(2) で述べたように、その複雑さの度合いも非常に似通っているものがある。逆に淀川と天塩川では、図(2.10)、(2.11)から分かるように、そのグラフの傾きは大きく違う。すなわち、河川の形状の構成比率の違いがフラクタル次元によって明確に示されている。さらに、図形のフラクタル次元との比較を試みるために、表(2.8)による河川の分類を、そのフラクタル次元が大きい順に行ってみると次のようになるだろう。

{雄物川、淀川、天竜川、紀ノ川}、{石狩川、最上川、天塩川}、{富士川、江の川、大淀川}。

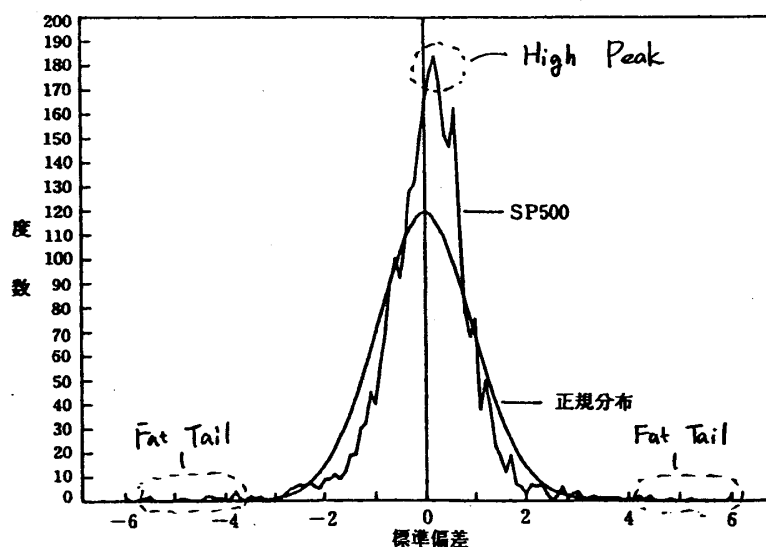
これを見ると、複雑さのオーダーとして、同じ様なオーダーになっているものは、淀川、天竜川、紀ノ川、最上川、大淀川であり、また、そのどちらの次元でも同じグループに属するのは、天竜川と紀ノ川である。すなわち、天竜川と紀ノ川はどちらのフラクタル次元を用いても、同程度の複雑さをもつ河川であると言える。逆に、雄物川は、図形のフラクタル次元では、最もその値が大きい、状態のフラクタル次元ではその複雑さは8番目とかなり低くなっている。図形のフラクタル次元が高いということは、本来は線(1次元)として評価される河川の構造が、面を覆う度合いが高い(1次元から2次元の間の非整数次元の値が大きい)という意味で、より複雑だと考えるわけだが、表(2.7)の雄物川のデータを見ると、河川を形成している形状に関しては、樹枝型に偏っており、それ故、状態のフラクタル次元は低くなっているのである。これに反し、淀川はどちらのフラクタル次元の値も高く、実際、表(2.7)を見ると、淀川は四つの形状の流域からある程度均等に形成されており、河川としてその形状の複雑さは、二つの視点から見て、すなわち、その意味で非常に大きいとすることができるだろう。今回の計算では、同様のことが天竜川、

紀ノ川についても言える。以上、河川構造の複雑さを解析する際に、図形のフラクタル次元だけでなく、状態のフラクタル次元の視点を加えたことで、その複雑さというものをより明確に表現できた。

状態のフラクタル次元は確率分布に対して直接の評価値を与えるので、図形のフラクタル次元を求めるときのような近似が入らず、よって、マクロな系の時系列解析などにおいても、そのカオス解析に十分力を発揮するものと考えられる。次節ではその適用例として、状態のフラクタル次元を用いた株価変動解析を解説する。

3. 状態のフラクタル次元を用いた株価変動解析[9,10]

従来の計量経済学は、株価などの経済変数の変動は、ランダムウォークに従うことを前提とする。しかし、現実の市場においては、例えば、株価の変動には、過去が現在に影響を及ぼし、現在が未来に影響を及ぼすというフィードバック効果が存在すると考えるのは、ある意味では自然である。実際、ある一定期間における株価の収益率の度数分布を求めると、それは、正規分布というよりは、一種のパレート分布とみなすこともできる。図(3.1)は、E. E. Peters による500企業の平均収益率の頻度グラフ(1928年1月～1989年12月)と正規分布との違いを示したグラフである[19]。



図(3.1) ; 500企業の5営業日毎の平均収益率(1928年1月～1989年12月)の度数

実際の収益率の頻度には、平均付近での高いピーク (High Peak) と平均から大きく離れた収益率の生起確率の高さ (Fat Tail) が見てとれるが、従来の資本市場理論は、こうした実際の経済変数から求められた確率分布を正規分布の近似として理解する。しかし、これらの特徴を正規分布とは異なる、現実の市場が持つ基本的な特徴として捉え、そのカオティックな変動を解析しようとするのが、“資本市場のカオス解析”と呼ばれるものである[19, 20, 21, 22, 23]。実は、このような市場の特性に着目し、そのカオス解析を始めた研究者の一人にMandelbrotも挙げられる。彼は、実際の収益率の度数分布が正規分布とは異なることを、R/S解析(Rescaled Range Analysis)という手法を用いて解析した。彼は、正規分布 (Gauss測度) に従う一次元の独立な確率過程のフラクタル次元は1/2 (正確にはその逆数で定義される) であることを示し、実際の株価変動のフラクタル次元は1/2より大きい値をとると主張した[20]。彼の研究をベースとして、R/S解析、相関次元などの従来のフラクタル次元、及びリアプノフ数などを用いた株価変動のカオス解析が、近年、何らかの成果を出しつつあるように思われる[19, 23]。ただし、これらの解析は、確率分布そのものを定量的に解析するものではなく、それ故、実際の市場変数から得られた確率分布が持つ High Peak や Fat Tail などの特徴をどのように定量的に理解するかといった解析は、十分に行われているとはいえない。

そこで、我々は状態 (収益率の確率分布) のフラクタル次元を計算することによって、株価変動に現われるカオティックな特徴の解析を試みている[9, 10]。

現在、我々はSONY、NEC、TOYOTAの過去13年間の株価からその対数収益率の度数分布を求め解析を行っている。ここで、株価の対数収益率とは次で与えられる指標のことである。

$$\text{日次の収益率} = \log \frac{\text{price}(\text{today's})}{\text{price}(\text{yesterday's})}$$

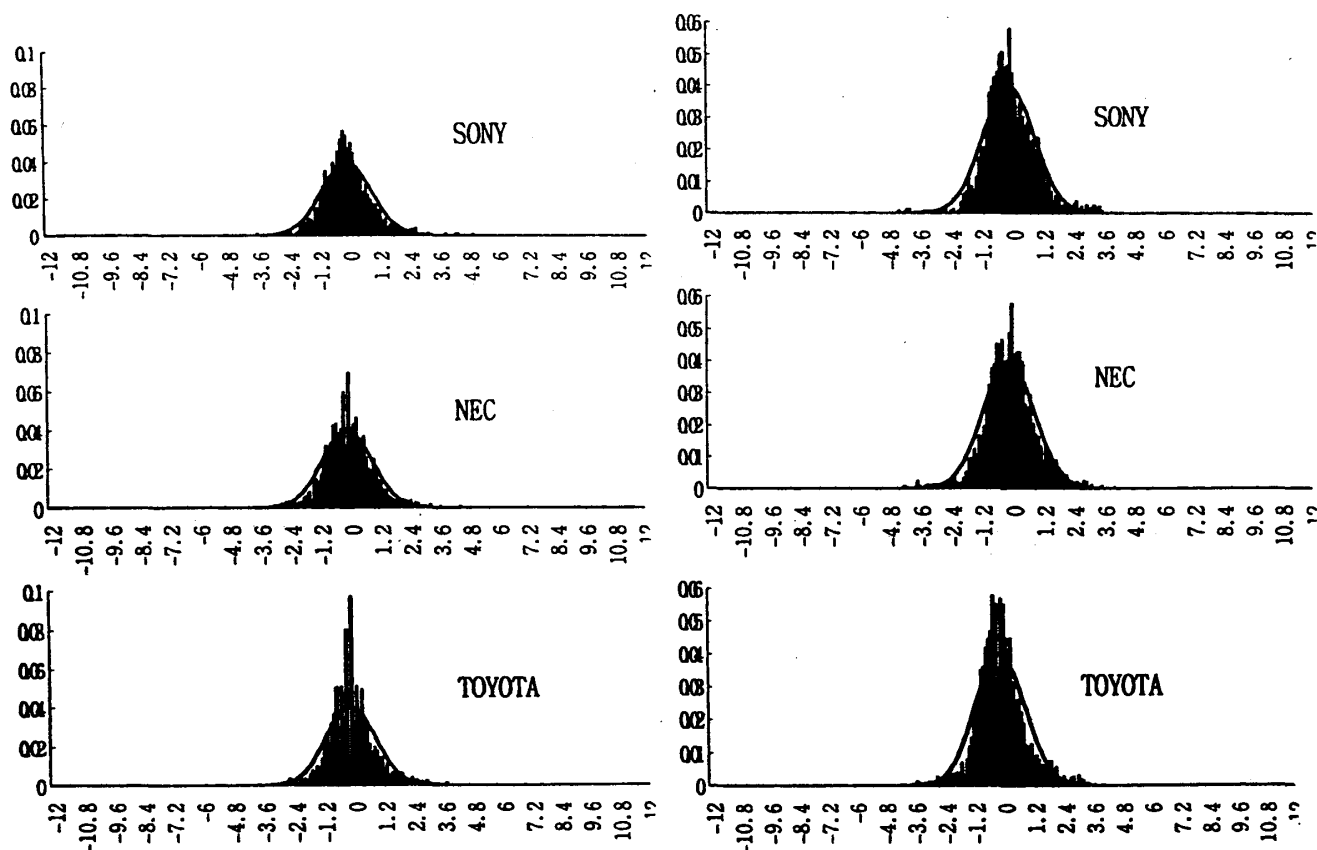
すなわち、当日の株価 (終値) と前日の株価 (終値) との変化率をその対数で見ようとするものである。ちなみに、5日前の株価との比較を週次の収益率と呼び、20日前とのそれを月次の収益率と呼ぶ。今回、我々は、1983年1月から1995年9月の株価データを用いて、日次、週次、月次の収益率の度数分布を特定した。さらに、その各々に対して、度数分布を特定する期間の長さを変えることによって (i.e., 時間スケールを変化させることによって)、収益率の度数分布を、1年間(1983年1月～1984年1月)、2年間(1983年1月～1985年1月)、…、13年間(1983年1月～1995年9月)と求めた。

以上の度数分布においても確かに、High Peak と Fat Tail という特徴が見てとれるが、このとき、これらの度数分布のフラクタル次元を計算することで、我々は、市場のカオティックな振舞いを解析することができるのである。

3.1 収益率の度数分布に現われる High Peak の特徴付け

各銘柄において、その収益率の度数分布の High Peak の高さには違いがある。図(3.2)、図(3.3)は、SONY、NEC、TOYOTAの9年間の週次、月次の収益率の度数分布である。図(3.2)を見ると、その High Peak の高さは明らかに異なり、そのオーダーは、 $SONY < NEC < TOYOTA$ である。それに対し、図(3.3)では、High Peak の高さに違いはあまり見られず、その高さは、 $SONY \approx NEC \approx TOYOTA$ とほぼ等しい。

それでは、このような度数分布の High Peak という性質を定量的に特徴付ける指標として、エントロピーや状態のフラクタル次元は有用となり得るだろうか。



図(3.2) 9年間の週次の度数分布

図(3.3) 9年間の月次の度数分布

各々の度数分布に対して状態のフラクタル次元とエントロピーを求め、そのオーダーをまとめたものが次の表である。

$\langle \text{high peak の高さのオーダー} \rangle$ SONY < NEC < TOYOTA $\langle \varepsilon = 0.02 \text{ の情報次元のオーダー} \rangle$ SONY > NEC > TOYOTA (0.9717) > (0.9684) > (0.9619) $\langle \text{エントロピーのオーダー} \rangle$ NEC > SONY > TOYOTA (3.6444) > (3.6344) > (3.5842)	$\langle \text{high peak の高さのオーダー} \rangle$ SONY $\approx$ TOYOTA $\approx$ NEC $\langle \varepsilon = 0.02 \text{ の情報次元のオーダー} \rangle$ SONY $\approx$ TOYOTA $\approx$ NEC (0.97139) $\approx$ (0.97154) $\approx$ (0.97174) $\langle \text{エントロピーのオーダー} \rangle$ SONY $\approx$ TOYOTA < NEC (3.63417) $\approx$ (3.63832) < (3.66453)
表(3.4) 9年間の週次度数分布のオーダー	表(3.5) 9年間の月次度数分布のオーダー

上の表から、分布に現われるHigh Peakの高さのオーダーは、状態のフラクタル次元のオーダーとは一致しているが、エントロピーのオーダーとは一致していないことが分かる。エントロピーは、分布そのものの複雑さを表わす指標であるため、High Peakのような局所的な特徴を評価するには適さないとも考えられるが、状態のフラクタル次元は、分布のもつ複雑さの伝達程度という視点から、その複雑さの度合いを測ることができるため、High Peakを特徴付け得る指標となるのである。

また、度数分布のHigh Peakが高いということは、収益率がより平均値の近くに分布しているということであり、これは、平均値の周りにトレンドを形成していると考えることができる。よって、High Peakが高いほど、株価変動におけるその複雑さは低いと考えられ、市場の複雑さの度合いを表わす指標として、状態のフラクタル次元は、エントロピーより適した指標であるといえる。表(3.4)で、High Peakのオーダーとフラクタル次元のオーダーに関して、その不等号の向きが逆転しているのは、以上の理由から納得できる。さらに、High PeakやFat Tailの大きさは正規分布からの違いの大きさを表わすと考えれば、その意味において、状態のフラクタル次元は収益率の正規分布からの乖離度を表わす指標として有効であるともいえるのである。

3.2 市場に存在するフラクタル構造

ここでは、我々は、度数分布を特定する期間の長さを変えることによって (i.e., 時間スケールを変化させることによって)、そのスケール変換に対してエントロピーや状態のフラクタル次元がどのように変化するか調べてみた。図(3.6)、(3.7)は収益率の度数分布を、1年間(1983年1月～1984年1月)、2年間(1983年1月～1985年1

月)、…、13年間(1983年1月～1995年9月)と求めたときの、各々に対するエントロピー、状態のフラクタル次元の変化のグラフである。

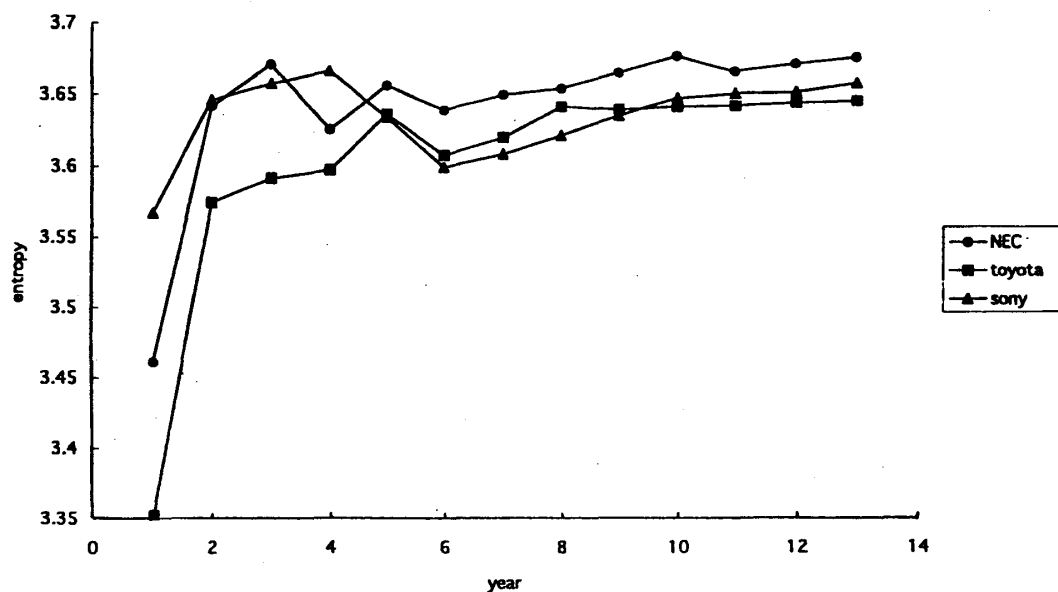
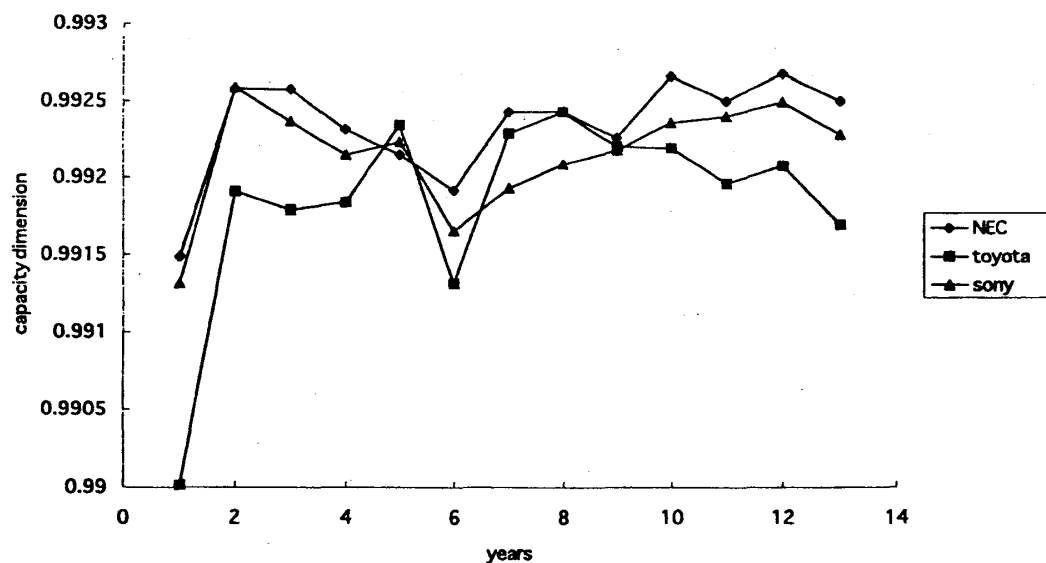


図 (3.6) スケール変換に対するエントロピー変化

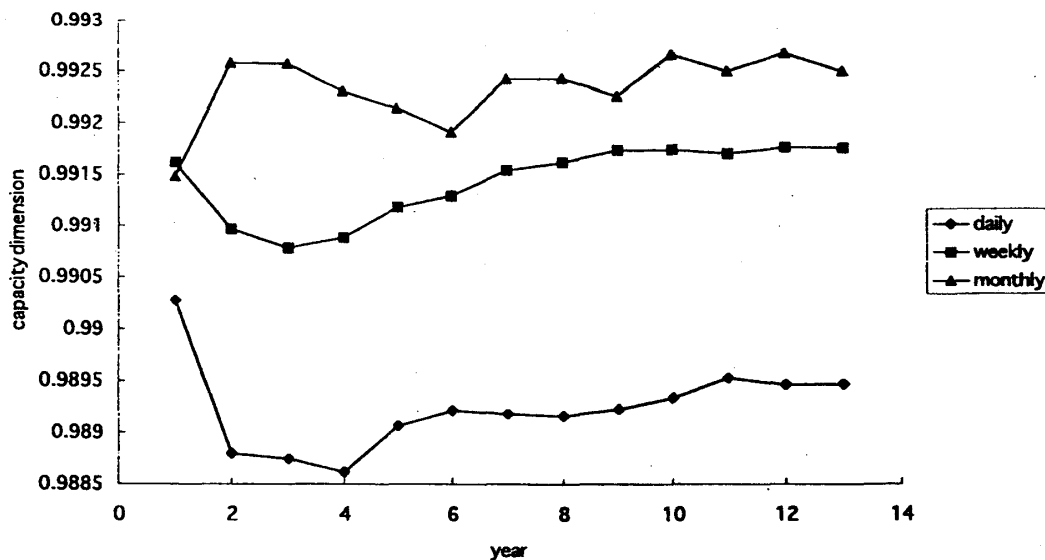


図(3.7) スケール変換に対するフラクタル変化

エントロピーは、分布を特定する期間を長くしていくとある一定の大きさに収束していくように思われるが、状態のフラクタル次元にはある種の周期性が見てと

れる。すなわち、トレンドの強さと、その3銘柄の値の類似性に関する二つの周期性である。例えば、TOYOTAのフラクタル次元の変化を見てみると、1年間の度数分布のフラクタル次元の値は低く（i.e.,トレンドが強い）、その後増加し、5年間でピークに一度減少し、また、増加を始め、今度は8年間で境に減少する。また、3銘柄のフラクタル次元の値は最初は離れているが、以降、近づき、離れるといった動きを繰り返しているのが分かる。このようなフラクタル次元の周期性とエントロピーの収束性は、分布の持つ複雑さそのものはある一定の範囲に収まるにも関わらず、トレンドの強さ（i.e.,正規分布からの乖離の大きさ）という点では市場は周期的に揺らいでいるといったことを表わしており、このような周期性はスケール変換に対する一種の相似性の現われと解釈することができ、我々は、株価変動に存在するカオティックな構造（i.e.,ある種の階層構造）を特徴付けることができるのである。

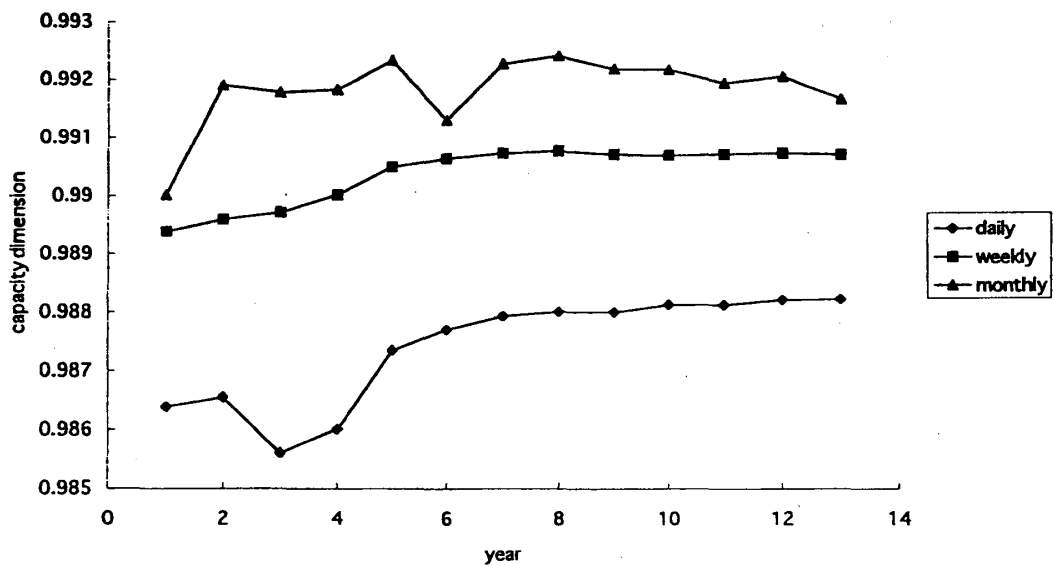
さらに、我々は、別の側面から観た株価変動が有するフラクタル構造を示すこともできる。図(3.8)は、NECにおける三つのタイプの度数分布のフラクタル変化を示したグラフである。



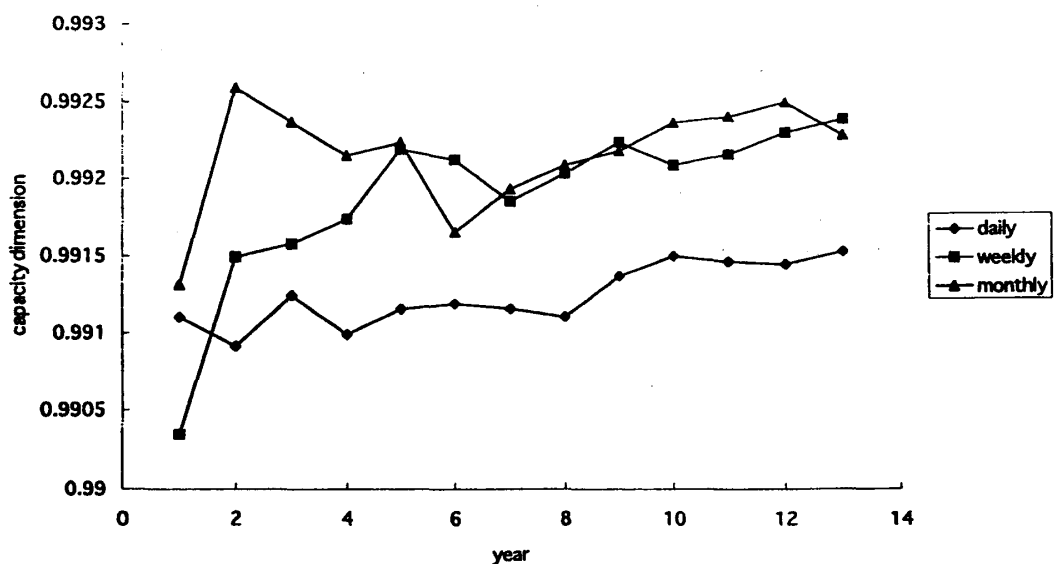
図(3.8) 日次、週次、月次のフラクタル変化(NEC)

日次の収益率の変化は、週次のそれと似ているが、月次の変化はかなり異なる。これは、20日前の株価との相関を表わす月次の度数分布は、その時系列の相関の現われ方に、日次や週次のそれとは異なる構造を有していることを示しており、月次の度数

分布と日次や週次の度数分布の間には異なる階層構造が存在するということもできる。SONY、TOYOTAにおいて、同様のフラクタル変化を調べたのが、図(3.9)、(3.10)である。



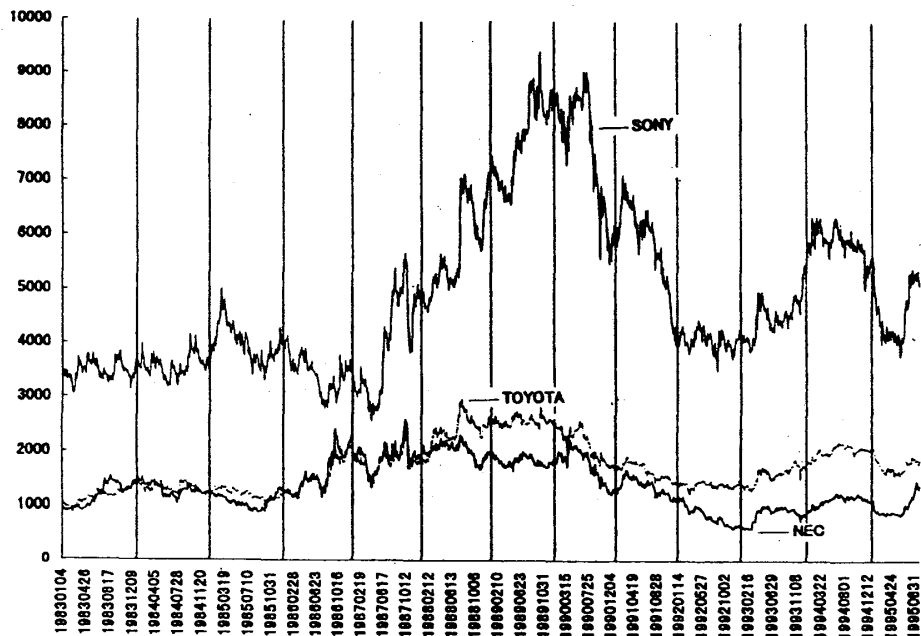
図(3.9) 日次、週次、月次のフラクタル変化 (TOYOTA)



図(3.10) 日次、週次、月次のフラクタル変化 (SONY)

TOYOTAにおいては、週次のフラクタル変化は日次のそれに似ているが、SONYに

においては、日次、週次、月次の各々のフラクタル変化の間に相似性を見いだすことはできない。すなわち、SONYの株価の変動は非常に複雑な様相を呈していると考えることができる。上のフラクタル変化の類似性から、我々はNECとTOYOTAを同じグループに分類することができるが、実は、この類似性は実際の株価変動においても、図(3.11)から見てとることができるのである。



図(3.11) NEC、SONY、TOYOTAの株価の変動

状態のフラクタル次元を用いた株価変動の解析手法は、当然、様々な物理変数の時系列解析にも適用できるので、従来の相関次元などを持ちいたカオス解析と合わせて、その有用性の検証が期待される。

参考文献

- [1] B. B. Mandelbrot ; "The Fractal Geometry of Nature", W. H. Freeman and Company, San Francisco (1982).
- [2] A. N. Kolmogorov ; "Theory of transmission of information", Amer. Math. Soc. Translation, Ser. 2, 33, pp.291-321 (1963).
- [3] M. Ohya ; "Some aspects of quantum information theory and their applications to irreversible processes", Rep. Math. Phys., 27, pp. 19-47 (1989).
- [4] M. Ohya ; "Fractal dimensions of general quantum states", Proc. Symp. Appl. Func. Anal., 11, pp. 45- (1989).

- [5] M.Ohya ; "Fractal dimensions of states", in Quntum Probability and Related Topics VI (World Scientific, Singapore), pp. 359-369 (1991).
- [6] 大矢雅則 ; "情報と数理18"、数理科学 No. 371、サイエンス社、pp. 61-67 (1994).
- [7] A. N. Kolmogorov & V. M. Tihomirov ; " ε -entropy and ε -capacity of sets in function space", Amer. Math. Soc. Translation, Ser. 2, 17, pp. 277-364 (1961).
- [8] 大矢雅則、松岡隆志 ; "状態のフラクタル次元を用いたクレータ及び河川の複雑さの解析"、電子情報通信学会論文誌に掲載予定 (1996).
- [9] T. Andoh, T. Matsuoka & M. Ohya ; "New approach to fractal analysis of stock returns fluctuation", preprint.
- [10] 安藤隆宏、大矢雅則、松岡隆志 ; "状態のフラクタル次元を用いた株価変動解析", 信学技報に掲載予定 (1996).
- [11] K. Inoue, T. Matsuoka & M. Ohya ; "New approach to ε -entropy and its comparison with Kolmogorov's ε -entropy", preprint.
- [12] T. Matsuoka & M. Ohya ; "Fractal dimensions of states and its application to Ising model", Rep. Math. Phys., 36, pp.365-379 (1995).
- [13] 松岡隆志 ; "状態のフラクタル次元を用いた様々な現象の特徴付け"、学位論文、東京理科大学 (1996).
- [14] O. Hyashi, T. Matsuoka & M. Ohya ; "Some computations of fractal dimensions of state in classical discrete systems", preprint.
- [15] 水谷 仁 ; "クレータの科学"、東京大学出版会 (1991).
- [16] 神谷茂保 ; "日本の河川のフラクタル次元について"、岡山理科大学紀要A自然科学、28、pp. 309-317 (1992).
- [17] 岩佐義郎 ; "河川工学"、森北出版 (1978).
- [18] 高橋 祐、坂口 豊、大森博雄 ; "日本の川"、岩波書店 (1986).
- [19] E. E. Peters ; "Chaos and Order in The Capital Markets", John Wiley & Sons, New York (1991).
- [20] B. B. Mandelbrot ; "Statistical methodology for non-periodic cycles : From the covariance to R/S analysis", Annals of Economic and Social Measurement, 1, pp. (1972).
- [21] T. Vaga ; "The coherent market hyothesis", Financial Analysts Journal, December/January (1991).
- [22] M. Larrain ; "Empirical tests of chaotic behavior in a nonlinear interest rate model", Financial Analysts Journal, in press (1991).
- [23] D. N. Chorafas ; "Chaos Theory in the Financial Markets", Probus Publishing Company, Chicago (1994).