

量子力学に於ける「交換エネルギー」なる概念に就て*

S. Flügge

外 山 修 譯

原子及び分子に關する物理学に於ては「交換エネルギー」なる概念と交換により生ずるエネルギー單位の分裂が重要な役割を演じてゐる。此の方面の研究に携つた實驗物理學者は孰れも此の現象が如何に並外れて重要なものであるかと云ふ事を認識してゐる。即ち此の現象は中性の He 原子や H_2 分子の如き二個の電子を持つ最も簡単な體系の分光學的性質に現れるかと思へば、一方に於て又金屬の内部に於ける金屬電子の運動に關する複雑極まる問題にも現れ、導體や絶縁體の性質を理解する根底を與へる。更に此の現象は極めて重要な強磁性現象の原因となり、最後に又等極化學結合の生成と原子價の概念に對する物理的説明を與へる。然るに交換エネルギーなる概念は斯かる重要性にも拘らず、それを直觀的に理解する事は決して容易でなく、しかも或る限られた範圍に於てのみ可能である。そこで今筆者は之に關して講義的な内容の解説を行ひたいと思ふ。勿論筆者は此處に述べる事柄が理論専門家に對しては何等目新しいものでない事を知つてゐるが、筆者の意圖する處は交換エネルギーの概念を出来る限り既知の簡単な古典力學的現象との類似に於て理解する事に努め、以て實驗に携はつてゐる人々の一助としたい點にある。但し此處では最も基礎的なものの理解に留め、複雑な問題(例へば二個よりも多數の粒子間の現象の如き)や曩に述べた種々の具體的な例への應用には觸れない事にする。

吾々は既に古典力学を用ひる事に依り、連結された二個の振子の例に於て、本來の單一な振動数が結合の結果二つの振動数に分れる事を取扱つてゐる。即ち「なる強さのバネで結ばれた、固有振動数 ω_0 なる二個の相等しい振子の運動は次の微分方程式で表はされる。***

$$\left. \begin{aligned} m\left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1\right) &= f \cdot (x_2 - x_1), \\ m\left(\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2\right) &= f \cdot (x_1 - x_2). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(1)式は兩振子が等しい振動数を以て振動する事を表はす二個の正規解を與へる。今斯かる解を求める爲に

$$x_1 = a_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = a_2 e^{i\omega t}. \quad (2)$$

と置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} a_1\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{f}{m}\right) - a_2 \frac{f}{m} &= 0, \\ -a_1 \frac{f}{m} + a_2\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{f}{m}\right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3)式を解き得る爲には、これから得られる行列式が零とならなければならない。即ち

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{f}{m}\right)^2 - \left(\frac{f}{m}\right)^2 = 0$$

* Naturwiss., 28, Heft 43, 673—7 (1940).

** 本論文に於ける振動数 ω は眞の振動数に 2π を乗じたものである。(譯者註)

之から次の二つの解が得られる。

i) $\omega_1 = \omega_0$, $a_1 = a_2$. 対称解. 此の場合は兩振子が同一の位相を以て振動する. 従つて兩振子を連結するバネは常に同じ元の長さを保ち少しも引張られないから, 兩振子は當然本来の固有振動数を以て振動する.

ii) $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2f/m}$, $a_1 = -a_2$. 反対称解. 此の場合は兩振子が丁度反対の位相を以て振動する. 従つて兩振子を結ぶバネの中心は常に静止し, 各振子は元々夫れに働らく力 $m\omega_0^2$ と同方向に更に $2f$ なる力を加へられる事になる.

任意に與へられた始めの條件を満足する兩振子の種々の運動は, よく知られてゐる様に上述の二個の正規解を重ね合す事により得られる. 即ち

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= ae^{i\omega_1 t} + be^{i\omega_2 t}, \\ x_2 &= ae^{i\omega_1 t} - be^{i\omega_2 t}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

斯くして吾々は簡単な計算により元の固有振動数が二個の振動数に分裂する事を確め得た。

今此の例を量子力学に移して考へる時, 前と同様振動数の分裂が矢張り豫想される. 而も此の場合振動数とエネルギーは Planck の関係式

$$E = \hbar\omega. \quad (5)$$

で結ばれるから, 振動数の分裂に伴ひ結局エネルギーの分裂が起らねばならない。

連結された振子の例に留まる限り, 量子力学の振動数計算は古典力学のそれと少しも變らない. 併し吾々は此處に於て稍々異常な道を取つて進まうとするのである. 即ち吾々は運動方程式(1)から出發する代りに, Hamilton 型のエネルギーの式から出發しようとするのである. エネルギーの式は(1)式の最初の式に dx_1/dt を乗じ, 第二式に dx_2/dt を乗じて加へ合せ, t に就き積分すれば次の如く得られる.

$$\frac{m}{2} \left(\left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 \right) + \frac{m}{2} \left(\omega_0^2 + \frac{f}{m} \right) (x_1^2 + x_2^2) - fx_1 x_2 = E. \quad (6)$$

此處に於て速度の代りに運動量 $p_1 = m \cdot dx_1/dt$ を導入する時は, Hamilton 型のエネルギーの式が得られる.

$$\begin{aligned} H(p_1, x_1, p_2, x_2) &= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{m}{2} \left(\omega_0^2 + \frac{f}{m} \right) x_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m}{2} \left(\omega_0^2 + \frac{f}{m} \right) x_2^2 - fx_1 x_2 \\ &= H_1(p_1, x_1) + H_2(p_2, x_2) + H_{12}(x_1, x_2) = E. \end{aligned} \quad (7)$$

即ち系全体のエネルギーは第一の振子にのみ關する項 H_1 と, 同様に第二の振子にのみ關する項 H_2 と, 更に兩者の結合項 H_{12} とからなる. こゝに於て我々は今次の如く座標と運動量の變換を行ふ.

$$\left. \begin{aligned} q_1' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), & p_1' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_2), \\ q_2' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), & p_2' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_2). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

斯かる新しい變數を使用する時は, (7)式の二乗項はその儘の形で残るが, 結合項は(7)式の如く x_1 と x_2 との積を含まず矢張り二乗項で表はされる. 即ち

$$x_1^2 + x_2^2 = q_1'^2 + q_2'^2; \quad p_1^2 + p_2^2 = p_1'^2 + p_2'^2; \quad x_1 x_2 = \frac{1}{2}(q_1'^2 - q_2'^2).$$

Hamilton 函数は従つて次の如く書き表はされる.

$$\left. \begin{aligned} & H(p_1'q_1', p_2'q_2') \\ &= \frac{p_1'^2}{2m} + \frac{m}{2} \left(\omega_0^2 + \frac{f}{m} - \frac{f}{m} \right) q_1'^2 + \frac{p_2'^2}{2m} + \frac{m}{2} \left(\omega_0^2 + \frac{f}{m} + \frac{f}{m} \right) q_2'^2 \\ &= H_1'(p_1'q_1') + H_2'(p_2'q_2') = E. \end{aligned} \right\} (9)$$

即ち Hamilton 函数は今や二つの項の和として表はされ、その各々が一つの調和振動子を表はす譯である。(7)式に存在した結合項はもはや存在しない。従つて各振動子は夫々他に無關係に振動する。第一の振動子は $\omega_1 = \omega_0$ なる振動数を持ち、第二の振動子は $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2f/m}$ なる振動数を持つ。

斯くして吾々は量子化に都合のよい出発點に到達した譯である、即ち今や變數分離が可能であり、各振動子は別々に量子化され得るからである。系全體の持ち得るエネルギーの單位は従つて二個の量子數 n_1 及び n_2 に依つて表はされる。即ち

$$E_{n_1 n_2} = \hbar \omega_1 (n_1 + \frac{1}{2}) + \hbar \omega_2 (n_2 + \frac{1}{2}). \quad (10)$$

なる式で與へられるエネルギーが此の系に許されたエネルギー値(固有値)である*。此のエネルギー式は振動数の分裂の結果として更にエネルギーの固有値の分裂を惹き起す。若しも結合がないものとすれば、第一の振動子が $n_1 = k$ なる量子數を持ち、第二の振動子が $n_2 = l$ なる量子數を持つ状態と、反對に $n_1 = l$, $n_2 = k$ なる状態とは全く同じ事になる筈である。即ち

$$E_{kl} = E_{lk} = \hbar \omega_0 (l + k + 1).$$

併し乍ら結合の存在の爲に此の二つの状態のエネルギーは相互に異なり

$$E_{kl} - E_{lk} = \hbar (\omega_1 - \omega_2) (k - l).$$

なる差を生じる。此の種の分裂は全く量子力学に特有のものである。即ち一つの系の二つの異なる振動状態が結合のない場合に等しいエネルギー値を持つ時、つまり是等二つの状態が互に縮退してゐる時は、系のエネルギー固有値が結合を考慮することにより二個の異なる固有値に分裂する。此の分裂したエネルギー値の半分

$$A_{kl} = \frac{1}{2} (E_{kl} - E_{lk}).$$

を交換エネルギーと名附けるのである。

そこで今上述の如き振子或は振動子の如き特殊な例を離れてもつと一般的に二個の緩く結合された系を考へる事にする。斯かる場合を取扱ふ出発點は矢張り Hamilton 函数である。既に(7)式に於て吾々は今の目的に對して本質的なものを含むより一般的な表現を暗示した。即ち Hamilton 函数は次の如き形を取らねばならぬ。

$$H = H_1 + H_2 + H_{12} = E. \quad (11)$$

茲に H_1 と H_2 は夫々第一及び第二の粒子の(或は、更に一般的な言ひ方をすれば、自由度の)座標と運動量とに關する同じ函数であり、 H_{12} は結合項である。此の結合項は物理的に重要な場合には常に對稱性を持つてゐて、二個の粒子の交換により變らない。即ち

$$H_{12} = H_{21} \quad (12)$$

作用と反作用の原理は簡單に此の對稱性に現れてゐる。

吾々は先づ上述の二個の系が互に全く無關係な状態にあるものと假定し、(11)式から H_{12}

* 半古典的理論に依る時は $\hbar \omega_1 n_1 + \hbar \omega_2 n_2$ となる。よなる附加項は量子力学に依り與へられ、零度エネルギーを意味する。

なる項を除いて考へる。斯うしておいて、次の様な方法で量子力學的取扱を進める。即ち吾々は今 H_1 及び H_2 の代りに、夫々の粒子の座標に作用する演算子を置く。その結果第一の粒子に許された振動状態は次の微分方程式を解いて定められる。

$$H_1 u = E u.$$

此の式は結局第一の系に關する Schrödinger 式に過ぎず、その境界條件を満足する解として、夫々對應する固有函数 $u_1, u_2, \dots, u_r, \dots, u_s, \dots$ を持つ固有値 $E_1, E_2, \dots, E_r, \dots, E_s, \dots$ を與へる。 u は此の場合第一の粒子の座標の函数で、完全な直交系をなし、1に規格化される。即ち

$$\int u_r(1) u_s(1) dV_1 = \delta_{rs} = 0, \quad (r \neq s) \\ = 1, \quad (r = s)$$

H_1 と H_2 とは相等しい演算子であるから(共鳴條件)、第二の粒子に對しても全く同じ固有値と固有函数が得られる。但し此の場合の u は第二の粒子の座標のみに關する函数である。茲に於て吾々は第一の粒子と第二の粒子とからなる全系に對する二つの許された固有解を持つ事になる。即ち $u_r(1) u_s(2)$ は第一の粒子が r なる状態にあつて E_r なるエネルギーを持ち、第二の粒子が s なる状態にあつて E_s なるエネルギーを持つ事を意味し、 $u_s(1) u_r(2)$ は丁度此の逆を意味する譯である。此の二つの解の直線の組合せ

$$\phi = a u_r(1) u_s(2) + b u_s(1) u_r(2). \quad (13)$$

は從つて又斯かる系に $E_r + E_s$ なるエネルギーを固有値として與へる解となる。

第一の系と第二の系との間に何等かの結合がない限り、(13)式に於ける任意の恒數 a 及び b を更に詳しく定める術はない。吾々は $u_r(1) u_s(2)$ なる状態と $u_s(1) u_r(2)$ なる状態とは相互に縮退してゐると云ふ。此の縮退が現れる爲には演算子 H_1 と H_2 とが等しくなければならぬ處から、此の現象は又量子力學的共鳴と呼ばれる。或は又是等の相互に縮退した状態が、兩粒子の交換に依り得られる處から交換縮退とも呼ばれる。

扨て今結合項 H_{12} を導入する時、係數 a, b の決定は始めて可能となる。茲に於て吾々は第二の假定を設ける。即ち結合項は充分小さく、摂動として取扱ひ得るものとする。第一次の近似として吾々は固有値に對する結合項の影響のみを考慮し、固有函数に對する影響は之を無視して(13)式の解を(11)の微分方程式に代入する。その結果は

$$(E_r + E_s + H_{12} - E) \phi = 0.$$

今固有値が結合項の爲に ϵ だけずれるものとすれば

$$E = E_r + E_s + \epsilon. \quad (14)$$

從つて

$$(H_{12} - \epsilon)(a u_r(1) u_s(2) + b u_s(1) u_r(2)) = 0. \quad (15)$$

茲に於て上式に共軛複素函数を乗じ。即ち $u_r^*(1) u_s^*(2)$ 或は $u_s^*(1) u_r^*(2)$ を乗じて、夫々兩粒子の全座標域に就き二回の積分を行ふ時は、函数の直交性に基き次の結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} a \iint dV_1 dV_2 u_r(1) u_s(2) H_{12} u_r(1) u_s(2) \\ + b \iint dV_1 dV_2 u_r^*(1) u_s^*(2) H_{12} u_s(1) u_r(2) - a \cdot \epsilon = 0, \\ a \iint dV_1 dV_2 u_s^*(1) u_r^*(2) H_{12} u_r(1) u_s(2) \\ + b \iint dV_1 dV_2 u_s^*(1) u_r^*(2) H_{12} u_s(1) u_r(2) - b \cdot \epsilon = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

最後に茲で吾々は第三の假定を導入する。即ち(12)式に示された結合項の對稱性がそれであ

る。その結果(16)式に於いて、主対角線に現れる二組の積分は互に等しいものとなる。即ち

$$\begin{aligned} \iint dV_1 dV_2 u_r^*(1) u_s^*(2) H_{12} u_r(1) u_s(2) \\ \iint dV_1 dV_2 u_s^*(1) u_r^*(2) H_{12} u_s(1) u_r(2) = K. \end{aligned} \quad (17)$$

同様にして副対角線の方も等しくなるから

$$\begin{aligned} \iint dV_1 dV_2 u_s^*(1) u_r^*(2) H_{12} u_r(1) u_s(2) \\ = \iint dV_1 dV_2 u_r^*(1) u_s^*(2) H_{12} u_s(1) u_r(2) = A. \end{aligned} \quad (18)$$

従つて(16)式は次の如く簡単化される。

$$a(K-\varepsilon) + bA = 0, \quad aA + b(K-\varepsilon) = 0.$$

此の聯立方程式の解が存在する爲には、是から得られる行列式が零に等しくならねばならない。即ち $(K-\varepsilon)^2 = A^2$ でなければならない。従つて茲に於て次の二つの場合を區別しなければならぬ事になる。

i) $K-\varepsilon = -A$; $\varepsilon = K+A$; $a=b$; 對稱解。

$$E = E_r + E_s + K + A, \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_r(1)u_s(2) + u_s(1)u_r(2)).$$

ii) $K-\varepsilon = +A$; $\varepsilon = K-A$; $a=-b$; 反對稱解。

$$E = E_r + E_s + K - A, \quad \psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_r(1)u_s(2) - u_s(1)u_r(2)).$$

即ち攝動エネルギーは最初に先づ K だけのエネルギー値のズレを生じる。此の K なるエネルギー量は然し(17)式に依り容易に古典的に理解出来るものである。即ち $\rho_r(1) = u_r^*(1)u_r(1)$ は第一の粒子が r なる状態にある場合の荷電密度分布を表はすを以て

$$K = \iint dV_1 dV_2 \rho_r(1) \rho_s(2) H_{12}$$

と書く事が出来る。之は丁度二組の荷電雲の間の相互作用のエネルギーを古典的に表はしたものに外ならない。即ち今二個の電子を取つて考へるならば、 $H_{12} = e^2/r_{12}$ であるから、之からして直ちに次のよく知られた静電氣學の式が得られる。

$$K = \iint \frac{dV_1 \cdot e \rho_r(1) \cdot dV_2 \cdot e \rho_s(2)}{r_{12}} = \iint \frac{dQ_1^{(r)} dQ_2^{(s)}}{r_{12}}.$$

茲に $dQ_1^{(r)}$, $dQ_2^{(s)}$ は夫々容積 dV_1 , dV_2 中の荷電量を表はす。

然し乍ら此の様な古典的に容易に解釋出来るエネルギー値のズレの外に、上述の如く尚 $E_r + E_s + K$ なる値を中心として對稱的な二つの値にエネルギー値が分裂するのである。斯かる分裂は古典的には唯振動數に於てのみ現れるに過ぎない。即ち曩に振動子の例に於て誘導した一般的な形以上には出でない。Planck の式に依つて始めて今斯かる分裂がエネルギー量に現れるのである。即ち A なる量は此の場合エネルギーである。併し此の A なるエネルギーはその儘容易に直觀的に理解出来ない。此のエネルギーは攝動論に依る取扱に於てそれが持つ特殊な形から交換積分と呼ばれる。或は又交換エネルギーとも呼ばれる。

以上により振動數の分裂が古典力学に於ても、又量子力学に於ても同様に現れる事を示したが、此の分裂の意味をはつきりさせる事は未だ試みなかつた。然しそれが不可能でない事を示す爲に吾々は再び連結された振子の問題に立歸つて考へよう。

先づ兩振子の間の連結が未だ存在しないものとして出發する事にする。そして第一の振子は振動状態にあり、第二の振子は静止してゐるものとする。或る時刻($t=0$)に兩振子の連結が開始されるものとする。即ちその時刻に兩振子を繋ぐバネを掛けるのである。その時刻とし

ては振動してゐる第一の振子が丁度その静止の時の位置を通る瞬間を擇ぶ事とする。斯くして次の如き最初の條件が満足される。

$$x_1=0, dx_1/dt \neq 0, x_2=0, dx_2/dt=0. (t=0 \text{ に於て})$$

一般解を表はす(4)式は之に依り次の如き特殊な形を取る。

$$x_1 = a \left\{ \sin \omega_0 t + \frac{\omega_0}{\omega'} \sin \omega' t \right\}, \quad x_2 = a \left\{ \sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega'} \sin \omega' t \right\}.$$

但し ω' は次の如く與へられる。

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 + 2f/m},$$

振子の速度は微分により次式で表はされる。

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a\omega_0(\cos \omega_0 t + \cos \omega' t) = 2a\omega_0 \cos \frac{(\omega_0 + \omega')t}{2} \cos \frac{(\omega_0 - \omega')t}{2}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a\omega_0(\cos \omega_0 t - \cos \omega' t) = -2a\omega_0 \sin \frac{(\omega_0 + \omega')t}{2} \sin \frac{(\omega_0 - \omega')t}{2}. \end{aligned}$$

兩振子の結合が緩いものである限り、 ω' は ω_0 に極めて近い値を取る。従つて $\omega_0 - \omega'$ なる差は $\omega_0 + \omega'$ に比して甚だ小さいものとなる。その結果速度式の最初の部分は大なる振動数 $(\omega_0 + \omega')/2$ を持つた速い振動を表はし、第二の部分はそれに對する抑揚の働きを爲す。即ち上述の速い振動が $(\omega_0 - \omega')/2$ なる遙にゆつくりした振動数の第二の振動に乘せられて、その振幅が緩慢な脈動を示す。そこで吾々は急速に變化する高振動に就て平均した運動エネルギーを求めてみると

$$\begin{aligned} \bar{T}_1 &= \frac{m}{2} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} 4a^2 \omega_0^2 \cdot \frac{1}{2} \cos^2 \frac{(\omega_0 - \omega')t}{2} = ma^2 \omega_0^2 \cos^2 \frac{(\omega_0 - \omega')t}{2}, \\ \bar{T}_2 &= \frac{m}{2} \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 = \frac{m}{2} 4a^2 \omega_0^2 \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega')t}{2} = ma^2 \omega_0^2 \sin^2 \frac{(\omega_0 - \omega')t}{2}. \end{aligned}$$

此の結果は次の事を意味してゐる。即ち時刻 $t=0$ に於ては此の系の全エネルギーは第一の振子の運動のエネルギーの形として存在する。従つて $\bar{T}_2=0$ である。處が $t=\pi/(\omega_0 - \omega')$ なる時刻に於てはエネルギーが第一の振子から完全に第二の振子に移行して仕舞ひ、 $\bar{T}_1=0$ となる。次に $t=2\pi/(\omega_0 - \omega')$ なる時刻になると再び最初の状態に歸る。此の様にしてエネルギーが

$$\omega_A = \omega_0 - \omega'$$

なる振動数を以て第一の振子と第二の振子との間を往復する。その意味で ω_A なる振動数は交換振動数と呼ばれる。交換振動数は従つて 幾に計算した振動数の分裂値と一致するものである。

量子力学に對する類似をはつきりさせる爲に吾々は同様な事を尙他の言葉を用ひて表現してみよう。量子力学に於ける表はし方に従ひ、第一の粒子が全エネルギーを獲得してゐる時吾々は第一の粒子が r なる状態にあると言ひ、そのエネルギーを全部失つた状態にある時、第一の粒子が s なる状態にあると云ふ事にする。すると兩振子の間のエネルギーの交換を次の如く言ひ表はす事が出来る。即ち $t=0$ なる時刻に於ては吾々の振子系は $u_r(1)u_s(2)$ なる固有函数に依り表はされ、 $t=\pi/(\omega_0 - \omega')$ なる時刻に於ては $u_s(1)u_r(2)$ なる固有函数で表はされる。一般の固有函数は従つて次の如く表はされる。

$$\Psi(t) = a(t)u_r(1)u_s(2) + b(t)u_s(1)u_r(2).$$

係数 a 及び b は最早や(13)式に於けるが如き恒数ではなく、時間 t の週期的函数である。

既に斯かる立場を得た以上は、更に一般的な量子力学的形式を與へる事は最早さうむつかしい事ではない。吾々は唯 E なるエネルギーを持つた定常状態の完全な(時間を含む)固有函数が次の形を取る事を記憶すればよい。

$$\Psi = e^{iEt/\hbar} \phi$$

茲に ϕ は座標にのみ關係する Schrödinger 式の解である。二個の結合された粒子からなる系に對しては、吾々は既に夫々 E_1 及び E_2 なるエネルギーを持つた定常状態を表はす固有函数 Ψ_1 及び Ψ_2 を知つてゐる。即ち是等二つの完全な解は

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega_1 t} \{u_r(1)u_s(2) + u_s(1)u_r(2)\}, \quad \hbar\omega_1 = E_r + E_s + K + A,$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega_2 t} \{u_r(1)u_s(2) - u_s(1)u_r(2)\}, \quad \hbar\omega_2 = E_r + E_s + K - A.$$

一般解は此の二つの定常状態を表はす解の直線的組合せで表はされる。今振子の問題に於けると同様に、時刻 $t=0$ に於ては第一の粒子は r なる状態にあり、第二の粒子は s なる状態にあるものとする。即ち $t=0$ に於ては

$$\Psi = u_r(1)u_s(2).$$

となる。そこで Ψ_1 と Ψ_2 との組合せを造ると

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1 + \Psi_2) \\ &= \frac{1}{2} e^{i(E_r + E_s + K)t/\hbar} \left\{ [u_r(1)u_s(2) + u_s(1)u_r(2)] e^{iAt/\hbar} \right. \\ &\quad \left. + [u_r(1)u_s(2) - u_s(1)u_r(2)] e^{-iAt/\hbar} \right\} \\ &= e^{i(E_r + E_s + K)t/\hbar} \left\{ u_r(1)u_s(2) \cos \frac{At}{\hbar} + iu_s(1)u_r(2) \sin \frac{At}{\hbar} \right\} \end{aligned}$$

物理的な意味をつける爲に、今固有函数の代りに密度 $\rho = |\Psi|^2$ を導入すると

$$\rho = |u_r(1)u_s(2)|^2 \cos^2 \frac{At}{\hbar} + |u_s(1)u_r(2)|^2 \sin^2 \frac{At}{\hbar}.$$

此の結果は曩に振子の例に於て古典的方法により得たエネルギーの式と全く相似のものである。即ち上式に依れば $t=0$ なる時刻には第一の粒子が r なる状態にあり、第二の粒子が s なる状態にあるが、 $t = \frac{\pi\hbar}{2A}$ なる時間の後には丁度此の逆の状態が現れる事になる。粒子のエネルギーは一般に又粒子の位置する場所に結びついてゐると考へられる處から、此の場合兩粒子の「位置交代」と云ふ表現を用ひる事も出来る。併し「交換」と云ふ表現の方がより一般的で好ましい。とにかく斯かる「交換」が行はれる頻度は上述により

$$\omega_A = 2A/\hbar$$

となる。以上に依り筆者は交換積分なるものの意味をなるべく説明した。 ω_A なる振動数は「位置交代の頻度」であり、エネルギーの分裂値 $2A$ は Planck の式に依り此の振動数と結び附けられたエネルギーである。

之で交換エネルギーと云ふものを出来るだけ易く意味附けた積である。即ちその程度は結局 Planck の與へた量子論の基礎關係式が直觀的に理解出来るか出来ないかと云ふのと同程度に於てである。(完)