

## 多変数関数論に於ける値分布理論について

阪大 教養 野口潤次郎

序. 多変数関数論での値分布理論の現状—何がどこまでできていて、何が問題となっているか—を報告するのが本講の目的である。Kobayashi [14]には氏の双曲多様体の理論を中心とした詳しい解説があり、一部とれと重複する处もあるが、ここでは正則写像（整関数も含めて）の定量的研究—Nevanlinna 理論—to話を限る。しかしこの方面の結果も、より広い“正則写像論”といった見地から観る時その意義が明確になることが多い。例えば、Nevanlinna 理論と Kobayashi 双曲多様体の理論、そして代数多様体間の有理写像の研究等の間に非常に深い関係があることを示唆し、又実際示している結果が色々ある。しかしこれも全体としては *explicit* になっていないわけではなく、この間もある程度一般的な枠組の中ではつきりさせることもたいへん興味ある問題である。

§1 では以後頻繁に使われる積分等式を示す。§2 では  $\mathbb{C}^m$  上の整関数（或いは有理型関数）とそれらの定義域解析的集

合の関係について述べる。これはいわゆる Nevanlinna の第二主要定理と Weierstrass 積を発展させたものである。前者については更に Küster 多様体の中への正則写像についても証明する。§3 では  $\mathbb{C}^m$  から同時元代数多様体への非退化正則写像に対する第二主要定理を Carlson-Griffiths [4] 及び Griffiths-King [12] に従って述べる。§4 では代数多様体内の正則曲線の値分布について筆者の最近の結果 [9], [20] を紹介する。ここで触れなかった方面、及び応用については [14], [15], [21], [22], [23], [26] 及びこれらにある文献も参照して欲しい。

§1. 我々  $\mathbb{C}^m$  上の実数値 ( $+\infty, -\infty$  も含む) 関数で局所的に多重共調和関数の差でかけられるものの全体を現わす。

$\mathbb{C}^m$  上の標準的な座標を  $z = (z_1, \dots, z_m)$  とし次のようにおく:

$$\|z\|^2 = \sum_1^m |z_i|^2, \quad B(r) = \{ \|z\| < r \}$$

$$\partial B(r) = \{ \|z\| = r \}, \quad d = \partial + \bar{\partial}$$

$$d^c = \frac{\sqrt{-1}}{4\pi} (\partial - \bar{\partial}),$$

$$\varphi = dd^c \|z\|^2, \quad \psi = dd^c \log \|z\|^2.$$

補題.  $f \in \mathcal{F}$  とし,  $dd^c f$  をカレレトの意味とする。つまり  $dd^c f$  はメジヤーを係数とする  $(1,1)$  型式となる。

(Lehman [17] を参照). この時  $0 < r_1 < r_2$  に対し

$$(1.1) \quad \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t} \int_{B(t)} dd^c \xi \wedge \psi^{m-1} = \int_{\partial B(r_2)} \xi d^c \log \|z\| \wedge \psi^{m-1} \\ - \int_{\partial B(r_1)} \xi d^c \log \|z\| \wedge \psi^{m-1}.$$

証明.  $\xi \in C^\infty$  の時を示す. 一般の場合は 1 の分割と convolution による smoothing でできる. まず Stokes を使って,  $\psi^m \equiv 0$  に注意すれば

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \int_{B(r_2) - B(r_1)} d\xi \wedge d^c \log \|z\| \wedge \psi^{m-1} \\ &= \int_{B(r_2) - B(r_1)} d \log \|z\| \wedge d\xi \wedge \psi^{m-1} \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t} \int_{\partial B(t)} d^c \xi \wedge \psi^{m-1} \quad [\text{i) Fubini}] \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t} \int_{B(t)} dd^c \xi \wedge \psi^{m-1}. \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

§2. (1)  $f$  を  $\mathbb{C}^m$  上の有理型函数,  $(f)_0$  (resp.  $(f)_\infty$ ) を  $f$  のゼロ (resp. 極) の定める因子を現わす. この時, 次のカレント方程式を得る:

$$(2.1) \quad dd^c \log |f|^2 = (f)_0 - (f)_\infty.$$

迄. これは本質的には次の事実による.  $\mathbb{C}$  上の座標を  $z$  とし

$$dd^c \log |z|^2 = \text{the Dirac measure at the origin.}$$

$\bar{z} = \log |f|^2$  と (1.1) を適用すると,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(r)} \log |f| d^c \log \|z\|^2 \wedge \psi^{n-1} &= \int_{\partial B(1)} \log |f| d^c \log \|z\|^2 \wedge \psi^{n-1} \\ &= \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{B(t)} (f)_0 \wedge \psi^{n-1} - \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{B(t)} (f)_\infty \wedge \psi^{n-1}. \end{aligned}$$

$\int_{B(t)} (f)_0 \wedge \psi^{n-1}$  は  $\{f=0\} \cap B(t)$  上重複度を

こわて  $\psi^{n-1}$  を積分すると  $\int_{B(t) \cap (f)_0} \psi^{n-1}$  とおくと  
 なる.  $(f)_\infty$  についても同様.

$$m(r, f) = \int_{\partial B(1)} \log^+ |f| d^c \log \|z\|^2 \wedge \psi^{n-1}$$

$$n(t, f) = \int_{B(t) \cap (f)_0} \psi^{n-1}$$

$$N(r, f) = \int_1^r \frac{n(t, f)}{t} dt$$

とそれぞれ置く. 更に Nevanlinna の位教関数を次で定義する:

$$(2.2) \quad T(r, f) = N(r, f) + m(r, f).$$

以上より次を得る.

第一重要定理.

$$(2.3) \quad T(r, f) = T(r, \frac{1}{f}) + \int_{\partial B(1)} \log |f| d^c \log \|z\|^2 \psi^{m-1}.$$

注.  $T(r, f) = O(\log r) \iff f$  は rational.

系 (Nevanlinna 不等式).

$$(2.4) \quad N(r, \frac{1}{f}) < T(r, f) + O(1).$$

一般に  $Z$  を  $\mathbb{C}^m$  内の純  $k$  次元の解析的集合とし, その個数関数を

$$n(t, Z) = \int_{B(t) \cap Z} \psi^k,$$

$$N(r, Z) = \int_1^r \frac{n(t, Z)}{t} dt$$

と定義する. 次の結果は基本的であり (Bishop [2], Stall [5]):

$$Z \text{ が代数的} \iff N(r, Z) = O(\log r) \\ (\iff n(t, Z) = O(1)).$$

±  $\dim Z = 1$  で,  $Z$  が整函数  $f$  の 0 因子にち, 24  
了時 (2.4) より

$$N(r, Z) < T(r, f) + O(1).$$

$$\rho_f = \lim_{r \rightarrow \infty} (\log T(r, f)) / \log r = f \text{ の位数}$$

$$\rho_Z = \lim_{r \rightarrow \infty} (\log N(r, Z)) / \log r = Z \text{ の位数}$$

とあれば

$$\rho_Z \leq \rho_f.$$

逆に有限位数  $\rho$  をもつ因子  $Z$  が与えられた時, これと同じ位数  $\rho$  をもつ整函数  $f$  で  $(f)_\infty = Z$  とするものが構成でき,  $T(f)$  が  $m(n, Z)$  を使ってよから評価式も得られる ([16]).  
これは正に Weierstrass 積の拡張になっている. しかし

$\text{codim } Z \geq 2$  の時はこのようにされない. はるゝなり.

Cornalba-Sheffman [8] の例によれば,  $\mathbb{C}^2$  上位数 0 の整函数  $f_1, f_2$  で, 0 次元の解析的集合  $Z = \{f_1 = f_2 = 0\}$  はいかなる増大度でも持て得る. 一方 Skoda [24] によれば, 有限位数  $\rho$  の解析的集合  $Z$  が与えられた時,  $m+1$  個の位数  $\rho$  をもつ整函数  $f_1, \dots, f_{m+1}$  で

$$Z = \{f_1 = \dots = f_{m+1} = 0\}$$

とすることができる.

(2.5) 問題. Higher codimension の時のカーを要定理?  
?

多くの数学者が手がけてゐるが, 未だ満足できる状態にはなっていない.

(ロ) 次はコンパクトな Kähler 多様体  $V$  への正則写像を扱う. 以下の議論は有理型写像に対しても全く同様であり,  $f: \mathbb{C}^m \rightarrow V$  を正則写像とする. 以下で述べるように  $f$  の "位数関

数"とはとれほど明らかである。実  $c \in H^{1,1}(V, \mathbb{C})$  に  
 対し,  $c$  に属する実  $(1,1)$  型式  $\omega$  をとり,

$$(2.6) \quad T_f(\lambda, c) = \int_1^\lambda \frac{dt}{t} \int_{B(t)} f^* \omega \wedge \psi^{m-1}$$

と置く. 他の <sup>実</sup>  $(1,1)$  型式  $\omega'$  をとり, た時 (2.6) の右辺の積分  
 は  $O(1)$ -term しか変化するから, (2.6) は  $\mu$  による  $O(1)$ -term  
 で well-defined である. このことは,  $V$  上の  $\infty$ -関数  $f$   
 で  $dd^c f = \omega - \omega'$  を満たすものがある (Weil の Kähler  
 多様体の本の IV 章を参照) ことより  $dd^c f^* \omega = f^* \omega - f^* \omega'$  と  
 なり (1.1) を適用すればただちに分る. (2.6) の  $T_f(\lambda, c)$   
 を  $f$  の  $c$  に関する位数関数と呼ぶ.  $\dim V = 1$  の時は

$$H^{1,1}(V, \mathbb{C}) = H^2(V, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}.$$

$$[\omega] \longmapsto \int_V \omega$$

より  $\int_V \omega = 1$  なる  $[\omega] = c$  をとり,

$$T_f(\lambda) = T_f(\lambda, [\omega])$$

と定義する. 特に  $V = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$  の時は,

$$T_f(\lambda) - T(\lambda, f) = o(1).$$

一般の  $V$  にもどり,  $L \rightarrow V$  を直線束,  $|\cdot|$  を  $L$  の metric,  
 $|L|$  を  $L$  の完備線型系とする.  $D \in |L|$  に対し,  $f \in H^0(V, L)$   
 を  $|f| < 1$  なるようにとり,

$$m_f(\lambda, D) = \int_{\partial B(\lambda)} \log \frac{1}{f^*|o|} d^c \log \|z\|^2 \wedge \gamma^{m-1},$$

$$N_f(\lambda, D) = N(\lambda, f^*D)$$

と置く.  $L$  の  $H^{1,1}(V, \mathbb{C})$  でのカ1 Chern 類を  $c_1(L)$  と書き, metric 1-1 の曲率型式を  $\omega \in c_1(L)$  とする. この時次のカレト方程式が成立する:

$$(2.7) \quad dd^c \log f^*|o|^2 = f^*D - f^*\omega.$$

前と同様に (1.1) を適用すれば次が分る.

カ-主要定理. 任意の  $D \in |L|$  に対し,

$$(2.8) \quad T_f(\lambda, c_1(L)) = N_f(\lambda, D) + m_f(\lambda, D) + O(1).$$

系 (Nevanlinna 不等式).

$$(2.9) \quad N_f(\lambda, D) \leq T_f(\lambda, c_1(L)) + O(1).$$

証.  $\dim V = 1$  の時,  $D = \text{一点 } a \in V$  ならば,  $D$  で決まる直線束  $[D]$  のカ1 Chern 類を  $c_1(D)$  とかくと  $\int_V c_1(D) = 1$  だから,

$$T_f(\lambda) = N_f(\lambda, a) + m_f(\lambda, a) + O(1).$$

(2.10) 問題. 直線束をベクトル束にした時どうなるか?

問題 (2.5) と同じ理由でうまくできらぬ (Bott-Chern [3], Griffiths-King [12] 等を参照).

§3. この節では  $V$  を  $m$  次元非特異複素射影的代数多様体とし, 正則写像  $f: \mathbb{C}^m \rightarrow V$  で非退化なもの, つまりその

Jacobian  $J(f) \neq 0$ , に対し Nevanlinna の第二主要定理を一般化する.

Fatou [10] による例:  $\exists f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  中への双正則写像で,  $f(\mathbb{C}^2)$  は外点を持つ.

この例は, 非退化正則写像  $f: \mathbb{C}^m \rightarrow V$  が  $V$  の“点”をどのくらい覆うかを扱うことが非常に難しいことを示している. 覆われる点が多すぎるのである. ここでは  $f(\mathbb{C}^m)$  が  $V$  の“因子”をどのくらい交わるかを扱い, Carlson, Griffiths, King [4], [12] 等により示された第二主要定理を述べた. そしてこれが一変数の場合の自然な拡張になっていることが分る.

$D_1, \dots, D_g$  を  $V$  上のアンブルな非特異既約因子とし  $D_1 + \dots + D_g$  は正規交叉とする. また簡単の為

$$(3.1) \quad c_1(D_1) = \dots = c_1(D_g) = c \in H^{1,1}(V, \mathbb{C})$$

を仮定し  $T_f(n) = T_f(n, c)$  とおく.  $f: \mathbb{C}^m \rightarrow V$ ,  $m \geq \dim V$  で (3.1) 以外の時でもできているが, 上述の場合が本質的である (Sakai [23] を参照). 各  $[D_i]$  に計量  $|\cdot|$  と,  $D_i = (\sigma_i)$  とする  $\sigma_i \in H^0(V, L(D_i))$  と  $|\sigma_i| < 1$  とする. 更に  $\Omega$  を  $V$  上のいたる所正の  $(m, m)$  型式 (体積要素) とする.

$$\Xi = \Omega / \prod_i |\sigma_i|^2 (\log |\sigma_i|^2)^2$$

とおく.  $\Omega$  と計量  $|\cdot|$  をうまくとると ([12] を参照)

$$\Psi \in L^1(V),$$

$$\text{Ric } \Psi > 0, \quad \text{Ric } \Psi \in L^1(V),$$

$$(3.2) \quad \Psi \leq (\text{Ric } \Psi)^n \in L^1(V).$$

ここで  $\text{Ric } \Psi$  とは一般に  $\Psi$  が体積要素を局所的に

$$\Psi = \Psi(x) \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} dx_1 \wedge d\bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} dx_n \wedge d\bar{x}_n$$

と書かれた時

$$\text{Ric } \Psi = dd^c \log \Psi(x)$$

で定義される  $(1,1)$  型式である.

$$\begin{aligned} f^* \Psi &= f^* \Omega / \prod_{i=1}^g f^* | \sigma_i |^2 (\log f^* | \sigma_i |^2)^2 \\ &= \xi \varphi^n \end{aligned}$$

とおく. この時次のカレント方程式を得る:

$$(3.3) \quad dd^c \log \xi = f^* \text{Ric } \Psi - \sum_{i=1}^g f^* D_i + R,$$

ここで  $R = (J(f))_0$  (分枝因子).

$$\mu(r) = \int_{2B(r)} \log \xi \, d^c \log \|Z\| \wedge \varphi^{n-1}$$

とおく (1.1) を (3.3) に適用する:

$$(3.4) \quad \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{B(t)} \text{Ric } \Psi \wedge \varphi^{n-1} = \sum_{i=1}^g N_f(r, D_i) - N(r, R) + \mu(r) - \mu(1).$$

$\text{Ric } \Psi$  の定義と “ $\log$ ” の凹性を使うと

$$(3.5) \quad 0 \leq \frac{1}{2} T_f(r) + T_f(r, c(K_V)) - \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{B(t)} \text{Ric } \Psi \wedge \varphi^{n-1} \leq 2 \log(T_f(r)) + O(1).$$

さて (3.2) と (3.5) を使えば,  $\mu(\lambda)$  の評価が出来る:

$$(3.7) \quad \mu(\lambda) = O(\log(\lambda T_f(\lambda))) + O(1),$$

但し  $\rho_f < \infty$  の時は, 全ての  $\lambda$  について成立するが,  $\rho_f = \infty$  の時は測度有限な除外集合の外の  $\lambda$  について成立する.

(3.8) 定義. 上述の ような性質をもつ量 を以後  $S(\lambda)$  と書く.  
 又, 実の  $\alpha \in H^1(V; \mathbb{C})$  に対し,  $\alpha > 0$  とは  $\alpha$  が正定値な実  
 (1,1) 型式を含むことをいふ.

$$\frac{C(-K_V)}{C} = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}; \lambda C + C(K_V) > 0 \}$$

と置く.  $D_i$  の defect  $\delta(D_i)$  を次で定義する.

$$\delta(D_i) = 1 - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} N_f(\lambda, D_i) / T_f(\lambda)$$

$$(2.9) \text{ より } 0 \leq \delta(D_i) \leq 1; \quad f(\mathbb{C}^n) \cap D_i = \emptyset \Rightarrow \delta(D_i) = 1.$$

これは互要定理.

$$(3.8) \quad \delta T_f(\lambda) + T_f(\lambda, C(K_V)) \leq \sum_i N_f(\lambda, D_i) - N(\lambda, R) + S(\lambda).$$

系 (defect relation).

$$(3.9) \quad \sum_i \delta(D_i) \leq \frac{C(-K_V)}{C}$$

更に  $\overline{N}_f(\lambda, D_i)$  を重複度を二つある固有値関数とすれば,  
 $D_1 + \dots + D_g$  が正規交叉となるときより

$$\sum_i N_f(\lambda, D_i) - N(\lambda, R) \leq \sum_i \overline{N}_f(\lambda, D_i).$$

$$\Theta(D_i) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{N}_f(n, D_i) / T_f(n)$$

とおく

$$(3.10) \quad \sum_i \Theta(D_i) \leq \frac{C(-K_V)}{c}$$

従って十分大各  $D_i$  上  $m_i$  位以上を分枝してやれば,  $\pi$  を  $\pi^*$  の各既約成分の位数が  $m_i$  以上存するは,

$$1 - \overline{N}_f(n, D_i) / T_f(n) \geq 1 - \frac{1}{m_i} \overline{N}_f(n, D_i) / T_f(n) \geq 1 - 1/m_i.$$

$$\text{よって } \Theta(D_i) \geq 1 - \frac{1}{m_i} \quad \text{— 457 —}$$

$$(3.11) \quad \sum_i \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \leq \frac{C(-K_V)}{c}.$$

迄. (1)  $\dim V = 1$  の時,  $C(K_V) = 2g - 2$ ,  $g$  は  $V$  の種数. 従って  $D_i = a_i \in V$  ならば

$$\sum_{a_i \in V} \overline{e}(a_i) \leq 2 - 2g,$$

$$\sum_{a_i \in V} \Theta(a_i) \leq 2 - 2g,$$

$$\sum_{a_i \in V} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \leq 2 - 2g,$$

等が出た.

(ロ)  $V = \mathbb{P}_C^m$ ,  $D_i$  が超平面の時

$$C_1(K_V) = -(m+1) C_1(D_i)$$

だから  $\frac{C_1(-K_V)}{C_1(D_i)} = m+1$  となり, として  $D_1 + \dots + D_g$  が正交交又とは, 一般の位置にあることと同値.

(11)  $V =$  アーベル多様体の時,  $c_1(K_V) = 0$  だから,  
(3.9) 或いは (3.10) は, 非退化な  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow V$  はいかなる  $V$  の  
因子とも交差することを主張している.

§4. この節では,  $n$  次元複素射影的非常数多様体  
 $V$  内の正則曲線 (= 正則写像)  $f: \mathbb{C} \rightarrow V$  の値分布につい  
て論ずる. 一般の  $m \geq 1$  について議論したいわけであるが,  
この場合  $f$  が  $V$  の“点”をどのくらいとるかま考え方には  
, どのくらい点があまうにも多い. ここでは  $m=1$  と同様,  $V$  の  
因子と  $f$  がどのくらい交差するかを扱う. カニ直要定理につ  
いては §2(12) で述べている. 問題は  $m=1$  の直要定理である. こ  
れについて知られてゐた事は極めて少ない. 次はよく知られ  
てゐる古典的な場合である.

$$(4.1) \begin{cases} V = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \\ D = \sum_1^r \text{Hyperplanes } D_i \text{ in general position,} \\ f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \text{ は線型非退化} \end{cases}$$

== 線型非退化とは像  $f(\mathbb{C})$  があつた一つの超平面に含まれ  
ることはないこと. H. Cartan が 1933 年に, 後述した  
方法で 1941 年 Ahlfors が  $n$  の  $m=1$  の直要定理を証明した.  
 $m=1$  の直要定理 ([1], [5], [28] 参照). (4.1) の時,

$$(4.2) \quad (2-n-1) T_f(r) < N_f(r, D) + S(r).$$

ここで  $T_f(\lambda) = T_f(\lambda, C(D_i))$ ,  $S(\lambda)$  は (3.4) で定義された量. 更に H. Cantan は同じ論文で,  $N_f(\lambda, D)$  の代わりに,  $f$  が  $D$  と交わった時の位数 (重複度) が  $m$  以下の時はその位数, それ以上の時は  $m$  とした個数関数  $N_f^{(m)}(\lambda, D)$ ,  $N_f^{(m)}(\lambda, D)$  を導入し, (4.1) のもとで次を示した.

$$(4.3) \quad (g-m-1)T_f(\lambda) < N_f^{(m)}(\lambda, D) + S(\lambda).$$

$$N_f^{(m)}(\lambda, D) = \overline{N}_f(\lambda, D) \text{ であるから}$$

$$(4.4) \quad \frac{g-m-1}{m} T_f(\lambda) < \overline{N}_f(\lambda, D) + S(\lambda).$$

$\delta(D_i) = 1 - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} N_f(\lambda, D_i) / T_f(\lambda)$  とおけば (4.2) より次が出る.

$$\text{系 (defect relation). } \sum \delta(D_i) \leq m+1.$$

今の処, カニ重要定理及び defect relation がこのように完全な形で現れらにできていたのは (4.1) の場合と, その付随曲線の場合だけである. ここでは問題を次のように弱める:

問題. 一般の  $V$  に対し, その上の因子  $D$  と, 正則曲線  $f$ :

$\mathbb{C} \rightarrow V$  が如何なる時, 正定数  $K$  をもち,

$$(4.5) \quad K T_f(\lambda) < N_f(\lambda, D) + S(\lambda)$$

なる不等式が成立するか?

ここで我々が実際に証明したのは (4.4) に対応する次の式である

$$(4.6) \quad K T_f(\lambda) < \overline{N}_f(\lambda, D) + S(\lambda).$$

注. Nevanlinna の原論文 [18] を見ると, 上の問題意識の持ち方は Nevanlinna の動機に沿ったものであったことが分る.

$V$  上に一つ Kähler 型式  $\Omega$  を固定し,

$$T_f(\lambda) = \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_{\{|z| < t\}} f^* \Omega$$

と置く. 他方の Kähler 型式  $\Omega'$  をとりそれに対応する位相関数を  $T_{f'}(\lambda)$  とすると,  $\Omega$  と  $\Omega'$  で決まる正定数  $A, A'$  があって  $AT_f(\lambda) < T_{f'}(\lambda) < A'T_f(\lambda)$  となる.

$R(V)$  で  $V$  上の有理関数体を現かし, その  $\mathbb{C}$  上の生成元  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  でそれらの極に  $f(\mathbb{C})$  が  $\lambda$  としてしまわらつてのをとる.  $f^*\varphi_i$  は  $\mathbb{C}$  上の有理型関数とらり (2.2) で定義した位相関数  $T(\lambda, f^*\varphi_i)$  を使って

$$(4.7) \quad \widetilde{T}_f(\lambda) = \max_{1 \leq i \leq n} T(\lambda, f^*\varphi_i)$$

と置く.  $V$  が射影的代数多様体であったとき,  $\Omega$  と  $\{\varphi_i\}$  で決まる正定数  $B, B'$  があって次のようになる:

$$(4.8) \quad BT_f(\lambda) + o(1) < \widetilde{T}_f(\lambda) < B'T_f(\lambda) + o(1).$$

注.  $\dim V = 1$  の時,  $\varphi \in R(V)$  に対し

$$\begin{aligned} d(\varphi) &= \text{degree of zeros of } \varphi \\ &= \text{degree of poles of } \varphi. \end{aligned}$$

$\Omega$  を  $\int_V \Omega = 1$  とするようにとる,

$$T_f(\lambda) = \int_0^1 \frac{dt}{t} \int_{\{|z| < t\}} f^* \Omega = \frac{1}{d(\varphi)} T(\lambda, f^* \varphi) + o(1).$$

$D$  を  $V$  内の余次元 1 の解析的集合 (因子),  $x_0 \in V$  の近傍で  $\sigma_1 \cdots \sigma_k = 0$ ,  $\sigma_i$  は既約,  $\sigma_i$  の定義方程式とする.  $\mathcal{O}_V$  を構造層とし,  $\Omega_V^1$  を  $V$  上の正則 1 型式の層,  $D$  によって対数的極をもつ 1 型式の層  $\Omega_V^1(\log D)$  を次のように定義する:

$$\Omega_{V, x}^1(\log D) = \sum \mathcal{O}_{V, x} \frac{d\sigma_i}{\sigma_i} + \Omega_{V, x}^1.$$

(4.9) 拡張された Nevanlinna の対数微分に関する補題.

$\omega \in H^0(V, \Omega_V^1(\log D))$  に対し  $f^* \omega = \gamma(z) dz$  とおく.

$$m(\lambda, \gamma) = S(\lambda).$$

相2次の二条件を考へる ([22], [19] を参照)

(4.10)  $n+1$  個の元からなる系  $\{\omega_i\}_{i=1}^{n+1} \subset H^0(V, \Omega_V^1(\log D))$

で  $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \check{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_{n+1}$ ,  $1 \leq i \leq n+1$ , が  $\mathbb{C}$  上-次独立なものか存在する.

(4.11) (4.10) の  $\{\omega_i\}_{i=1}^{n+1}$  に対し  $f: \mathbb{C} \rightarrow V$  が非退化とは総ての  $(c_1, \dots, c_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  に対し

$$f(\mathbb{C}) \not\subset \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} c_i \omega_1 \wedge \cdots \wedge \check{\omega}_i \wedge \cdots \wedge \omega_{n+1} = 0 \right\}.$$

(4.12) は二主要定理型の定理 ([19], [20]). (4.9), (4.10) を仮定する. また各々の  $f$  によらな正定数  $K$  があつて,

$$(4.6) \quad K T_f(\lambda) < \bar{N}_f(\lambda, D) + S(\lambda)$$

証明のスケッチ.  $\varphi \in K(V)$  で, その極の中に  $f(\mathcal{C})$  が入つてしまつたものとする.  $f^* \omega_i = \sum_j d_{ij} \alpha_j$  とおき,  $\alpha_j^{(k)}$  をその  $k$  階の導関数を現わし,  $\mathbb{C}(\alpha_j^{(k)})_{\substack{0 \leq k \leq m-1 \\ 1 \leq j \leq m+1}}$  で  $\mathbb{C}$  上とれる  $\alpha_j^{(k)}$  で生成される関数体とする. (4.9), (4.10) と Ochiai [22, 定理 A] を使うと,  $f^* \varphi$  が  $\mathbb{C}(\alpha_j^{(k)})_{\substack{0 \leq k \leq m-1 \\ 1 \leq j \leq m+1}}$  上代数的であることが分り, 更に [20] によつて, その代数的関数式が  $f$  を動かした時, 高々有限個であることが分る. この事実より  $\tilde{T}_f(\lambda)$  を (4.7) で与えられたものとすると, 各々の  $f$  によらな正定数  $K_1$  があつて

$$K_1 \tilde{T}_f(\lambda) < \max_{\substack{1 \leq i \leq m+1 \\ 0 \leq k \leq m-1}} T(\lambda, \alpha_i^{(k)}) + O(1).$$

ここで (4.9) を使うと

$$T(\lambda, \alpha_i^{(k)}) \leq (k+1) \bar{N}_f(\lambda, D) + S(\lambda).$$

従つて

$$\frac{K_1}{m} \tilde{T}_f(\lambda) < \bar{N}_f(\lambda, D) + S(\lambda).$$

これを (4.8) から (4.6) を得る. s. e. d.

注 1.  $\dim V = 1$  の時は,  $V$  が楕円曲線の時を除いて

(4.12) は最良.  $V$  が楕円曲線の時

(4.10)  $\iff D$  は二点以上.

一方 (4.6) は  $D =$  一点 で十分 なることを知っている ( §3 の最後の部分の述を参照 ).

述2.  $V = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ ,  $n \geq 2$ ,  $D = \sum_i \text{hyperplanes } D_i$ , の場合.

(1)  $n \geq 2$ ,  $g = n+2$  の時;

(4.10)  $\iff D = D_1 + \dots + D_{n+2}$  in general position

(4.11)  $\iff f$  は線型非退化.

(2)  $n=2$  で  $g$  は一般の時;

(4.10)  $\iff \left\{ \begin{array}{l} D \text{ の中に4個の一般の位置にある } D_i \text{ が} \\ \text{ある.} \end{array} \right.$

(11)  $n \geq 3$ ,  $g \geq n+3$  の時;  $g = n+3$ ,  $n \geq 3$  で (4.10) は成り立つが,  $D_1, \dots, D_{n+3}$  からの  $n+2$  個をとり出して一般の位置にならという  $D$  の例がある, [L, p. 47].

述3. 今迄知られていたのと異なるタイプの例を与える.

$V =$  アーベル多様体

$D_1, D_2$  を正のアンプルな因子で共通成分を持たず, 互いに本モロガッスなものとす. この時

$$D = D_1 + D_2$$

は (4.10) を満たす.

注4.  $f: \mathbb{C}^m \rightarrow V$ ,  $m \geq 1$  に対して (4.12) は,  $\mathbb{C}^m$  の原点を通る複素直線  $\mathbb{C}$  で,  $f$  のとけへの制限が  $\{\omega_i\}_{i=1}^{m+1}$  に関して非退化になり, 2115 年のかあすならば成立する.

(4.13) 問題. (4.5) 及び (4.6) の  $K$  を決めよ.

$K$  の計算可能な  $V$  及び  $D$  の "class" を見つけたのも興味ある問題と思う ( $W_u$ ).

#### References

- [1] L. Ahlfors, The theory of meromorphic curves, Acta Soc. Scie. Fennicae Nova Ser. A. III 4(1941), 3-31.
- [2] E. Bishop, Condition for the analyticity of certain sets, Mich. Math. J. 11(1964), 289-304.
- [3] R. Bott and S. S. Chern, Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeros of their holomorphic sections, Acta Math. 114(1965), 71-112.
- [4] J. Carlson and P. Griffiths, A defect relation for equidimensional holomorphic mappings between algebraic varieties, Ann. Math. 95(1972), 557-584.
- [5] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de  $p$  fonctions holomorphes données, Matematica 7(1933), 5-31.
- [6] S. S. Chern, Holomorphic curves in the plane, Diff. Geom. in Honor of K. Yano, pp. 73-94, Kinokuniya, Tokyo, 1972.
- [7] S. S. Chern, M. J. Cowen and A. L. Vitter III, Frenet frames along holomorphic curves, Value Distribution Theory, Part A, pp. 191-203, Marcel Dekker Inc. New York, 1974.

- [8] M. Cornalba and B. Shiffman, A counterexample to the "Transcendental Bezout problem", *Ann. Math.* 96(1972), 402-406.
- [9] M. J. Cowen and P. Griffiths, Holomorphic curves and metrics of negative curvature, *J. Anal. Math.* 29(1976), 93-153.
- [10] P. Fatou, Sur les fonctions méromorphes de deux variables, *C. R. Acad. Scie. Paris* 175(1922), 862-865.
- [11] P. Griffiths, Entire Holomorphic Mappings in One and Several Complex Variables, *Ann. Math. Study* 85, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1976.
- [12] P. Griffiths and J. King, Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, *Acta Math.* 130(1973), 145-220.
- [13] S. Kobayashi, Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings, Marcel Dekker Inc., New York, 1970.
- [14] ———, Intrinsic distances, measures and geometric function theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* 82(1976), 357-416.
- [15] K. Kodaira, On holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds, *J. Diff. Geom.* 6(1971), 33-46.
- [16] P. Lelong, Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans  $C^n$ , *J. Anal. Math.* 12(1964), 365-407.
- [17] ———, Fonctions plurisousharmoniques et Formes différentielles positives, Gordon and Breach, Paris, 1968.
- [18] R. Nevanlinna, Zur Theorie der meromorphen Funktionen, *Acta Math.* 46(1925), 1-50.
- [19] J. Noguchi, Holomorphic curves in algebraic varieties, *Hiroshima Math. J.* 7(1977), 833-853.
- [20] ———, Remarks on an inequality for holomorphic curves in algebraic varieties, preprint.

- [21] ———, Rigidity of holomorphic curves in some surfaces of hyperbolic type  
 , preprint.
- [22] T. Ochiai, On holomorphic curves in algebraic varieties with ample  
 irregularlity, Invent. Math. 43(1977), 83-96.
- [23] F. Sakai, Degeneracy of holomorphic maps with ramification, Invent. Math.  
 26(1974), 213-229.
- [24] H. Skoda, Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans  $C^n$ , Bull.  
 Soc. math. France 100(1972), 353-408.
- [25] W. Stoll, The growth of the area of a transcendental analytic set I, II ,  
 Math. Ann. 156(1964), 47-78, 144-170.
- [26] ———, Value Distribution on Parabolic Spaces, Lecture Notes in Math.  
 600, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1977.
- [27] H. and J. Weyl, Meromorphic Functions and Analytic Curves, Ann. Math.  
 Study 12, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1943.
- [28] H. Wu, The Equidistribution Theory of Holomorphic Curves, Ann. Math.  
 Study 64, Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo Press, Princeton,  
 New Jersey and Tokyo, 1970.