

On the singular ground state with maximal intensity

佐藤 得志 (東北大学大学院理学研究科)

Tokushi SATO

ここでは, 空間次元を $n \geq 3$ として scalar field 方程式の singular ground state について考える. まず, scalar field 方程式の ground state とは, $\mathbf{R}^n$ 上の球対称関数 u で

$$(P)_0 \quad \begin{cases} -\Delta u + u = u^p, & u > 0 \text{ in } \mathbf{R}^n, \\ u(x) \rightarrow 0 & \text{as } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

をみたすもののことである. この $(P)_0$ が解をもつための必要十分条件は $1 < p < (n+2)/(n-2)$ であり, この解は一意的であることはよく知られている. 次に, scalar field 方程式の singular ground state とは, $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ 上の球対称関数 u で

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = u^p, & u > 0 \text{ in } \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \\ u(x) \rightarrow \infty & \text{as } x \rightarrow 0, \quad u(x) \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

をみたすもののことである. (実は $(P)_0$, (P) の解は球対称なものしかない.) この問題 (P) に対して, Ni-Serrin (1986) は, $p \geq (n+2)/(n-2)$ ならば (P) は解をもたないことを示した. また, 最近になって, $1 < p < (n+2)/(n-2)$ ならば (P) は解をもつことが分かってきた (Johnson-Pan-Yi, Tanimoto-Takahashi-Yotsutani-Yanagida, Sato).

以下においては, $1 < p < n/(n-2)$ の場合に話を限ることにする. このとき, 原点における特異点の挙動は

$$u(x) \sim \kappa E(x) \text{ as } x \rightarrow 0$$

なるものに限られる. ここで, E は $-\Delta$ の基本解, i.e.,

$$E(x) := \frac{1}{(n-2)n\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} \quad (\omega_n: \text{単位球の体積})$$

であり, $\kappa > 0$ は (u に依存する) 定数である. この κ を特異点の強度 (intensity) と呼ぶ. そこで (P) のかわりに,

$$(P)_\kappa \quad \begin{cases} -\Delta u + u = u^p, & u > 0 \text{ in } \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \\ u(x) \sim \kappa E(x) & \text{as } x \rightarrow 0, \quad u(x) \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

を考える. このとき $(P)_\kappa$ の解 u は

$$-\Delta u + u = u^p + \kappa \delta_0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$$

をみたす. 更に, 次のことが知られている.

Fact. (i) ある $\kappa^* > 0$ が存在して, $0 < \kappa < \kappa^*$ に対して $(P)_\kappa$ は解をもち, $\kappa > \kappa^*$ に対しては $(P)_\kappa$ は解をもたない.

(ii) $\kappa > 0$ が十分小さければ $(P)_\kappa$ は少なくとも 2 つの解をもつ.

そこで, 以下においては, $\kappa = \kappa^* := \sup\{\kappa > 0 \mid (P)_\kappa \text{ は解をもつ}\}$ に対しての $(P)_\kappa$ の解の存在について述べる. このために, $(P)_\kappa$ の解 u とその線型化方程式

$$(L; u) \quad \begin{cases} -\Delta\varphi + \varphi = pu^{p-1}\varphi & \text{in } \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \\ \varphi(0) = 1, \varphi(x) \rightarrow 0 & \text{as } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

の球対称解を考える. このとき次が成り立つ.

Theorem 1. もし $(P)_{\kappa_1}$ の解 u で, その線型化方程式 $(L; u_1)$ が正值球対称解 φ_1 をもつものが存在すれば, $\kappa_1 = \kappa^*$ であり, $(P)_{\kappa_1}$ の解は一意的である.

Theorem 2. $n \geq 4, 1 < p < n/(n-2)$ または $n = 3, 3/2 < p < 3$ ならば, ある $\kappa_1 > 0$ に対して, $(P)_{\kappa_1}$ の解 u_1 で, $(L; u_1)$ が正值球対称解 φ_1 をもつものが存在する.

以下において, 上の2つの Theorems の証明の概略を述べることにする.

$n \geq 3, 1 < p < n/(n-2)$ とする. $\tau \in [0, 1], \kappa > 0$ に対して,

$$(P_\tau)_\kappa \quad \begin{cases} -\Delta u + u = u^p - (1-\tau)(\kappa E_1)^p, & u \geq \kappa E_1 \text{ in } \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \\ u(x) \sim \kappa E(x) \text{ as } x \rightarrow 0, & u(x) \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

を考える. ここで, E_1 は $-\Delta + 1$ の基本解, i.e.,

$$E_1(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|x|^{(n-2)/2}} K_{(n-2)/2}(|x|)$$

である (K_ν は ν 次の変形 Bessel 函数). この E_1 は,

$$E_1(x) \sim E(x) \text{ as } x \rightarrow 0, \quad E_1(x) \sim c_n \frac{e^{-|x|}}{|x|^{(n-1)/2}} \text{ as } |x| \rightarrow \infty$$

をみたすことに注意しておく. このとき, 次のような問題を考える.

Definition. $\tau \in [0, 1]$ に対して, (u, φ, κ) が (P_τ) の解であるとは, $\kappa > 0$ であって, u は $(P_\tau)_\kappa$ の球対称解, かつ φ は $(L; u)$ の正值球対称解となることである.

Theorem 2 を示すためには (P_1) が解をもつことを示せばよい. そこで,

$$T := \{\tau \in [0, 1] \mid (P_\tau) \text{ は解をもつ}\}$$

とおき, $T = [0, 1]$ を示すことを目標とする. 以下, $\mathbf{R}^n$ 上の函数はすべて球対称なもののみを考え, $w(x) = w(|x|)$ と表す. w' は w の動径方向の微分を表すことにする. また,

$$L^q(\mathbf{R}^n)_r := \{w \in L^q(\mathbf{R}^n) \mid w \text{ は球対称}\} \quad (\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{L^q(\mathbf{R}^n)})$$

等の記号を用いる. まず次のことに注意しておく.

Lemma 1. $1 < q \leq \infty$, $w \in L^q(\mathbf{R}^n)_r$ とすると, $E_1 * w \in C(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})_r$ であり,

$$E_1 * w(r) = E_1(r) \int_0^\infty w(t) \min\{\sigma_1(r), \sigma_1(t)\} E_1(t) t^{n-1} dt \quad \text{for } r > 0,$$

$$\frac{1}{E_1(r)} E_1 * w(r) \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow 0,$$

が成り立つ. ここで,

$$\sigma_1(r) := \int_0^r \frac{1}{E_1(t)^2 t^{n-1}} dt$$

である.

$\tau \in [0, 1]$ に対して (P_τ) を解くために,

$$(*) \quad u = \zeta^\lambda v + \kappa E_1 = (z + \kappa) E_1, \quad \varphi = \zeta^\lambda \psi = y E_1$$

として考える. ここで, $0 < \lambda < 1$,

$$\zeta(r) := \exp[1 - (1 + r^2)^{1/2}]$$

である. このとき, (v, ψ) のみたすべき方程式は

$$v = V[v; \kappa, \tau], \quad \psi = \Psi[v; \kappa] \psi$$

となる. 但し,

$$\begin{cases} V[v; \kappa, \tau] := \zeta^{-\lambda} \cdot E_1 * [(\zeta^\lambda v + \kappa E_1)_+^p - (1 - \tau)(\kappa E_1)_+^p], \\ \Psi[v; \kappa] \psi = \Psi[v, \psi; \kappa] := \zeta^{-\lambda} \cdot E_1 * [p(\zeta^\lambda v + \kappa E_1)_+^{p-1} \zeta^\lambda \psi] \end{cases}$$

である. また, (z, y) のみたすべき方程式は

$$z = Z[z; \kappa, \tau], \quad y = Y[z; \kappa] y$$

となる. 但し,

$$\begin{cases} Z[z; \kappa, \tau] := \frac{1}{E_1} E_1 * [((z + \kappa) E_1)_+^p - (1 - \tau)(\kappa E_1)_+^p], \\ Y[z; \kappa] y = Y[z, y; \kappa] := \frac{1}{E_1} E_1 * [p((z + \kappa) E_1)_+^{p-1} y E_1] \end{cases}$$

である. (u, φ, κ) が (P_τ) の解であるならば, $z, y \in X(\mathbf{R}^n)_r$ となる. 但し,

$$X(\mathbf{R}^n)_r := \{z \in C(\mathbf{R}^n)_r \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)_r \mid z(0) = 0\}$$

である. 更に, 次が成り立つ.

Lemma 2. $0 < \lambda < 1$, $p < q < n/(n-2)$ とすると,

$$V : L^q(\mathbf{R}^n)_r \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow L^q(\mathbf{R}^n)_r, \quad \Psi : L^q(\mathbf{R}^n)_r \times L^q(\mathbf{R}^n)_r \times \mathbf{R} \rightarrow L^q(\mathbf{R}^n)_r$$

は完全連続である. 特に, 任意の $(v, \kappa) \in L^q(\mathbf{R}^n)_r \times \mathbf{R}$ に対して,

$$\Psi[v; \kappa] : L^q(\mathbf{R}^n)_r \rightarrow L^q(\mathbf{R}^n)_r$$

は compact 作用素である.

次に, $(z, \kappa) \in X(\mathbf{R}^n)_r \times \mathbf{R}$ としたとき, $(*)$ の記号の下で, 固有値問題

$$(E; u) \quad \psi = \mu \Psi[v; \kappa] \psi$$

を考える. $(\psi, \mu) \in L^q(\mathbf{R}^n)_r \times \mathbf{R}$ が $(E; u)$ の解ならば,

$$\varphi = \zeta^\lambda \psi \in W^{1,2}(\mathbf{R}^n)_r \cap C(\mathbf{R}^n)_r, \quad y = \frac{\varphi}{E_1} \in X(\mathbf{R}^n)_r$$

が成り立つ.

Lemma 3. $(z, \kappa) \in X(\mathbf{R}^n)_r \times \mathbf{R}$ とし, $u = (z + \kappa)E_1$ は $u_+ > 0$ をみたすとする.

(i) $(E; u)$ の第 1 固有値 $\mu_1[u]$ は

$$\mu_1[u] = \inf_{\varphi \in W^{1,2}(\mathbf{R}^n)} \frac{\|\nabla \varphi\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2}{p \|\varphi u_+^{(p-1)/2}\|_2^2} \quad (> 0)$$

によって与えられる. このとき, 固有函数 $\psi \in L^q(\mathbf{R}^n)_r$ は定符号である.

(ii) $(\psi, \mu) \in L^q(\mathbf{R}^n)_r \times \mathbf{R}$ を $(E; u)$ の解とし, ψ は定符号であるとする. このとき, $\mu = \mu_1[u]$ であり, 固有値の重複度は 1 である.

次に, $\tau \in T$ とし, $(u_\tau, \varphi_\tau, \kappa_\tau)$ を (P_τ) の解とする. このとき,

$$(*)_\tau \quad u_\tau = \zeta^\lambda v_\tau + \kappa_\tau E_1 = (z_\tau + \kappa_\tau)E_1, \quad \varphi_\tau = \zeta^\lambda \psi_\tau = y_\tau E_1$$

とすれば,

$$\psi_\tau = \Psi[v_\tau; \kappa_\tau] \psi_\tau, \quad \psi_\tau > 0$$

であるから, $(\psi_\tau, 1)$ は $(E; u_\tau)$ の解であり, 固有値 1 は重複度 1 である. よって,

$$\text{Ker}(I - \Psi[v_\tau; \kappa_\tau]) = [\psi_\tau]$$

である. $\Psi[v_\tau; \kappa_\tau]: L^q(\mathbf{R}^n)_r \rightarrow L^q(\mathbf{R}^n)_r$ が compact であることから,

$$\text{Ker}(I - \Psi[v_\tau; \kappa_\tau])^* = [\psi_\tau^*], \quad \varphi_\tau^* = \zeta^\lambda \psi_\tau^* = p u_\tau^{p-1} \varphi_\tau \quad (> 0)$$

となることが分かる $(L^q(\mathbf{R}^n)_r)^* = L^{q'}(\mathbf{R}^n)_r$. 更に,

$$(I - \Psi[v_\tau; \kappa_\tau])(L^q(\mathbf{R}^n)_r) = [\psi_\tau^*]^\perp$$

であることに注意すると,

$$J_\tau := (I - \Psi[v_\tau; \kappa_\tau])|_{[\psi_\tau^*]^\perp} : [\psi_\tau^*]^\perp \rightarrow [\psi_\tau^*]^\perp$$

は全単射であり, 逆作用素 J_τ^{-1} も有界になる.

Proof of Theorem 1. (i) $\kappa_1 < \kappa^*$ と仮定する. $\kappa \in (\kappa_1, \kappa^*)$ を 1 つ固定し, u を $(P)_\kappa$ の解とする.

$$w = u - u_1 - \alpha E_1, \quad \alpha = \kappa - \kappa_1$$

とおくと, $(I - \Psi[v_1; \kappa_1])(\zeta^{-\lambda} w) \in [\psi_1^*]^\perp$ より,

$$\langle \varphi_1, (u_1 + w + \alpha E_1)^p - u_1^p - p u_1^{p-1} w \rangle = 0$$

が成り立つ. ところが,

$$\begin{aligned} & (u_1 + w + \alpha E_1)^p - u_1^p - p u_1^{p-1} w \\ &= p(p-1)(w + \alpha E_1)^2 \int_0^1 \int_0^1 (u_1 + st(w + \alpha E_1))^{p-2} ds dt + p \alpha u_1^{p-1} E_1 > 0 \end{aligned}$$

となるから, 矛盾である. 従って $\kappa_1 = \kappa^*$ である.

(ii) u を $(P)_{\kappa_1}$ の任意の解とする. (i) の記号の下で $\alpha = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} & \langle \varphi_1, (u_1 + w)^p - u_1^p - p u_1^{p-1} w \rangle = 0, \\ & (u_1 + w)^p - u_1^p - p u_1^{p-1} w = p(p-1)w^2 \int_0^1 \int_0^1 (u_1 + stw)^{p-2} ds dt \geq 0 \end{aligned}$$

を得る. これより $w \equiv 0$ が従うから, $(P)_{\kappa_1}$ の解は一意的である. $\square$

同様にして次が成り立つ.

Lemma 4. $\tau \in T$ とし, $(u_\tau, \varphi_\tau, \kappa_\tau)$ を $(P)_\tau$ の解とする. このとき, $(P)_\tau$ の解は一意的である.

Theorem 2 を示すためには, T が空でなく, $[0, 1]$ の中で開かつ閉であることを示せばよい. これを 5 つの steps に分けて示す.

Step 1. $T \neq \emptyset$ であること.

$0 \in T$ であることを示す. $\kappa_0 > 0$ に対して,

$$u_0 = \kappa_0 E_1$$

は $(P_0)_{\kappa_0}$ の解である. このとき, 固有値問題 $(E; E_1)$ の第 1 固有値 $\mu_1[E_1]$ と対応する固有函数 ψ_0 に対して,

$$\mu_1[E_1] = \kappa_0^{p-1}, \quad \varphi_0 = \zeta^\lambda \psi_0$$

とすれば, $(u_0, \varphi_0, \kappa_0)$ は (P_0) の解となる. $\square$

次に, T が $[0, 1]$ の中で開であることを示す. 以下において $(*)_\tau$ の記号を用い, $\tau \in T$ に対して,

$$Y_\tau := Y[z_\tau; \kappa_\tau], \quad [\varphi_\tau^* E_1]^\perp := \{z \in X(\mathbf{R}^n)_\tau \mid \langle z E_1, \varphi_\tau^* \rangle = 0\}$$

及び

$$\begin{cases} \alpha_\tau := p(p-1) \langle \varphi_\tau, u_\tau^{p-2} \varphi_\tau^2 \rangle, & \beta_\tau := p(p-1) \langle \varphi_\tau, u_\tau^{p-2} \varphi_\tau E_1 \rangle, \\ \gamma_\tau := \langle \varphi_\tau, (\kappa_\tau E_1)^p \rangle, & \theta_\tau := p \langle \varphi_\tau, (u_\tau^{p-1} - (1-\tau)(\kappa_\tau E_1)^{p-1}) E_1 \rangle \end{cases}$$

とおく. また,

$$B_X := \{z \in X(\mathbf{R}^n)_\tau \mid \|z\|_\infty < 1\}$$

とする.

Step 2. $\tau = 0$ が T の $[0, 1]$ における内点であること.

$\tau = 0$ の近傍において, 次の形で (P_τ) を解く.

$$z = \varepsilon(y_0 + \varepsilon\xi), \quad y = y_0 + \varepsilon\eta, \quad \kappa = \kappa_0 - \varepsilon\mu, \quad \tau = \varepsilon^2\nu.$$

但し, $\xi, \eta \in [\varphi_0^* E_1]^\perp$ とする. このとき (ξ, η) のみたすべき方程式は,

$$(I - Y_0)\xi = \frac{1}{E_1} E_1 * G_0^\varepsilon[\xi; \mu, \nu], \quad (I - Y_0)\eta = \frac{1}{E_1} E_1 * H_0^\varepsilon[\xi, \eta; \mu]$$

となる. ここで

$$\begin{cases} G_0^\varepsilon[\xi; \mu, \nu] := \frac{1}{\varepsilon^2} [(u_0 + \varepsilon\varphi_0 + \varepsilon(\varepsilon\xi - \mu)E_1)^p - (u_0 - \varepsilon\mu E_1)^p] \\ \quad - \frac{p}{\varepsilon} u_0^{p-1} (\varphi_0 + \varepsilon\xi E_1) + p\nu u_0^{p-1} \varphi_0, \\ H_0^\varepsilon[\xi, \eta; \mu] := \frac{p}{\varepsilon} [(u_0 + \varepsilon\varphi_0 + \varepsilon(\varepsilon\xi - \mu)E_1)^{p-1} - (u_0 - \varepsilon\mu E_1)^{p-1}] (\varphi_0 + \varepsilon\eta E_1) \end{cases}$$

である. このとき $(I - Y_0)(X(\mathbf{R}^n)_r) \subset [\varphi_0^* E_1]^\perp$ より,

$$\langle \varphi_0, G_0^\varepsilon[\xi; \mu, \nu] \rangle = 0, \quad \langle \varphi_0, H_0^\varepsilon[\xi, \eta; \mu] \rangle = 0$$

が要請される. この条件は,

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta_0 \gamma_0} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_0 \\ -\beta_0 & \beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \varphi_0, K_0^\varepsilon[\xi; \mu, \nu] \rangle \\ \langle \varphi_0, L_0^\varepsilon[\xi, \eta; \mu] \rangle \end{pmatrix}$$

と同値である. 但し

$$\begin{cases} K_0^\varepsilon[\xi; \mu, \nu] := G_0^\varepsilon[\xi; \mu, \nu] + p(p-1)\mu u_0^{p-2} \varphi_0 E_1 - \nu u_0^p, \\ L_0^\varepsilon[\xi, \eta; \mu] := H_0^\varepsilon[\xi, \eta; \mu] + p(p-1)\mu u_0^{p-2} \varphi_0 E_1 \end{cases}$$

である. ここで

$$\begin{cases} \mu_0^0 := \frac{\alpha_0}{\beta_0}, \quad \nu_0^0 := \frac{\alpha_0}{2\gamma_0}, \quad K_0^0 := \frac{1}{2} p(p-1) u_0^{p-2} \varphi_0^2, \quad L_0^0 := 2K_0^0, \\ G_0^0 := K_0^0 - p(p-1) \mu_0^0 u_0^{p-2} \varphi_0 E_1 + \nu_0^0 u_0^p, \quad H_0^0 := L_0^0 - p(p-1) \mu_0^0 u_0^{p-2} \varphi_0 E_1, \\ \xi_0^0 := \frac{1}{\zeta^{-\lambda} E_1} J_0^{-1} [\zeta^{-\lambda} E_1 * G_0^0], \quad \eta_0^0 := \frac{1}{\zeta^{-\lambda} E_1} J_0^{-1} [\zeta^{-\lambda} E_1 * H_0^0] \end{cases}$$

とおくと, 縮小写像の原理を用いることによって次が成り立つ.

Lemma 5. $M > \|\xi_0^0\|_\infty + \|\eta_0^0\|_\infty$, $m > \mu_0^0 + \nu_0^0$ とする. このとき, ある $\bar{\varepsilon} > 0$ に対して次が成り立つ: 任意の $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ に対して,

$$\begin{cases} \xi_0^\varepsilon = \frac{1}{\zeta^{-\lambda} E_1} J_0^{-1} [\zeta^{-\lambda} E_1 * G_0^\varepsilon[\xi_0^\varepsilon; \mu_0^\varepsilon[\xi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon], \nu_0^\varepsilon[\xi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon]]], \\ \eta_0^\varepsilon = \frac{1}{\zeta^{-\lambda} E_1} J_0^{-1} [\zeta^{-\lambda} E_1 * H_0^\varepsilon[\xi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon; \mu_0^\varepsilon[\xi_0^\varepsilon, \eta_0^\varepsilon]]] \end{cases}$$

をみたすような $(\xi_0^e, \eta_0^e) \in ([\varphi_0^* E_1]^\perp \cap M\overline{B_X})^2$ が唯一つ存在する. 但し, $(\mu_0^e[\xi, \eta], \nu_0^e[\xi, \eta])$ は, $(\xi, \eta) \in ([\varphi_0^* E_1]^\perp \cap M\overline{B_X})^2$ に対して,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mu_0^e[\xi, \eta] \\ \nu_0^e[\xi, \eta] \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta_0 \gamma_0} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_0 \\ -\beta_0 & \beta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \varphi_0, K_0^e[\xi; \mu_0^e[\xi, \eta], \nu_0^e[\xi, \eta]] \rangle \\ \langle \varphi_0, L_0^e[\xi, \eta; \mu_0^e[\xi, \eta]] \rangle \end{pmatrix} \\ (\mu_0^e[\xi, \eta], \nu_0^e[\xi, \eta]) \in [-m, m]^2 \end{cases}$$

をみたすものである.

これによって, $\tau = 0$ の近傍において (P_τ) の解が存在することが分かる. $\square$

Step 3. $\tau \in T \setminus \{0\}$ ならば, τ は T の内点であること.

$\tau = \tau_0 \in T \setminus \{0\}$ であるとき, その近傍において, 次の形で (P_τ) を解く.

$$z = z_{\tau_0} + \varepsilon \xi, \quad y = y_{\tau_0} + \varepsilon \eta, \quad \kappa = \kappa_{\tau_0} - \varepsilon \mu, \quad \tau = \tau_0 + \varepsilon \nu.$$

但し, $\xi \in b_{\tau_0}^{-1}(1), \eta \in [\varphi_{\tau_0}^* E_1]^\perp$,

$$b_{\tau_0}(\xi) := p(p-1) \langle \xi E_1, u_{\tau_0}^{p-2} \varphi_{\tau_0}^2 \rangle \quad (\xi \in X(\mathbf{R}^n)_r)$$

とする. 以下, τ_0 を単に τ で表すことにする. このとき (ξ, η) のみたすべき方程式は,

$$(I - Y_\tau) \xi = \frac{1}{E_1} E_1 * G_\tau^e[\xi; \mu, \nu], \quad (I - Y_\tau) \eta = \frac{1}{E_1} E_1 * H_\tau^e[\xi, \eta; \mu]$$

となる. ここで

$$\begin{cases} G_\tau^e[\xi; \mu, \nu] := \frac{1}{\varepsilon} [(u_\tau + \varepsilon(\xi - \mu)E_1)^p - u_\tau^p - (1 - \tau)((\kappa_\tau - \varepsilon\mu)E_1)^p - (\kappa_\tau E_1)^p] \\ \quad + \nu((\kappa_\tau - \varepsilon\mu)E_1)^p - p u_\tau^{p-1} \xi E_1, \\ H_\tau^e[\xi, \eta; \mu] := \frac{1}{\varepsilon} [(u_\tau + \varepsilon(\xi - \mu)E_1)^{p-1} - u_\tau^{p-1}] (\varphi_\tau + \varepsilon \eta E_1) \end{cases}$$

である. このとき $(I - Y_\tau)(X(\mathbf{R}^n)_r) \subset [\varphi_\tau^* E_1]^\perp$ より,

$$\langle \varphi_\tau, G_\tau^e[\xi; \mu, \nu] \rangle = 0, \quad \langle \varphi_\tau, H_\tau^e[\xi, \eta; \mu] \rangle = 0$$

が要請される. この条件は,

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta_\tau \gamma_\tau} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\tau \\ -\beta_\tau & \theta_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \varphi_\tau, K_\tau^e[\xi; \mu, \nu] \rangle \\ \langle \varphi_\tau, L_\tau^e[\xi, \eta; \mu] \rangle + 1 \end{pmatrix}$$

と同値である. 但し,

$$\begin{cases} K_\tau^e[\xi; \mu, \nu] := G_\tau^e[\xi; \mu, \nu] + p\mu(u_\tau^{p-1} - (1 - \tau)(\kappa_\tau E_1)^{p-1})E_1 - \nu(\kappa_\tau E_1)^p, \\ L_\tau^e[\xi, \eta; \mu] := H_\tau^e[\xi, \eta; \mu] + p(p-1)\mu u_\tau^{p-2} \varphi_\tau(\xi - \mu)E_1 \end{cases}$$

である. ここで

$$\begin{cases} \mu_\tau^0 := \frac{1}{\beta_\tau}, \quad \nu_\tau^0 := \frac{\theta_\tau}{2\gamma_\tau}, \quad G_\tau^0 := -p\mu_\tau^0(u_\tau^{p-1} - (1 - \tau)(\kappa_\tau E_1)^{p-1})E_1 + \nu_\tau^0(\kappa_\tau E_1)^p, \\ \xi_\tau^0 := \frac{1}{\zeta^{-\lambda} E_1} J_\tau^{-1}[\zeta^{-\lambda} E_1 * G_\tau^0] + \frac{1}{\alpha_\tau} (1 - p(p-1) \langle \zeta^\lambda J_\tau^{-1}[\zeta^{-\lambda} E_1 * G_\tau^0], u_\tau^{p-2} \varphi_\tau^2 \rangle), \\ H_\tau^0 := p(p-1)u_\tau^{p-2} \varphi_\tau(\xi_\tau^0 - \mu_\tau^0)E_1, \quad \eta_\tau^0 := \frac{1}{\zeta^{-\lambda} E_1} J_\tau^{-1}[\zeta^{-\lambda} E_1 * H_\tau^0] \end{cases}$$

とおくと, 縮小写像の原理を用いることによって次が成り立つ.

Lemma 6. $M > \|\xi_\tau^0\|_\infty + \|\eta_\tau^0\|_\infty$, $m > \mu_\tau^0 + \nu_\tau^0$ とする. このとき, ある $\varepsilon > 0$ に対して次が成り立つ: 任意の $\varepsilon \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ に対して,

$$\eta_\tau^\varepsilon = \frac{1}{\zeta^{-\lambda} E_1} J_0^{-1} [\zeta^{-\lambda} E_1 * H_\tau^\varepsilon [\xi_\tau^\varepsilon [\eta_\tau^\varepsilon], \eta_\tau^\varepsilon; \mu_\tau^\varepsilon [\xi_\tau^\varepsilon [\eta_\tau^\varepsilon], \eta_\tau^\varepsilon]]]$$

をみたすような $\eta_\tau^\varepsilon \in [\varphi_\tau^* E_1]^\perp \cap M\overline{B_X}$ が唯一つ存在する. 但し, $\xi_\tau^\varepsilon[\eta]$ は, $\eta \in [\varphi_\tau^* E_1]^\perp \cap M\overline{B_X}$ に対して,

$$\begin{cases} \xi_\tau^\varepsilon[\eta] = \frac{1}{\zeta^{-\lambda} E_1} J_\tau^{-1} [\zeta^{-\lambda} E_1 * G_\tau^\varepsilon [\xi_\tau^\varepsilon[\eta]; \mu_\tau^\varepsilon [\xi_\tau^\varepsilon[\eta], \eta], \nu_\tau^\varepsilon [\xi_\tau^\varepsilon[\eta], \eta]] \\ \quad + \frac{1}{\alpha_\tau} (1 - p(p-1) < \zeta^\lambda J_\tau^{-1} [\zeta^{-\lambda} E_1 * G_\tau^\varepsilon [\xi_\tau^\varepsilon[\eta]; \mu_\tau^\varepsilon [\xi_\tau^\varepsilon[\eta], \eta], \nu_\tau^\varepsilon [\xi_\tau^\varepsilon[\eta], \eta]], u_\tau^{p-2} \varphi_\tau^2 >), \\ \xi_\tau^\varepsilon[\eta] \in b_\tau^{-1}(1) \cap M\overline{B_X} \end{cases}$$

をみたすものであり, $(\mu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta], \nu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta])$ は, $(\xi, \eta) \in (b_\tau^{-1}(1) \cap M\overline{B_X}) \times ([\varphi_\tau^* E_1]^\perp \cap M\overline{B_X})$ に対して,

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta] \\ \nu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta] \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta_\tau \gamma_\tau} \begin{pmatrix} 0 & \gamma_\tau \\ -\beta_\tau & \theta_\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} < \varphi_\tau, K_\tau^\varepsilon[\xi; \mu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta], \nu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta]] > \\ < \varphi_\tau, L_\tau^\varepsilon[\xi, \eta; \mu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta]] > + 1 \end{pmatrix} \\ (\mu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta], \nu_\tau^\varepsilon[\xi, \eta]) \in [-m, m]^2 \end{cases}$$

をみたすものである.

これによって, 任意の $\tau \in T \setminus \{0\}$ は T の内点であることが分かり, Step 2 と合わせて, T は $[0, 1]$ の中で開であることが分かる. $\square$

最後に, T が $[0, 1]$ の中で閉であることを示す. このためにまず, 必要な a priori 評価を導く.

Step 4. a priori 評価.

$\tau \in T$ とすると, Lemma 1 によって次の積分表示が成り立つ.

$$\begin{cases} z_\tau(r) = \int_0^\infty (u_\tau(t)^p - (1-\tau)(\kappa_\tau E(t))^p) \min\{\sigma_1(r), \sigma_1(t)\} E_1(t) t^{n-1} dt, \\ y_\tau(r) = p \int_0^\infty u_\tau(t)^{p-1} \varphi_\tau(t) \min\{\sigma_1(r), \sigma_1(t)\} E_1(t) t^{n-1} dt, \\ z'_\tau(r) = \frac{1}{E_1(r)^2 r^{n-1}} \int_r^\infty (u_\tau(t)^p - (1-\tau)(\kappa_\tau E(t))^p) E_1(t) t^{n-1} dt, \\ y'_\tau(r) = \frac{p}{E_1(r)^2 r^{n-1}} \int_r^\infty u_\tau(t)^{p-1} \varphi_\tau(t) E_1(t) t^{n-1} dt. \end{cases}$$

特に, z_τ, y_τ は (動径方向に) 単調増大である.

一方, $\kappa_\tau E_1$ 及び u_τ はそれぞれ $(P_\tau)_{\kappa_\tau}$ の劣解及び優解になっているので, $\kappa_\tau E_1 \leq \underline{u}_\tau \leq u_\tau$ をみたす $(P_\tau)_{\kappa_\tau}$ の最小解 $\underline{u}_\tau$ が存在する. この $\underline{u}_\tau$ は (動径方向に関して) 単調減少な函数の列の極限になっているので, 再び単調減少になることが分かる. Lemma 4 によって $\underline{u}_\tau = u_\tau$ であるから, u_τ は単調減少である. これを用いると, φ_τ も単調減少であることが分かる. 更に, κ_τ は τ について単調減少であることも分かる.

Lemma 7. (i) $\tau \in T$ とすると, z_τ, y_τ は (動径方向に関して) 単調増大, u_τ, φ_τ は単調減少である.

(ii) $\tau_1, \tau_2 \in T, \tau_1 < \tau_2$ とすると, $\kappa_{\tau_1} > \kappa_{\tau_2}$ である. 特に, $\{\kappa_\tau\}_{\tau \in T}$ は有界である.

いま, $\tilde{\varphi} > 0$ かつ

$$\tilde{\varphi}(r) = \begin{cases} 1 & \text{for } 0 < r \ll 1, \\ E_1(r) & \text{for } r \gg 1 \end{cases}$$

なる $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbf{R}^n)_r$ をとり, $0 < \alpha < 1$ に対して

$$\omega_\alpha(r) := \int_0^r \frac{\tilde{\varphi}(t)^{1-1/(n-2)}}{E_1(t)^{\alpha-1/(n-2)}} dt$$

とおく. $(P_\tau)_{\kappa_\tau}$ より

$$-[z'_\tau E_1^2 r^{n-1}]'(r) = (u_\tau(r)^p - (1-\tau)(\kappa_\tau E_1(r))^p) E_1(r) r^{n-1}$$

が成り立つが, これに $\omega_\alpha(r) E_1(r)^{\alpha-1}$ をかけて積分 (部分積分) すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty (u_\tau(r)^p - (1-\tau)(\kappa_\tau E_1(r))^p) \omega_\alpha(r) E_1(r)^\alpha r^{n-1} dr \\ &= \int_0^\infty u_\tau(r) \Omega_\alpha(r) E_1(r)^\alpha r^{n-1} dr - \frac{\kappa_\tau}{\alpha((n-2)n\omega_n)^{(n-1)/(n-2)}} \end{aligned}$$

が得られる. ここで, Ω_α は

$$\frac{\Omega_\alpha(r)}{\omega_\alpha(r)} \leq \begin{cases} c_\alpha & \text{if } n \geq 5, \\ c_\alpha \log(e + \frac{1}{r}) & \text{if } n = 4, \\ c_\alpha(1 + \frac{1}{r}) & \text{if } n = 3 \end{cases}$$

をみたすものである. Young の不等式と Lemma 7 により, $n \geq 4$ ($1 < p < n/(n-2)$) または $n = 3, 3/2 < p < 3$ ならば,

$$\int_0^\infty u_\tau(r)^p \omega_\alpha(r) E_1(r)^\alpha r^{n-1} dr \leq C_\alpha$$

が成り立つ. z_τ の積分表示と Lemma 7 を用いて次が得られる.

Lemma 8. $n \geq 4$ ($1 < p < n/(n-2)$) または $n = 3, 3/2 < p < 3$ とすると, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $\tau \in T$ に対して

$$u_\tau(r) \leq C(1 + E_1(r)) \quad \text{for } 0 < r < \infty$$

が成り立つ. □

Step 5. T は $[0, 1]$ において閉である.

$z_\tau, y_\tau, z'_\tau, y'_\tau$ の積分表示と Lemma 7, Lemma 8 を用いて次が得られる.

Lemma 9. $n \geq 4$ ($1 < p < n/(n-2)$) または $n = 3$, $3/2 < p < 3$ とする. $a < b < \infty$ とすると, 次が成り立つ.

- (i) $\{u_\tau\}_{\tau \in T}$ は $[a, b]$ 上一様有界, 同等連続である.
- (ii) $\{\varphi_\tau\}_{\tau \in T}$ は $[0, b]$ 上一様有界, 同等連続である.

これらを用いて T が閉であることを示す. このために, $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty \subset T$, $\tau_j \rightarrow \tau$ as $j \rightarrow \infty$ とする. Lemma 9 と Ascoli-Arzelà の定理により, $\{j_i\}_{i=1}^\infty \subset \{j\}_{j=1}^\infty$, $u \in C(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})_r$, $\varphi \in C(\mathbf{R}^n)_r$ 及び $\kappa \geq 0$ が存在して,

$$\begin{cases} u_{\tau_{j_i}} \rightarrow u & \text{as } i \rightarrow \infty \quad (\mathbf{R}^n \setminus \{0\} \text{ 上局所一様収束}), \\ \varphi_{\tau_{j_i}} \rightarrow \varphi & \text{as } i \rightarrow \infty \quad (\mathbf{R}^n \text{ 上局所一様収束}), \\ \kappa_{\tau_{j_i}} \rightarrow \kappa & \text{as } i \rightarrow \infty \end{cases}$$

が成り立つ. 積分表示において $\tau = \tau_{j_i}$ として $i \rightarrow \infty$ とすれば, (*) の記号の下で,

$$\begin{cases} z(r) = \int_0^\infty (u(t)^p - (1-\tau)(\kappa E(t))^p) \min\{\sigma_1(r), \sigma_1(t)\} E_1(t) t^{n-1} dt, \\ y(r) = p \int_0^\infty u(t)^{p-1} \varphi(t) \min\{\sigma_1(r), \sigma_1(t)\} E_1(t) t^{n-1} dt \end{cases}$$

が得られ, Lemma 7 を用いると $z(0) = 0$ となる. これより,

$$\begin{cases} -u''(r) - \frac{n-1}{r} u'(r) + u(r) = u(r)^p - (1-\tau)(\kappa E(r))^p & \text{for } 0 < r < \infty, \\ -\varphi''(r) - \frac{n-1}{r} \varphi'(r) + \varphi(r) = p u(r)^{p-1} \varphi(r) & \text{for } 0 < r < \infty \end{cases}$$

が成り立つ. 各 u_{τ_j} , φ_{τ_j} は単調減少であるから, u , φ は非増大である. 従って, ある $\gamma, \tilde{\gamma} \geq 0$ が存在して

$$u(r) \rightarrow \gamma, \quad \varphi(r) \rightarrow \tilde{\gamma} \quad \text{as } r \rightarrow \infty$$

となる. このとき, $u'(r) \rightarrow 0$, $u''(r) \rightarrow 0$, $\varphi'(r) \rightarrow 0$, $\varphi''(r) \rightarrow 0$ as $r \rightarrow \infty$ であるから, 上式より $\gamma = \gamma^p$, $\tilde{\gamma} = p\gamma^{p-1}\tilde{\gamma}$ である. よって, $\gamma = 0$ or 1 , $\tilde{\gamma} = 0$ である.

いま $\gamma = 1$ であると仮定する. このとき φ は,

$$\frac{1}{r^{n-1}} [r^{n-1} \varphi'(r)]' + (p u(r)^{p-1} - 1) \varphi(r) = 0 \quad \text{for } 0 < r < \infty$$

の解であり, $p u(r)^{p-1} - 1 \geq p - 1 > 0$ だから, Sturm の比較定理を用いることにより, φ は振動することが分かる. これは φ が非増大であることに矛盾するから, $\gamma = 0$ である.

最後に $\kappa > 0$ であることを示す. このために次の Lemma を用いる.

Lemma 10. u を $(P)_0$ の解または $u \equiv 0$ とすると, $(L; u)$ は (非自明な) 球対称解をもたない.

$\kappa = 0$ と仮定する. このとき u は $(P)_0$ の解または $u \equiv 0$ であり, その線型化方程式 $(L; u)$ は非自明な解をもつ. これは Lemma 10 に矛盾するから, $\kappa > 0$ である. 従って (u, φ, κ) は (P_τ) の解である.

よって T は $[0, 1]$ において閉である. □

以上で Theorem 2 の証明が完結する.